

## Σύντομη Εισαγωγή στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών  
Σχολή Μηχανικών



Μάιος 2020

## 1 Σύντομη παρουσίαση βασικών εννοιών από τα Μαθηματικά

### 1.1 Διανυσματικοί χώροι

Στην παράγραφο αυτή θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στην έννοια του διανυσματικού χώρου. Ένας από τους πιο ενδιαφέροντες διανυσματικούς χώρους είναι ο γνωστός μας χώρος  $\mathbb{R}^m$ , όπου  $m$  είναι ένας θετικός ακέραιος. Ο  $\mathbb{R}^m$  αποτελείται από όλα τα διανύσματα στήλες με  $m$  πραγματικές συνιστώσες. Γεωμετρικά, ο μονοδιάστατος χώρος  $\mathbb{R}^1$  είναι μια ευθεία, ο χώρος  $\mathbb{R}^2$  παριστάνεται με το συνηθισμένο επίπεδο όπου οι δύο συνιστώσες του διανύσματος ερμηνεύονται ως συντεταγμένες του αντίστοιχου σημείου, ενώ ο χώρος  $\mathbb{R}^3$  είναι ο γνωστός μας τριδιάστατος χώρος. Για περισσότερες από τρεις διαστάσεις είναι εξαιρετικά δύσκολο να έχουμε γεωμετρική εποπτεία, αλλά το θετικό είναι ότι η γενίκευση σε μεγαλύτερες διαστάσεις είναι απλή. Π.χ., για ένα διάνυσμα στον χώρο των 7 διαστάσεων  $\mathbb{R}^7$  το μόνο που χρειάζεται να γνωρίζουμε είναι οι επτά συνιστώσες του. Σε αυτούς τους χώρους, αλλά και σε κάθε διανυσματικό χώρο μπορούμε να ορίσουμε δύο πράξεις:

*Την πρόσθεση μεταξύ διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό αριθμών με διανύσματα.*

Γενικότερα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό του πραγματικού διανυσματικού χώρου:

**Ορισμός 1.1.** Ένα μη κενό σύνολο  $V$  θα λέγεται **πραγματικός διανυσματικός χώρος** (δ.χ.) (ή πραγματικός γραμμικός χώρος), και τα στοιχεία του (ανεξάρτητα από τη φύση τους) θα λέγονται διανύσματα, αν ορίσουμε στον  $V$  δύο αλγεβρικές πράξεις, τη διανυσματική πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό ως εξής:

- I. Η **διανυσματική πρόσθεση** αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος διανυσμάτων  $u, v$  του  $V$  ένα μοναδικό διάνυσμα του  $V$ , που λέγεται άθροισμα των  $u$  και  $v$  και συμβολίζεται  $u + v$ .
- II. Οι πραγματικοί αριθμοί καλούνται βαθμωτά μεγέθη. Ο **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** αντιστοιχεί σε κάθε πραγματικό αριθμό  $\lambda$  και σε κάθε διάνυσμα  $u \in V$  ένα μοναδικό διάνυσμα του  $V$ , που λέγεται γινόμενο των  $\lambda$  και  $u$  και συμβολίζεται  $\lambda u$ .

Από τη διανυσματική πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό απαιτούμε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες. Για οποιαδήποτε  $u, v, w \in V$  και οποιουσδήποτε  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  πρέπει

1.  $u + v = v + u$  (αντιμεταθετική ιδιότητα).
2.  $u + (v + w) = (u + v) + w$  (προσεταιριστική ιδιότητα).
3. Υπάρχει ένα μοναδικό «μηδενικό διάνυσμα»  $0$  τέτοιο ώστε  $u + 0 = u$ .
4. Υπάρχει μοναδικό διάνυσμα του  $V$  που το συμβολίζουμε με  $-u$  έτσι ώστε  $u + (-u) = 0$ .
5.  $1u = u$ .
6.  $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ .
7.  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$  (επιμεριστική ιδιότητα).
8.  $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$  (επιμεριστική ιδιότητα).

Αν στον Ορισμό 1.1 πάρουμε ως βαθμωτά μεγέθη τους μιγαδικούς αριθμούς, αντί για τους πραγματικούς, τότε θα λέμε ότι έχουμε έναν μιγαδικό διανυσματικό χώρο.

### Παραδείγματα.

1. Το σύνολο των  $2 \times 2$  πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο.
2. Το σύνολο όλων των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του 2 αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο.
3. Θα συμβολίζουμε με  $C[a, b]$  το σύνολο όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων  $f(x)$  που ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$ . Το  $C[a, b]$  (εφοδιασμένο με τη συνήθη πρόσθεση συναρτήσεων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού επί συνάρτηση) αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο. Πράγματι, αν  $f, g \in C[a, b]$  και  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ορίζουμε  $\forall x \in [a, b]$ :  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  και  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ . Ονομάζουμε μηδενική συνάρτηση αυτή που μηδενίζεται ταυτοτικά στο  $[a, b]$ , και ορίζουμε  $(-f)(x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Τότε οι ιδιότητες (1)–(8) του Ορισμού 1.1 προκύπτουν άμεσα.

**Ορισμός 1.2.** Έστω  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ,  $n$  διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου  $V$ . Τότε:

- Κάθε έκφραση της μορφής

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n, \quad \text{όπου } c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R},$$

λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** (*linear combination*) των  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ .

- Θα λέμε ότι τα διανύσματα  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** (*linearly independent*) αν η σχέση

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

ισχύει μόνον αν  $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ .

- Θα λέμε ότι τα διανύσματα  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  είναι **γραμμικώς εξαρτημένα** (*linearly dependent*) αν υπάρχουν  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , όχι όλοι ίσοι με μηδέν τέτοιои ώστε

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}. \quad (1)$$

**Ορισμός 1.3.** Έστω  $V$  ένας διανυσματικός χώρος και  $W$  ένα υποσύνολο του  $V$ . Το  $W$  λέγεται **υπόχωρος** του  $V$  αν

1. Το  $\mathbf{0} \in W$ .
2. Για κάθε  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$  και  $a, b \in \mathbb{R}$  έχουμε ότι  $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in W$ .

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ένας υπόχωρος ενός δ.χ. είναι και αυτός δ.χ.

