

Ανάλυση σφάλματος και ευστάθειας της άμεσης μεθόδου του Euler για την εξίσωση της θερμότητας

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Σχολή Μηχανικών



Απρίλιος 2020

1 Εισαγωγή – Η άμεση μέθοδος του Euler για την εξίσωση της θερμότητας

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας:

Αναζητούμε $u : [0, T_f] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους τέτοια ώστε

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x), \quad \text{για κάθε } t \in [0, T_f], \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \text{για κάθε } x \in [a, b], \quad (\text{Αρχική συνθήκη}) \quad (2)$$

$$u(t, a) = u(t, b) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, T_f]. \quad (\text{Συνοριακές συνθήκες Dirichlet}) \quad (3)$$

Για να επιλύσουμε αριθμητικά το πρόβλημα με την λεγόμενη άμεση μέθοδο του Euler θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a, b]$ σε $N_x + 1$ υποδιαστήματα με βήμα $h = \frac{b-a}{N_x+1}$, και έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[0, T_f]$ σε N_t υποδιαστήματα με βήμα $\tau = \frac{T_f}{N_t}$.

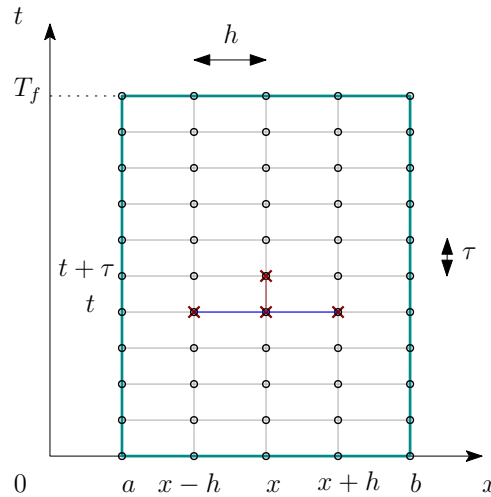
Επομένως οι κόμβοι στο διάστημα $[a, b]$ (χωρική διάσταση) είναι $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N_x + 1$, ενώ οι κόμβοι στο διάστημα $[0, T_f]$ (χρονική διάσταση) είναι $t_i = i\tau$, $i = 0, 1, \dots, N_t$. Τώρα, για να κατασκευάσουμε την άμεση μέθοδο του Euler, προσεγγίζουμε την μερική παράγωγο $u_t(t, x)$ με προς τα εμπρός διαφορά:

$$u_t(t, x) \approx \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau},$$

και την μερική παράγωγο $u_{xx}(t, x)$ με κεντρική διαφορά 2ης τάξης:

$$u_{xx}(t, x) \approx \frac{u(t, x - h) - 2u(t, x) + u(t, x + h)}{h^2},$$

βλ. Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σχεδιάγραμμα της άμεσης μεθόδου του Euler.

Επομένως προσεγγίζουμε τη μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) στο σημείο (t_n, x_i)

$$u_t(t_n, x_i) - u_{xx}(t_n, x_i) = 0$$

με την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$\frac{u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau} - \frac{u(t_n, x_{i-1}) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_{i+1}))}{h^2} \approx 0.$$

Συμβολίζουμε με U_i^n την προσέγγιση της ακριβούς λύσης στο σημείο (t_n, x_i) , δηλαδή $U_i^n \approx u(t_n, x_i)$.

Έτσι οδηγούμαστε στο ακόλουθο αριθμητικό σχήμα:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} - \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} = 0 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\tau}{h^2}(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n), \quad (5)$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1$ και $i = 1, 2, \dots, N_x$.

Θέτουμε $\mu := \frac{\tau}{h^2}$, οπότε καταλήγουμε στην **άμεση μέθοδο του Euler**:

$$U_i^{n+1} = \mu U_{i-1}^n + (1 - 2\mu) U_i^n + \mu U_{i+1}^n,$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1$, $i = 1, 2, \dots, N_x$, και $\mu = \frac{\tau}{h^2}$ είναι ο λεγόμενος **αριθμός Courant**.