### Παράδειγμα.

1. Θεωρούμε το σύνολο

$$C_0[a, b] = \{f \in C[a, b] : f(a) = f(b) = 0\},$$

δηλαδή το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το  $[a, b]$  που, επιπλέον, μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος  $[a, b]$ . Ο  $C_0[a, b]$  είναι υπόχωρος του  $C[a, b]$ .

2. Θεωρούμε το σύνολο

$$C_0^1[a, b] = \{f \in C^1[a, b] : f(a) = f(b) = 0\},$$

δηλαδή το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το  $[a, b]$ , οι οποίες έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο, και μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος  $[a, b]$ . Ο  $C_0^1[a, b]$  είναι και αυτός ένας διανυσματικός χώρος.

**Ορισμός 1.4.** Έστω  $V$  ένας διανυσματικός χώρος και  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$  τέτοια ώστε

1. να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και
2. κάθε  $\mathbf{v} \in V$  μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ .

Τότε το σύνολο  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  λέγεται **βάση** του  $V$  και λέμε ότι η **διάσταση** του διανυσματικού χώρου είναι  $n$  (συμβολικά  $\dim V = n$ ).

### Παρατηρήσεις.

1. Μια ισοδύναμη διατύπωση ώστε το σύνολο  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  να αποτελεί βάση του  $V$  είναι για κάθε  $v \in V$  να υπάρχουν μοναδικά  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ .
2. Ένας διανυσματικός χώρος μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές βάσεις αλλά όλες έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

**Παράδειγμα.** Θεωρήστε τον χώρο  $\mathbb{R}^3$  που τα στοιχεία του είναι διανύσματα της μορφής  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ , με  $v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$ . Το σύνολο

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια βάση του  $\mathbb{R}^3$  (τη λεγόμενη συνήθη βάση) αφού α) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (γιατί;) και β) κάθε διάνυσμα  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  του  $\mathbb{R}^3$  γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός τους μιας και

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι και τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

αποτελούν μια άλλη βάση του  $\mathbb{R}^3$  αφού και αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (γιατί;) και, επιπλέον, κάθε διάνυσμα  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  του  $\mathbb{R}^3$  γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός τους αφού

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (v_1 - v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (v_2 - v_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Παράδειγμα.** Θεωρήστε το δ.χ.  $\mathbb{P}_n$  των πολυωνύμων βαθμού  $\leq n$ , δηλαδή των πραγματικών συναρτήσεων της μορφής  $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , με  $a_i \in \mathbb{R}$ . Η συνήθης βάση του  $\mathbb{P}_n$  είναι το σύνολο

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  (δηλαδή αποτελείται από τα λεγόμενα μονώνυμα  $x^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ). Κάθε πολυώνυμο  $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , προφανώς γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του  $\mathcal{B}$ . Για να δείξουμε ότι αυτός ο τρόπος γραφής είναι μοναδικός, υποθέτουμε ότι υπάρχουν και  $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $p_n(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ . Τότε όμως θα πρέπει

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Από ένα βασικό αποτέλεσμα της Άλγεβρας γνωρίζουμε ότι ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$  έχει το πολύ  $n$  ρίζες. Όμως η σχέση (2) ικανοποιείται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , δηλαδή το πολυώνυμο  $n$ -οστού βαθμού

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n,$$

θα πρέπει να έχει άπειρες ρίζες. Επομένως, αναγκαστικά, είναι το μηδενικό πολυώνυμο, δηλαδή όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με μηδέν. Άρα  $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$  και αποδείξαμε τη μοναδικότητα.

## 1.2 Χώροι με νόρμα

Πολύ συχνά χρειάζεται να μετρήσουμε το μέγεθος ενός στοιχείου ενός δ.χ. ή την «απόσταση» δύο στοιχείων ενός δ.χ.. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μιας κατάλληλης απεικόνισης που λέγεται νόρμα.

**Ορισμός 1.5.** Έστω  $V$  ένας (πραγματικός) γραμμικός χώρος. Μια απεικόνιση

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

ονομάζεται **νόρμα**, αν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1.  $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$  και  $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$ .
2.  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \quad \forall v \in V$  και  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in V$ . (Τριγωνική ανισότητα)

### Παραδείγματα νορμών.

1. Στο χώρο  $\mathbb{R}^n$ , ορίζουμε για κάθε  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Επίσης ορίζουμε

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

και

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Αποδεικνύεται ότι οι  $\| \cdot \|_2$ ,  $\| \cdot \|_1$  και  $\| \cdot \|_\infty$  είναι πράγματι νόρμες.

2. Στο γραμμικό χώρο των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων  $C[a, b]$  ορίζουμε

$$\|\cdot\|_\infty : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f\|_\infty := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Αποδεικνύεται ότι η  $\|\cdot\|_\infty$  είναι νόρμα.

Μια άλλη νόρμα που θα μας χρειαστεί στη συνέχεια, και είναι γνωστή ως  $L^2$ -νόρμα, είναι η

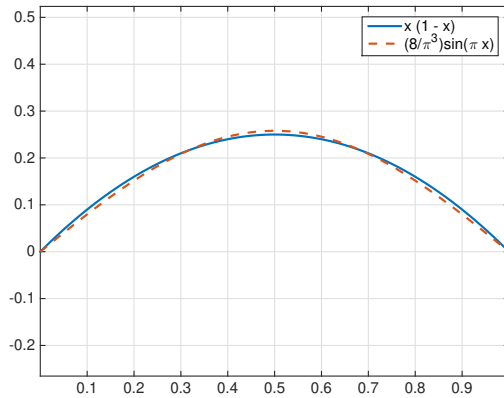
$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}. \quad (3)$$

□

Όταν υπολογίζουμε, π.χ., τη νόρμα της διαφοράς δύο συνεχών συναρτήσεων  $\|f - g\|_2$ , θα λέμε ότι η  $f$  είναι «κοντά» στην  $g$  (π.χ. η  $f$  είναι μια καλή προσέγγιση της  $g$ ) αν η νόρμα

$$\|f - g\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx},$$

είναι μικρή. Αυτό δεν σημαίνει ότι η ποσότητα  $(f(x) - g(x))^2$  είναι μικρή για κάθε  $x \in [a, b]$ , δηλαδή «σημειακά», αφού θα μπορούσε το  $(f(x) - g(x))^2$  να είναι αρκετά «μεγάλο» σε κάποια διαστήματα, αρκεί τα διαστήματα αυτά να έχουν «μικρό» μήκος. Ακριβέστερα, η  $\|f - g\|_2$  θα είναι «μικρή» αν η ποσότητα  $(f(x) - g(x))^2$  είναι «κατά μέσο όρο» μικρή στο διάστημα  $[a, b]$ .



Σχήμα 1: Οι συναρτήσεις  $f(x) = x(1-x)$ , και  $g(x) = \frac{8}{\pi^3} \sin(\pi x)$ .

**Παράδειγμα.** Θεωρήστε τις συνεχείς συναρτήσεις  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(1-x)$ , και  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{8}{\pi^3} \sin(\pi x)$ , βλ. Σχήμα1. Θέλουμε να βρούμε πόσο «απέχουν» μεταξύ τους. Τότε δεν είναι δύσκολο να υπολογίσουμε τις ακόλουθες νόρμες.

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \sqrt{\int_a^b x^2(1-x)^2 dx} = \frac{1}{30} \approx 0.1826, \\ \|f - g\|_2 &= \sqrt{\int_a^b \left(x(1-x) - \frac{8}{\pi^3} \sin(\pi x)\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{\pi^6 - 960}{30\pi^6}} \approx 0.007. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{\|f - g\|_2}{\|f\|_2} \approx 0.04.$$

□

Σε γραμμικούς χώρους με νόρμα μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια της σύγκλισης.

**Ορισμός 1.6.** Έστω  $(V, \|\cdot\|)$  ένας γραμμικός χώρος με νόρμα. Λέμε ότι η ακολουθία  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  συγκλίνει προς ένα στοιχείο  $u \in V$ , αν ισχύει  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ , καθώς  $n \rightarrow \infty$ .

### 1.3 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

**Ορισμός 1.7.** Έστω  $V$  ένας πραγματικός γραμμικός χώρος. Μια απεικόνιση  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται εσωτερικό γινόμενο στον  $V$ , αν είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της, συμμετρική και θετικά ορισμένη, δηλαδή

1.  $(u + v, w) = (u, w) + (v, w), \forall u, v, w \in V$ .
2.  $(\lambda u, v) = \lambda(u, v), \forall \lambda \in \mathbb{R}, u, v \in V$ .
3.  $(u, v) = (v, u), \forall u, v \in V$ .
4.  $(u, u) > 0, \forall u \in V \setminus \{0\}$ .

Τότε ο  $V$  λέγεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

**Ορισμός 1.8.** Έστω  $V$  ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)$ . Τα  $u, v \in V$  θα λέγονται ορθογώνια αν  $(u, v) = 0$ . (Συμβολισμός:  $u \perp v$ .)

**Λήμμα 1.1.** Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει η ανισότητα των Cauchy-Schwarz

$$\forall x, y \in X \quad |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)}.$$

**Πρόταση 1.1.** Έστω  $(V, (\cdot, \cdot))$  ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε με  $\|u\| := \sqrt{(u, u)}, u \in V$ , ορίζεται μια νόρμα στον  $V$ , η οποία λέμε ότι παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο.

**Λήμμα 1.2.** Έστω  $(X, (\cdot, \cdot))$  ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε αν  $\|\cdot\|$  είναι η νόρμα που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο (βλ. Πρόταση 1.1) ισχύουν τα εξής:

- (i)  $\forall x, y \in X: \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ . (Κανόνας του παραλληλογράμμου)
- (ii)  $\forall x, y \in X$  με  $(x, y) = 0 \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ . (Πυθαγόρειο θεώρημα)

### Παραδείγματα χώρων με εσωτερικό γινόμενο.

1. Στον  $\mathbb{R}^n$  ορίζουμε το (ευκλείδειο) εσωτερικό γινόμενο

$$(x, y) := (x, y)_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T.$$

2. Στον  $C[a, b]$  με  $(\cdot, \cdot) : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (4)$$

Το εσωτερικό γινόμενο αυτό είναι γνωστό ως  $L^2$ -εσωτερικό γινόμενο.

**Παρατήρηση.** Είδαμε ότι σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο ορίζεται πάντα μια νόρμα, η οποία παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο και ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Προσοχή όμως: Δεν είναι όλοι οι χώροι με νόρμα, χώροι εσωτερικού γινομένου.

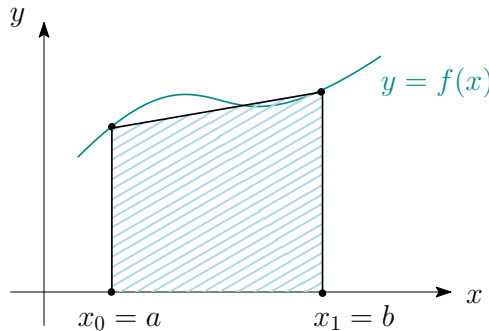
Π.χ. θεωρήστε τον  $C[0, 1]$  με τη νόρμα  $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ . Θα δείξουμε ότι η νόρμα αυτή δεν μπορεί να παραχθεί από ένα εσωτερικό γινόμενο, διότι δεν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Πάρτε, για παράδειγμα,  $f(x) = 1$  και  $g(x) = x$ , για  $x \in [0, 1]$ . Προφανώς  $f, g \in C[0, 1]$ . Έχουμε  $\|f\|_\infty = 1$  και  $\|g\|_\infty = 1$ . Όμως  $f(x) + g(x) = 1 + x$ , και άρα  $\|f + g\|_\infty = 2$ , ενώ  $f(x) - g(x) = 1 - x$ , επομένως  $\|f - g\|_\infty = 1$ . Συνεπώς  $\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 = 5$ , αλλά  $2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2 = 4$ .  $\square$

#### 1.4 Αριθμητικός υπολογισμός ολοκληρωμάτων – Η μέθοδος του τραπεζίου

Μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά μια προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  με τον ακόλουθο τύπο ολοκλήρωσης.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \quad (5)$$



Σχήμα 2: Ο τύπος του τραπεζίου.

Ο τύπος αυτός λέγεται **τύπος του τραπεζίου**. Το όνομα οφείλεται στο ότι προσεγγίζουμε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από μια καμπύλη με το εμβαδόν ενός τραπεζίου, βλ. Σχήμα 2.