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το σχήμα πεπερασμένων διαφορών για την εξίσωση της θερμότητας:

Άμεση μέθοδος του Euler

$$U_i^{n+1} = \mu U_{i-1}^n + (1 - 2\mu) U_i^n + \mu U_{i+1}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \quad (6)$$

$$U_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \quad (7)$$

$$U_0^n = 0 = U_{N_x+1}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_t. \quad (8)$$

όπου $\tau = \frac{T_f}{N_t}$ είναι το χρονικό βήμα, $h = \frac{b-a}{N_x+1}$ είναι το χωρικό βήμα, και $\mu = \frac{\tau}{h^2}$ είναι ο αριθμός Courant.

2 Ανάλυση σφάλματος της άμεσης μεθόδου του Euler

Ορίζουμε και πάλι το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου:

$$T_i^n := \frac{u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau} - \frac{u(t_n, x_{i+1}) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_{i-1}))}{h^2}, \quad (9)$$

για $n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1$ και $i = 1, 2, \dots, N_x$. Δηλαδή έχουμε αντικαταστήσει την ακριβή λύση στο αριθμητικό μας σχήμα (συγκεκριμένα στην (4)).

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.1. Για το σφάλμα συνέπειας στην άμεση μέθοδο του Euler έχουμε ότι:

$$|T_i^n| \leq \frac{\tau}{2} M_{tt} + \frac{h^2}{12} M_{xxxx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_x,$$

όπου

$$M_{tt} = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{tt}(t, x)|, \quad M_{xxxx} = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{xxxx}(t, x)|,$$

και με $\mathcal{R}$ συμβολίζουμε το ορθογώνιο χωρίο $\mathcal{R} = [0, T_f] \times [a, b]$.

Απόδειξη. Καταρχάς,

$$\frac{u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau} = \frac{u(t_n + \tau, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau}.$$

Αναπτύσσουμε με Taylor την $u(t_n + \tau, x_i)$ ως προς t γύρω από το σημείο (t_n, x_i) και έχουμε:

$$\begin{aligned} u(t_n + \tau, x_i) &= u(t_n, x_i) + \tau u_t(t_n, x_i) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(\rho_n, x_i), \quad \text{όπου } \rho_n \in (t_n, t_{n+1}) \\ \Leftrightarrow \frac{u(t_n + \tau, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau} &= u_t(t_n, x_i) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(\rho_n, x_i). \end{aligned} \quad (10)$$

Επίσης,

$$\frac{u(t_n, x_{i+1}) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_{i-1}))}{h^2} = \frac{u(t_n, x_i + h) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_i - h)}{h^2}.$$

Αναπτύσσουμε με Taylor τις $u(t_n, x_i + h)$ και $u(t_n, x_i - h)$ ως προς x γύρω από το σημείο (t_n, x_i) και έχουμε:

$$\begin{aligned} u(t_n, x_i + h) &= u(t_n, x_i) + hu_x(t_n, x_i) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t_n, x_i) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(t_n, x_i) + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(t_n, \xi_i), \\ u(t_n, x_i - h) &= u(t_n, x_i) - hu_x(t_n, x_i) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t_n, x_i) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(t_n, x_i) + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(t_n, \zeta_i), \end{aligned}$$

όπου $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ και $\zeta_i \in (x_i, x_{i+1})$.

Αντικαθιστούμε τις εκφράσεις αυτές στο πηλίκο διαφορών $\frac{u(t_n, x_i + h) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_i - h)}{h^2}$ και έχουμε:

$$\frac{u(t_n, x_i + h) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_i - h)}{h^2} = u_{xx}(t_n, x_i) + \frac{h^2}{24}(u_{xxxx}(t_n, \xi_i) + u_{xxxx}(t_n, \zeta_i)), \quad (11)$$

όπου $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ και $\zeta_i \in (x_i, x_{i+1})$.