Στον τύπο του τραπεζίου μπορούμε να καταλήξουμε αν προσεγγίσουμε τη συνάρτηση  $f$  με το γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής, που παρεμβάλλεται στις τιμές της  $f$  στα άκρα του διαστήματος  $a$  και  $b$ , και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε το πολυώνυμο αυτό. Μπορούμε άμεσα να ελέγξουμε ότι:

ο τύπος του τραπεζίου ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι και πρώτου βαθμού.



## 2 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα των δύο σημείων

### 2.1 Συνοριακές συνθήκες Dirichlet

Θεωρούμε και πάλι το (γνωστό μας πλέον) πρόβλημα: Αναζητούμε συνάρτηση  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, & \text{στο } [a, b], \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $q, f \in C[a, b]$ , και  $q(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

Στη συνέχεια, θα χρειαστούμε τους ακόλουθους χώρους συναρτήσεων

$$\begin{aligned} C_0[a, b] &= \{u \in C[a, b] : u(a) = u(b) = 0\}, \\ C_0^1[a, b] &= \{u \in C^1[a, b] : u(a) = u(b) = 0\}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, ορίζουμε το σύνολο  $V$  όλων των συναρτήσεων που ανήκουν στον  $C_0[a, b]$  και είναι κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμες στο  $[a, b]$ . Για να γίνουμε λίγο πιο συγκεκριμένοι, έστω ότι υπάρχει μια διαμέριση του  $[a, b]$  σε  $N + 1$  υποδιαστήματα,  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$ , τέτοια ώστε η συνάρτησή μας να έχει συνεχή παράγωγο στο  $(x_j, x_{j+1})$  που επεκτείνεται με συνεχή τρόπο στα  $[x_j, x_{j+1}]$  για κάθε  $j = 0, 1, \dots, N$ .

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (Μ.Π.Σ.) (finite element method) που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια είναι μια αποτελεσματική μέθοδος για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων σε προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η Μ.Π.Σ. μπορεί να αντιμετωπίσει προβλήματα με μεταβλητούς συντελεστές και προβλήματα που τίθενται σε χωρία πολλών διαστάσεων με ακανόνιστη γεωμετρία. Τα βασικά «συστατικά» της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι τα εξής:

1. Αναδιατυπώνουμε το πρόβλημα στη λεγόμενη *ασθενή ή μεταβολική* μορφή. Σε αυτή τη φάση το πρόβλημα τίθεται ως ένα πρόβλημα «άπειρων εξισώσεων», και οι συνοριακές συνθήκες υπεισέρχονται στη διατύπωση του προβλήματος μέσω του υποκείμενου δ.χ. συναρτήσεων.
2. Χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη μέθοδο Galerkin ώστε να «λύσουμε το πρόβλημα σ' έναν υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης». Η διαδικασία αυτή καταλήγει στην ανάγκη επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος.
3. Επιλέγουμε μια κατάλληλη βάση για τον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης έτσι ώστε ο πίνακας του γραμμικού συστήματος στο οποίο θα καταλήξουμε να είναι «αραιός» (δηλαδή τα περισσότερα στοιχεία του να είναι μηδέν).

Ας δούμε τώρα τα βήματα αυτά για το συγκεκριμένο πρόβλημα (6). Θα ξεκινήσουμε με την αναδιατύπωση του προβλήματος.

Θεωρούμε μια διαμέριση του  $[a, b]$  σε  $N + 1$  υποδιαστήματα,  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$ , και μια συνάρτηση  $v$  που ανήκει στον δ.χ.  $V$  που ορίσαμε νωρίτερα. Τα σημεία  $x_i$  θα

λέγονται *κόμβοι*, ενώ τα υποδιαστήματα  $[x_i, x_{i+1}]$  *στοιχεία*. Αρχικά πολλαπλασιάζουμε την Δ.Ε. στην (6) με μια συνάρτηση  $v \in V$ , και έχουμε:

$$-u''v + quv = fv.$$

Η  $v$  συνήθως λέγεται *δοκιμαστική συνάρτηση* (test function).

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη από  $x_j$  έως  $x_{j+1}$ , οπότε

$$-\int_{x_j}^{x_{j+1}} u''(x)v(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x)u(x)v(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)v(x) dx.$$

Κάνουμε στον πρώτο όρο ολοκλήρωση κατά μέρη (παραγοντική ολοκλήρωση) και έτσι καταλήγουμε στην:

$$\begin{aligned} & - \left[ u'(x)v(x) \right]_{x_j}^{x_{j+1}} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} u'(x)v'(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x)u(x)v(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)v(x) dx \\ \Leftrightarrow & -u'(x_{j+1})v(x_{j+1}) + u'(x_j)v(x_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} u'(x)v'(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x)u(x)v(x) dx \\ & = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή ισχύει σε κάθε διάστημα  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ . Επομένως, παίρνοντας αθροίσματα ως προς  $j$  έχουμε:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^N (-u'(x_{j+1})v(x_{j+1}) + u'(x_j)v(x_j)) + \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} u'(x)v'(x) dx \\ & + \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x)u(x)v(x) dx = \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

Επειδή η  $v$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$  από το πρώτο άθροισμα «επιζούν» μόνο ο πρώτος και ο τελευταίος όρος, οπότε

$$\begin{aligned} & -u'(x_{N+1})v(x_{N+1}) + u'(x_0)v(x_0) + \int_a^b u'(x)v'(x) dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x) dx \\ & = \int_a^b f(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι  $v(x_{N+1}) = v(b) = 0$  και  $v(x_0) = v(a) = 0$  μιας και η συνάρτηση  $v \in V$  και ο χώρος  $V$  περιέχει συναρτήσεις που μηδενίζονται στα άκρα  $a$  και  $b$  του διαστήματος  $[a, b]$ . Άρα καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\int_a^b u'(x)v'(x) dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx,$$

την οποία, αν ανακαλέσουμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου (4), μπορούμε να την γράψουμε ισοδύναμα στη μορφή

$$(u', v') + (qu, v) = (f, v).$$

Έτσι έχουμε καταφέρει να αναδιατυπώσουμε το αρχικό πρόβλημα (6) στην ακόλουθη μορφή: Αναζητούμε συνάρτηση  $u \in V$  τέτοια ώστε

$$(u', v') + (qu, v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \quad (7)$$

Η (7) λέγεται *ασθενής ή μεταβολική ή γενικευμένη* μορφή του προβλήματος.