Αντικαθιστούμε τις (10) και (11) στον ορισμό του σφάλματος συνέπειας (9), και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} T_i^n &= \underbrace{u_t(t_n, x_i) - u_{xx}(t_n, x_i)}_{=0, \text{ αφού } u \text{ λύση της ΜΔΕ}} + \frac{\tau}{2}u_{tt}(\rho_n, x_i) - \frac{h^2}{24}(u_{xxxx}(t_n, \xi_i) + u_{xxxx}(t_n, \zeta_i)) \\ \Rightarrow T_i^n &= \frac{\tau}{2}u_{tt}(\rho_n, x_i) - \frac{h^2}{24}(u_{xxxx}(t_n, \xi_i) + u_{xxxx}(t_n, \zeta_i)) \\ \Rightarrow |T_i^n| &\leq \frac{\tau}{2}|u_{tt}(\rho_n, x_i)| + \frac{h^2}{24}(|u_{xxxx}(t_n, \xi_i)| + |u_{xxxx}(t_n, \zeta_i)|) \\ \Rightarrow |T_i^n| &\leq \frac{\tau}{2} \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{tt}(t, x)| + \frac{h^2}{24} \left(\max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{xxxx}(t, x)| + \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{xxxx}(t, x)| \right) \\ \Rightarrow |T_i^n| &\leq \frac{\tau}{2} \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{tt}(t, x)| + \frac{h^2}{12} \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{xxxx}(t, x)| = \frac{\tau}{2}M_{tt} + \frac{h^2}{12}M_{xxxx}. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 2.2. Είναι προφανές ότι καθώς $\tau, h \rightarrow 0$, το σφάλμα συνέπειας $T_i^n \rightarrow 0$. Συμβολίζουμε, για συντομία,

$$\mathcal{T} := \frac{\tau}{2}M_{tt} + \frac{h^2}{12}M_{xxxx}.$$

Άρα δείξαμε ότι: $|T_i^n| \leq \mathcal{T}$.

Θεώρημα 2.3. Θεωρούμε την άμεση μέθοδο του Euler, όπως ορίζεται στις (6)–(8), και έστω u η ακριβής λύση του προβλήματος αρχικών/συννοριακών τιμών (1)–(3). Έστω ότι ο αριθμός Courant μ είναι τέτοιος ώστε $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$, για κάθε τ, h . Τότε

$$\max_{1 \leq i \leq N_x} |u(t_n, x_i) - U_i^n| \leq T_f \left(\frac{\tau}{2}M_{tt} + \frac{h^2}{12}M_{xxxx} \right), \quad \text{για } n = 1, 2, \dots, N_t. \quad (12)$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με e_i^n το σφάλμα στο σημείο x_i κατά τη χρονική στιγμή t_n . Δηλαδή

$$e_i^n := u(t_n, x_i) - U_i^n. \quad (13)$$

Προφανώς, $e_i^0 = u(t_0, x_i) - U_i^0 = u(0, x_i) - U_i^0 \stackrel{(2)}{=} u_0(x_i) - U_i^0 \stackrel{(7)}{=} 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, N_x$.

Επίσης, έχουμε ορίσει το σφάλμα συνέπειας στην (9) ως

$$\begin{aligned}
T_i^n &= \frac{u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau} - \frac{u(t_n, x_{i+1}) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_{i-1}))}{h^2} \\
\Leftrightarrow \tau T_i^n &= u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i) - \underbrace{\frac{\tau}{h^2} (u(t_n, x_{i+1}) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_{i-1})))}_{=\mu} \\
\Leftrightarrow u(t_{n+1}, x_i) &= \mu u(t_n, x_{i+1}) + (1 - 2\mu)u(t_n, x_i) + \mu u(t_n, x_{i-1}) + \tau T_i^n,
\end{aligned} \tag{14}$$

για $n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1, i = 1, 2, \dots, N_x$.

Επιπλέον, για τις προσεγγίσεις έχουμε από την (6) ότι:

$$U_i^{n+1} = \mu U_{i-1}^n + (1 - 2\mu) U_i^n + \mu U_{i+1}^n. \tag{15}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (14) και (15) και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&u(t_{n+1}, x_i) - U_i^{n+1} \\
&= \mu(u(t_n, x_{i+1}) - U_{i-1}^n) + (1 - 2\mu)(u(t_n, x_i) - U_i^n) + \mu(u(t_n, x_{i-1}) - U_{i+1}^n) + \tau T_i^n \\
&\stackrel{(13)}{\Leftrightarrow} e_i^{n+1} = \mu e_{i+1}^n + (1 - 2\mu)e_i^n + \mu e_{i-1}^n + \tau T_i^n \\
&\Rightarrow |e_i^{n+1}| = |\mu e_{i+1}^n + (1 - 2\mu)e_i^n + \mu e_{i-1}^n + \tau T_i^n| \\
&\Rightarrow |e_i^{n+1}| \leq \mu |e_{i+1}^n| + |1 - 2\mu| |e_i^n| + \mu |e_{i-1}^n| + \tau |T_i^n|.
\end{aligned}$$