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με  $h$  το μήκος του μεγαλύτερου υποδιαστήματος του διαμερισμού μας, δηλαδή

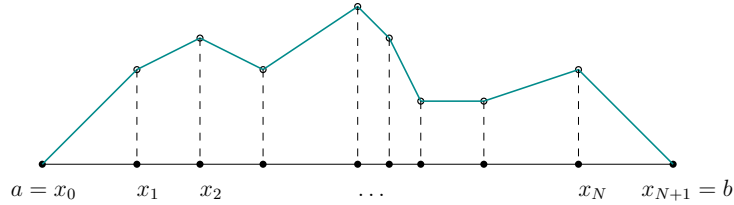
$$h = \max_{0 \leq j \leq N} (x_{j+1} - x_j).$$

Τώρα, η ιδέα της μεθόδου Galerkin/πεπερασμένων στοιχείων είναι απλή: Επιλέγουμε έναν υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης του δ.χ.  $V$ , έστω  $V_h$ , και απαιτούμε να ισχύει η (7) στον  $V_h$ . Δηλαδή, αναζητούμε  $u_h \in V_h$  τέτοια ώστε

$$(u'_h, \chi') + (qu_h, \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in V_h. \quad (8)$$

Συγκεκριμένα, θα επιλέξουμε ως υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο  $[a, b]$ , μηδενίζονται στα άκρα  $a$  και  $b$ , και ο περιορισμός τους σε κάθε υποδιάστημα  $[x_j, x_{j+1}]$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 1 (δηλαδή τον υπόχωρο των γραμμικών splines). Συμβολικά,

$$V_h = \{\varphi \in C[a, b] : \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \text{ και } \varphi|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1\}.$$



Σχήμα 3: Συνάρτηση του  $V_h$ .

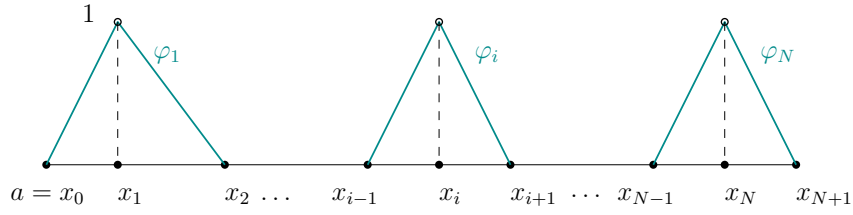
Στο Σχήμα 3 βλέπουμε πώς θα μοιάζει μια συνάρτηση που ανήκει στον  $V_h$ .

Επόμενος στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε μια βάση του χώρου  $V_h$ . Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases}$$

για  $i = 1, \dots, N$ , βλ. Σχήμα 4.

Προφανώς  $\varphi_i \in V_h$  για  $i = 1, \dots, N$  και  $\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ , για  $i, j = 1, \dots, N$ . Μπορεί κανείς εύκολα να αποδείξει ότι το σύνολο  $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$  αποτελεί βάση του  $V_h$ , άρα έχουμε ότι η διάσταση του  $V_h$  είναι ίση με  $N$ .



Σχήμα 4: Οι συναρτήσεις  $\varphi_i, i = 1, \dots, N$ .

Δεδομένου ότι  $\varphi_i \in V_h$ , και η (8) ισχύει για κάθε  $\chi \in V_h$ , έχουμε ότι

$$(u'_h, \varphi'_i) + (qu_h, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Γράφουμε την άγνωστη συνάρτηση  $u_h$  (που είναι στοιχείο του  $V_h$ ) ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης  $\mathcal{B}$ , δηλαδή

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x). \quad (10)$$

Άρα θα έχουμε προσδιορίσει μια προσέγγιση της λύσης  $u$  αν καταφέρουμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $a_j, j = 1, \dots, N$ .

Αντικαθιστούμε την (10) στην (9) και έχουμε :

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=1}^N a_j \varphi'_j, \varphi'_i \right) + (q \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^N (\varphi'_j, \varphi'_i) a_j + \sum_{j=1}^N (q \varphi_j, \varphi_i) a_j = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^N [(\varphi'_j, \varphi'_i) + (q \varphi_j, \varphi_i)] a_j = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

Δηλαδή, καταλήξαμε σε ένα  $N \times N$  γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (12)$$

όπου

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}, \quad \text{με } F_i = (f, \varphi_i),$$

και  $\mathbf{A}$  είναι ένας  $N \times N$  πίνακας που μπορεί να γραφεί ως άθροισμα των πινάκων  $\mathbf{S}, \mathbf{M}$ , με στοιχεία  $A_{ij} = S_{ij} + M_{ij}$ , όπου

$$S_{ij} = (\varphi'_j, \varphi'_i), \quad \text{και} \quad M_{ij} = (q \varphi_j, \varphi_i), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Ο πίνακας  $\mathbf{S}$  είναι γνωστός ως πίνακας ακαμψίας (*stiffness matrix*), ενώ ο πίνακας  $\mathbf{M}$  ως πίνακας μάζας (*mass matrix*).

Αποδεικνύεται ότι το γραμμικό σύστημα (12) έχει μοναδική λύση. Σημειώστε ότι ο πίνακας  $A$  είναι συμμετρικός ( $A_{ij} = A_{ji}$ ) και θετικά ορισμένος ( $x^T A x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$ ). Επιπλέον, ο  $A$  είναι αραιός, συγκεκριμένα είναι τριδιαγώνιος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις βάσης  $\varphi_i$  λαμβάνουν μη μηδενικές τιμές μόνο στο διάστημα  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ . Οι λεπτομέρειες θα γίνουν σαφέστερες στο επόμενο παράδειγμα.

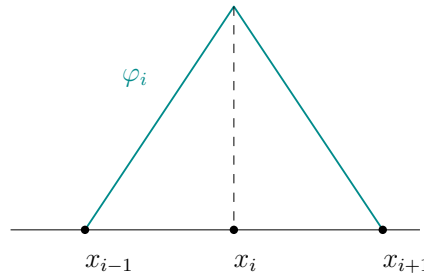
**Παράδειγμα.** Θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$ , με βήμα  $h = (b - a)/(N + 1)$ . Δηλαδή, οι κόμβοι είναι:  $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N + 1$ . Τότε οι συναρτήσεις βάσης παίρνουν τη μορφή

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases}$$

και οι παράγωγοί τους είναι ίσες με

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ -\frac{1}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία των πινάκων μάζας και ακαμψίας, δηλαδή τα  $S_{ij} = (\varphi'_j, \varphi'_i)$  και  $M_{ij} = (q\varphi_j, \varphi_i)$ .



Σχήμα 5: Η συνάρτηση  $\varphi_i$ .

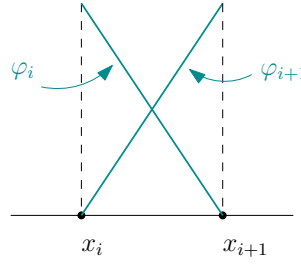
**1η περίπτωση:  $j = i$ , (βλ. Σχήμα 5).**

$$S_{ii} = \int_a^b \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx = \frac{2h}{h^2} = \frac{2}{h}.$$

$$M_{ii} = \int_a^b q(x) \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) \left( \frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \left( \frac{x_{i+1} - x}{h} \right)^2 dx.$$

Προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα αυτά με τον τύπο του τραπεζίου και έχουμε:

$$M_{ii} \approx \frac{1}{2} h (q(x_i) + 0) + \frac{1}{2} h (0 + q(x_i)) = h q(x_i).$$



Σχήμα 6: Οι συναρτήσεις  $\varphi_i$  και  $\varphi_{i+1}$  στο  $[x_i, x_{i+1}]$ .

**2η περίπτωση:  $j = i + 1$ , (βλ. Σχήμα 6).**

$$S_{i,i+1} = \int_a^b \varphi'_i(x) \varphi'_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{h} \right) dx = -\frac{1}{h}.$$

$$M_{i,i+1} = \int_a^b q(x) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \frac{x_{i+1} - x}{h} \cdot \frac{x - x_i}{h} dx \stackrel{(5)}{=} 0.$$

**3η περίπτωση:  $j = i - 1$ .** Η περίπτωση αυτή είναι εντελώς ανάλογη με την προηγούμενη, άρα

$$S_{i,i-1} = -\frac{1}{h}, \quad M_{i,i-1} = 0.$$

Παρατηρήστε ότι το  $(i, j)$  στοιχείο και των δύο πινάκων για  $|i - j| \geq 2$  είναι προφανώς μηδέν, άρα ο πίνακας  $A$  είναι τριδιαγώνιος.

Ας δούμε τώρα πώς υπολογίζουμε τα στοιχεία του διανύσματος  $\mathbf{F}$  που βρίσκεται στο δεύτερο μέλος του γραμμικού συστήματος (12). Έχουμε

$$\begin{aligned} F_i &= \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \frac{x - x_{i-1}}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \frac{x_{i+1} - x}{h} dx. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα αυτά με τον τύπο του τραπεζίου και έχουμε:

$$F_i \approx \frac{h}{2} \left( f(x_i) \cdot \frac{h}{h} + 0 \right) + \frac{h}{2} \left( 0 + f(x_i) \cdot \frac{h}{h} \right) = h f(x_i).$$

Άρα καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα  $A\mathbf{a} = \mathbf{F}$  με

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h} + hq(x_1) & -\frac{1}{h} & & & \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} + hq(x_2) & -\frac{1}{h} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} + hq(x_{N-1}) & -\frac{1}{h} \\ & & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} + hq(x_N) \end{pmatrix}$$

και  $\mathbf{F} = (hf(x_1), hf(x_2), \dots, hf(x_{N-1}), hf(x_N))^T$ .

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με  $h$ , το σύστημα γράφεται στη μορφή  $\tilde{A}a = \tilde{F}$  με

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 & & & \\ -1 & 2 + h^2 q(x_2) & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 + h^2 q(x_{N-1}) & -1 \\ & & & -1 & 2 + h^2 q(x_N) \end{pmatrix} \quad (14)$$

και  $\tilde{F} = (h^2 f(x_1), h^2 f(x_2), \dots, h^2 f(x_{N-1}), h^2 f(x_N))^T$ .

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση του ομοιόμορφου διαμερισμού, αν προσεγγίσουμε τα ολοκληρώματα με τη μέθοδο του τραπεζίου, καταλήγουμε στο ίδιο ακριβώς γραμμικό σύστημα με εκείνο της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών που μελετήσαμε για το ίδιο πρόβλημα.  $\square$

Τώρα, όσον αφορά το σφάλμα της μεθόδου, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι αν  $u \in C^2[a, b]$  είναι λύση του (6) και  $u_h \in V_h$  είναι λύση του (8), τότε υπάρχει σταθερά  $C$  ανεξάρτητη των  $u$  και  $h$ , τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \|u' - u'_h\| &\leq C h \|u''\|, \\ \|u - u_h\| &\leq C h^2 \|u''\|. \end{aligned}$$

Η νόρμα που εμφανίζεται σε αυτές τις εκτιμήσεις είναι η  $L^2$ -νόρμα (3).

## 2.2 Συνοριακές συνθήκες Neumann

Θεωρούμε τώρα το αντίστοιχο πρόβλημα δύο σημείων με συνοριακές συνθήκες Neumann.

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, & \text{στο } [a, b], \\ u'(a) = u'(b) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $q, f \in C[a, b]$ , και  $q(x) \geq q^* > 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

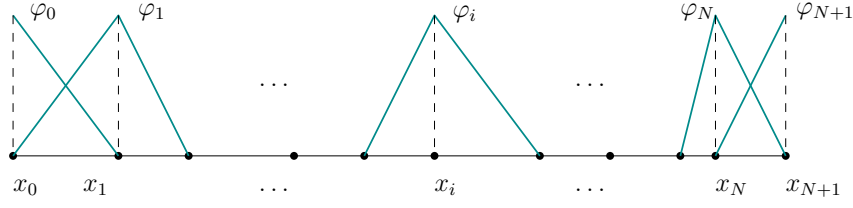
Τώρα ορίζουμε τον χώρο  $\tilde{V}$  όλων των συναρτήσεων που ανήκουν στον  $C[a, b]$  και είναι κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμες στο  $[a, b]$  (δηλαδή δεν απαιτούμε πλέον να μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος  $[a, b]$ ). Εργαζόμενοι όπως πριν πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της Δ.Ε. με μια δοκιμαστική συνάρτηση  $v \in \tilde{V}$ , ολοκληρώνουμε, μετά κάνουμε ολοκλήρωση κατά μέρη στον όρο  $-\int u''v$ , και καταλήγουμε στην ασθενή μορφή του προβλήματος

$$(u', v') + (qu, v) = (f, v), \quad \forall v \in \tilde{V}. \quad (16)$$

Παρατηρήστε ότι η μόνη διαφορά με πριν είναι ότι τώρα οι συναρτήσεις μας ανήκουν σε διαφορετικό χώρο (στον  $\tilde{V}$  και όχι στον  $V$ ).