Τώρα, ορίζουμε

$$E^n := \max_{1 \leq i \leq N_x} |e_i^n|.$$

Άρα, από την προηγούμενη ανισότητα, και λόγω του Λήμματος 2.1 (βλ. και Παρατήρηση 2.2), έχουμε:

$$\begin{aligned}
|e_i^{n+1}| &\leq \mu E^n + |1 - 2\mu| E^n + \mu E^n + \tau \mathcal{T} \stackrel{1-2\mu \geq 0}{=} \mu E^n + E^n - 2\mu E^n + \mu E^n + \tau \mathcal{T} \\
\Rightarrow |e_i^{n+1}| &\leq E^n + \tau \mathcal{T} \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq N_x} |e_i^{n+1}| \leq E^n + \tau \mathcal{T} \Rightarrow E^{n+1} \leq E^n + \tau \mathcal{T}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, δείξαμε ότι για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1$ ισχύει ότι:

$$E^{n+1} \leq E^n + \tau \mathcal{T}. \tag{16}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
E^n &\stackrel{(16)}{\leq} \textcolor{red}{E}^{n-1} + \tau \mathcal{T} \stackrel{(16)}{\leq} (\textcolor{red}{E}^{n-2} + \textcolor{red}{\tau \mathcal{T}}) + \tau \mathcal{T} = E^{n-2} + 2\tau \mathcal{T} \\
&\leq \dots \leq \underbrace{E^0}_{=0} + n\tau \mathcal{T} = n\tau \mathcal{T}.
\end{aligned}$$

Επομένως, δείξαμε ότι $E^n \leq n\tau \mathcal{T}$, για κάθε $n \leq N_t$. Συνεπώς,

$$E^n \leq n\tau \mathcal{T} \leq \underbrace{N_t \tau \mathcal{T}}_{=T_f \mathcal{T}} = T_f \mathcal{T} \Rightarrow E^n \leq T_f \mathcal{T}.$$

□

Παρατήρηση 2.4. Αποδείξαμε την εκτίμηση σφάλματος (12) υποθέτοντας ότι $\mu \leq \frac{1}{2}$. Όμως

$$\mu \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau \leq \frac{h^2}{2}.$$

Η σχέση αυτή είναι αρκετά περιοριστική ως προς την επιλογή του χρονικού βήματος και υποδεικνύει ότι καθώς το h μικραίνει ($h \rightarrow 0$) το χρονικό βήμα τ θα πρέπει να μικραίνει διαρκώς (ανάλογα του h^2).

Επιπλέον, η εκτίμηση (12) μας λέει ότι η άμεση μέθοδος του Euler είναι μια μέθοδος 1ης τάξης ως προς τ και 2ης τάξης ως προς h .

3 Ανάλυση ευστάθειας της άμεσης μεθόδου του Euler

Θα ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας έναν ορισμό:

Ορισμός 3.1. Αν $L > 0$ και $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που παρουσιάζει το πολύ πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών στο διάστημα $[-L, L]$, τότε ορίζουμε ως ανάπτυγμα Fourier της f τη σειρά:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

και

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τον **τύπο του Euler**: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, μπορούμε να ξαναγράψουμε το ανάπτυγμα της f σε σειρά Fourier ως εξής:

$$f(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\pi x/L}, \quad \text{όπου} \quad c_m = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-im\pi x/L} dx.$$

(Θα έχουμε ότι: $a_m = c_m + c_{-m}$ και $b_m = i(c_m - c_{-m})$.)

Συναρτήσεις της μορφής $e^{im\pi x/L}$ αναφέρονται συνήθως ως επίπεδα κύματα.