Θεωρούμε και τον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης

$$\tilde{V}_h = \{\varphi \in C[a, b] : \varphi|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1\},$$



Σχήμα 7: Οι συναρτήσεις  $\varphi_i, i = 0, 1, \dots, N + 1$  για το πρόβλημα Neumann.

και παίρνουμε ως συναρτήσεις βάσης τις συναρτήσεις «στέγης»  $\varphi_i$ , όπου όμως τώρα προσθέτουμε δύο επιπλέον συναρτήσεις βάσης, τις  $\varphi_0$  και  $\varphi_{N+1}$ , βλ. Σχήμα 7. Το σύνολο  $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N+1}$  αποτελεί βάση του  $\tilde{V}_h$ , ο οποίος τώρα έχει διάσταση  $N + 2$ .

Το αντίστοιχο διακριτό πρόβλημα του (16) είναι ότι αναζητούμε  $u_h \in \tilde{V}_h$  τέτοια ώστε

$$(u'_h, \chi') + (qu_h, \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in \tilde{V}_h. \quad (17)$$

Παίρνουμε

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} a_j \varphi_j(x),$$

και  $\chi = \varphi_i, i = 0, 1, \dots, N + 1$ , και όπως πριν καταλήγουμε σε ένα  $(N + 2) \times (N + 2)$  γραμμικό σύστημα για τους άγνωστους συντελεστές  $a_j, j = 0, 1, \dots, N + 1$ . Αποδεικνύεται ότι κάτω από τις υποθέσεις που βάλουμε για τις  $f$  και  $q$ , και το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση.

**Παρατήρηση.** Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε υπόχωρους πεπερασμένων στοιχείων που αποτελούνται από κατά τμήματα πολωνυμικές συναρτήσεις (splines) υψηλότερου βαθμού  $r$ , με  $r$  ακέραιο ( $\geq 2$ ). (Π.χ., για  $r = 3$  έχουμε κυβικές splines.) Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πάρουμε προσεγγίσεις Galerkin/πεπερασμένων στοιχείων με σφάλμα  $\|u - u_h\|$  της τάξης  $O(h^{r+1})$ .

### 3 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων σε δύο διαστάσεις

#### 3.1 Στοιχεία από τον Διανυσματικό Λογισμό

Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε το λεγόμενο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού που είναι το ακόλουθο:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Το ανάλογο αποτέλεσμα σε δύο διαστάσεις είναι το *Θεώρημα της Απόκλισης* (Divergence Theorem). Αν  $\Omega$  είναι ένα χωρίο στον  $\mathbb{R}^2$  με λείο ή κατά τμήμα λείο σύνορο  $\partial\Omega$ , και  $F$  είναι ένα (αρκούντως ομαλό) διανυσματικό πεδίο στο  $\overline{\Omega}$ , τότε

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \int_{\partial\Omega} F \cdot n, \quad (18)$$

όπου  $n$  είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο  $\partial\Omega$  και είναι μια συνάρτηση του  $(x, y) \in \partial\Omega$ . Παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (18) είναι ένα διπλό ολοκλήρωμα, ενώ αυτό στο δεξί μέλος είναι ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.



Υπενθυμίζουμε το συμβολισμό μας:

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u.$$

Επιπλέον, θα μας χρειαστεί ο τύπος του Green, που είναι το ανάλογο της ολοκλήρωσης κατά μέρη σε περισσότερες διαστάσεις.

Στις πολλές διαστάσεις ισχύει ο ακόλουθος «τύπος του γινομένου»

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u. \quad (19)$$

Τώρα, ο τύπος του Green προκύπτει αν ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της (19) πάνω στο  $\Omega$  και, μετά, χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της απόκλισης.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u \\ \stackrel{(18)}{\Rightarrow} \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u \\ \Rightarrow \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u \\ \Rightarrow - \int_{\Omega} v \Delta u &= - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u. \end{aligned} \quad (20)$$

### 3.2 Το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Poisson

Ας θεωρήσουμε τώρα την εξίσωση Poisson με σ.σ. Dirichlet σε ένα φραγμένο χωρίο  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = 0 & \text{για κάθε } (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (21)$$

όπου  $f$  είναι δοσμένη συνάρτηση.

Όπως και στην περίπτωση της μίας διάστασης θα θεωρήσουμε έναν κατάλληλο χώρο  $V$ , στον οποίο ανήκουν συναρτήσεις  $v$  που είναι παραγωγίσιμες στο  $\Omega$  και ικανοποιούν συνθήκες Dirichlet  $v = 0$  στο σύνορο  $\partial\Omega$ .

Για να διατυπώσουμε το πρόβλημα στη λεγόμενη ασθενή μορφή επαναλαμβάνουμε τα βήματα που κάναμε στην περίπτωση της μιας διάστασης. Συγκεκριμένα, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση  $-\Delta u = f$  με μια δοκιμαστική συνάρτηση  $v \in V$  και παίρνουμε

$$-\Delta u v = f v.$$

Ολοκληρώνουμε πάνω στο  $\Omega$ , εφαρμόζουμε τον τύπο του Green, και έχουμε:

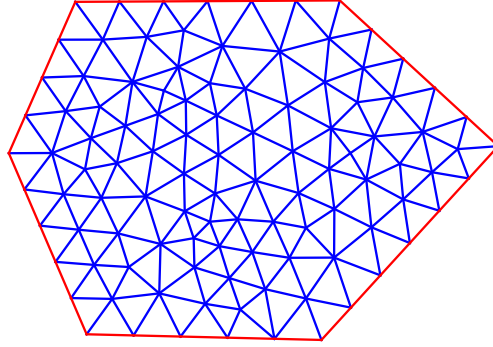
$$- \int_{\Omega} \Delta u v = \int_{\Omega} f v \stackrel{(20)}{\Rightarrow} - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v.$$