Στις διαφάνειες των παραδόσεων είδαμε ένα παράδειγμα στο οποίο από ένα χρονικό βήμα και μετά παρουσιάζονται «αριθμητικές αστάθειες» οι οποίες μάλιστα αυξάνουν με τον χρόνο. Στην παράγραφο αυτή θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε το φαινόμενο αυτό. Χάριν απλότητας, θα θεωρήσουμε την εξίσωση της θερμότητας σε όλη την ευθεία, δηλαδή το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= u_{xx}(t, x), & \text{για κάθε } t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= f(x), & \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad \text{(Αρχική συνθήκη)}$$

Για το πρόβλημα αυτό γνωρίζουμε από τη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων ότι η λύση παραμένει φραγμένη, δηλαδή $|u(t, x)| \leq C$, καθώς $t \rightarrow \infty$, για κάθε αρχική συνθήκη f τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx < +\infty$.

Τώρα, θεωρούμε ένα πλέγμα της μορφής (t_n, x_i) , $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N_t$ και $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, όπου $\tau = T_f/N_t$ και $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

Θα προσπαθήσουμε να καταλάβουμε πώς διαδίδεται η πληροφορία σε κάθε χρονικό βήμα ξεκινώντας από μια αρχική συνθήκη της μορφής e^{ikx} . Δηλαδή, η αρχική τιμή στον κόμβο $(0, x_j)$ είναι:

$$U_j^0 = e^{ikx_j} = e^{ikjh}.$$

Εφαρμόζουμε την άμεση μέθοδο του Euler, για να κάνουμε ένα βήμα στο χρόνο, και έχουμε:

$$\begin{aligned} U_j^1 &= \mu U_{j-1}^0 + (1 - 2\mu)U_j^0 + \mu U_{j+1}^0 = \mu e^{ik(j-1)h} + (1 - 2\mu)e^{ikjh} + \mu e^{ik(j+1)h} \\ &= \left(\mu e^{-ikh} + 1 - 2\mu + \mu e^{ikh} \right) e^{ikjh} = \left[1 + \mu(e^{ikh} + e^{-ikh} - 2) \right] e^{ikjh} \\ &= \left[1 + \mu(e^{ikh} + e^{-ikh} - 2) \right] U_j^0. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} e^{ikh} + e^{-ikh} - 2 &= \cos kh + i \sin kh + \cos kh - i \sin kh - 2 = 2 \cos kh - 2 \\ &= 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{kh}{2} \right) - 2 = -4 \sin^2 \frac{kh}{2}. \end{aligned}$$

Άρα δείξαμε ότι:

$$U_j^1 = \left(1 - 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2} \right) U_j^0,$$

δηλαδή στο πρώτο χρονικό βήμα η προσεγγιστική μας λύση πολλαπλασιάζεται επί τον όρο

$$\lambda = \lambda(k) = 1 - 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2}.$$

Εντελώς ανάλογα βρίσκουμε ότι στο δεύτερο χρονικό βήμα έχουμε:

$$U_j^2 = \lambda^2 e^{ikjh}.$$

Συνεχίζοντας έτσι βρίσκουμε ότι:

$$U_j^n = \lambda^n e^{ikjh}.$$

Παίρνοντας το μέτρο, και επειδή $|e^{ix}| = |\cos x + i \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$, έχουμε:

$$|U_j^n| = |\lambda^n| |e^{ikjh}| = |\lambda^n| \cdot 1 = |\lambda|^n.$$

Άρα για να παραμένουν οι προσεγγίσεις φραγμένες καθώς $n \rightarrow \infty$ (κατ' αναλογίαν με το συνεχές

πρόβλημα) θα πρέπει:

$$\begin{aligned} |\lambda| \leq 1 &\Leftrightarrow \left| 1 - 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1 - 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \underbrace{\mu \sin^2 \frac{kh}{2}}_{\in [0,1]} \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα η άμεση μέθοδος του Euler είναι ευσταθής αν και μόνον αν ο αριθμός Courant ικανοποιεί τη σχέση: $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$. □

Η μελέτη ευστάθειας με χρήση εργαλείων της ανάλυσης Fourier είναι γνωστή ως *ανάλυση von Neumann*. Τέλος, παρατηρήστε ότι θα μπορούσαμε να φτάσουμε στο ίδιο συμπέρασμα, δηλαδή ότι $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$, αν θέταμε απ' ευθείας $U_j^n = \lambda^n e^{ikjh}$ και στη συνέχεια κάναμε ένα βήμα στο χρόνο με το αριθμητικό μας σχήμα, υπολογίζαμε την τιμή του λ , και απαιτούσαμε $|\lambda| \leq 1$.