Επειδή το  $v \in V$ , έχουμε ότι η  $v = 0$  στο σύνορο  $\partial\Omega$ , άρα το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με μηδέν. Έτσι καταλήγουμε στην ασθενή μορφή του προβλήματος:

Αναζητούμε  $u \in V$  τέτοια ώστε

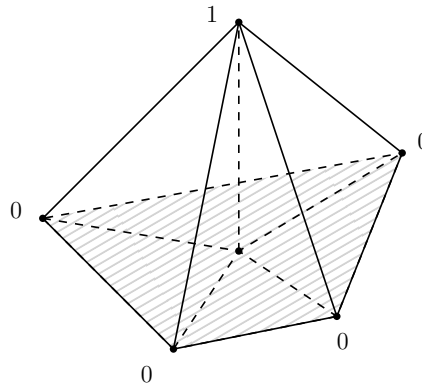
$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in V. \quad (22)$$

Για να κατασκευάσουμε έναν κατάλληλο υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης του  $V$ , έστω  $V_h$ , θεωρούμε έναν διαμερισμό  $\mathcal{T}_h$  του  $\Omega$  σε ένα πεπερασμένο πλήθος τριγώνων  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_t$ , με μήκος της μεγαλύτερης πλευράς κάθε τριγώνου ίσο με  $h_i$ . Έστω  $h = \max_{1 \leq i \leq N_t} h_i$ . Από εδώ και στο εξής τα τρίγωνα θα αναφέρονται ως *στοιχεία* και το σύνολο όλων των τριγώνων  $\tau \in \mathcal{T}_h$  ως *πλέγμα*. Οι κορυφές των τριγώνων θα λέγονται *κόμβοι*. Υποθέτουμε ότι ο τριγωνισμός μας έχει  $N$  εσωτερικούς κόμβους τους οποίους αριθμούμε (αυθαίρετα) από  $1, \dots, N$ .



Σχήμα 8: Παράδειγμα τριγωνισμού ενός πολυγωνικού χωρίου  $\Omega$ .

Θεωρούμε τώρα τον υπόχωρο  $V_h$  των συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο  $\Omega$  και είναι γραμμικά πολυώνυμα σε κάθε στοιχείο  $\tau \in \mathcal{T}_h$ . Ορίζουμε ως συναρτήσεις βάσης του  $V_h$  τις συναρτήσεις «πυραμίδες»  $\varphi_i$  που είναι γραμμικά πολυώνυμα σε κάθε τρίγωνο και παίρνουν την τιμή 1 στον  $i$ -κόμβο και την τιμή 0 σε όλους τους άλλους, βλ. Σχήμα 9.



Σχήμα 9: Συνάρτηση βάσης του χώρου  $V_h$ .

Επομένως, κάθε συνάρτηση  $\chi \in V_h$  που είναι συνεχής στο  $\Omega$  και γραμμική σε κάθε στοιχείο  $\tau \in \mathcal{T}_h$

μπορούμε πλέον να την γράφουμε ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης, δηλαδή υπάρχουν  $w_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , τέτοια ώστε

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(x), \quad x \in \Omega.$$

(Είναι άμεσο να διαπιστώσει κανείς ότι για κάθε  $i = 1, 2, \dots, N$ , ο συντελεστής  $w_i$  είναι το «ύψος» της συνάρτησης  $\chi$  στον  $i$ -κόμβο, δηλαδή  $w_i = \chi(x_i)$ .)

Τώρα, αντί για να λύσουμε το πρόβλημα (22), θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα στον χώρο πεπερασμένης διάστασης  $V_h$ :

Αναζητούμε  $u_h \in V_h$  τέτοια ώστε

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \chi = \int_{\Omega} f \chi, \quad \forall \chi \in V_h. \quad (23)$$

Αυτή είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Κάθε πλέγμα, μαζί με τις αντίστοιχες συναρτήσεις βάσης στους κόμβους, λέγεται πεπερασμένο στοιχείο. Προφανώς υπάρχουν πολλές διαφορετικές επιλογές πλέγματος και συναρτήσεων βάσης οι οποίες οδηγούν σε διαφορετικές μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων.

Στη συνέχεια, αφού κάθε  $\chi \in V_h$  μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης μπορούμε, ισοδύναμα, να γράψουμε την (23) στη μορφή

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i = \int_{\Omega} f \varphi_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (24)$$

Επιπλέον, αφού και η  $u_h \in V_h$ , υπάρχουν  $u_j \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x),$$

επομένως το πρόβλημα (24) γίνεται:

Αναζητούμε  $u_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  τέτοια ώστε

$$\sum_{j=1}^N \left( \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \right) u_j = \int_{\Omega} f \varphi_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (25)$$

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα  $N$  εξισώσεων με  $N$  αγνώστους που μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως

$$A \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (26)$$

όπου τα στοιχεία του  $N \times N$  πίνακα  $A = (a_{ij})$  και του διανύσματος  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)^T$  είναι

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i, \quad f_i = \int_{\Omega} f \varphi_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

αντίστοιχα. Άρα για να υπολογίσουμε μια προσεγγιστική λύση  $u_h \in V_h$  αρκεί να λύσουμε το γραμμικό σύστημα (26).

**Παράδειγμα.** Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Poisson στο μοναδιαίο τετράγωνο  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y) & \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ u(x, y) = 0 & \text{για κάθε } (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (27)$$

όπου

$$f(x, y) = 2(1 - 4\pi^2) \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{x-y} - 4\pi \sin(2\pi(x - y)) e^{x-y}.$$

(Για το πρόβλημα αυτό η ακριβής λύση είναι  $u(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{x-y}$ .) Στο Σχήμα 10, πάνω αριστερά, βλέπουμε τον τριγωνισμό που χρησιμοποιείται για να λύσουμε προσεγγιστικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων το πρόβλημα (27). Στην πάνω δεξιά εικόνα απεικονίζεται η προσεγγιστική λύση με τη μορφή ισοϋψών καμπυλών σε χρωματική κλίμακα, ενώ στην εικόνα στην κάτω γραμμή βλέπουμε την τριδιάστατη απεικόνιση της προσεγγιστικής λύσης.

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για ένα «λεπτότερο» τριγωνισμό του  $\Omega$  φαίνονται στο Σχήμα 11.

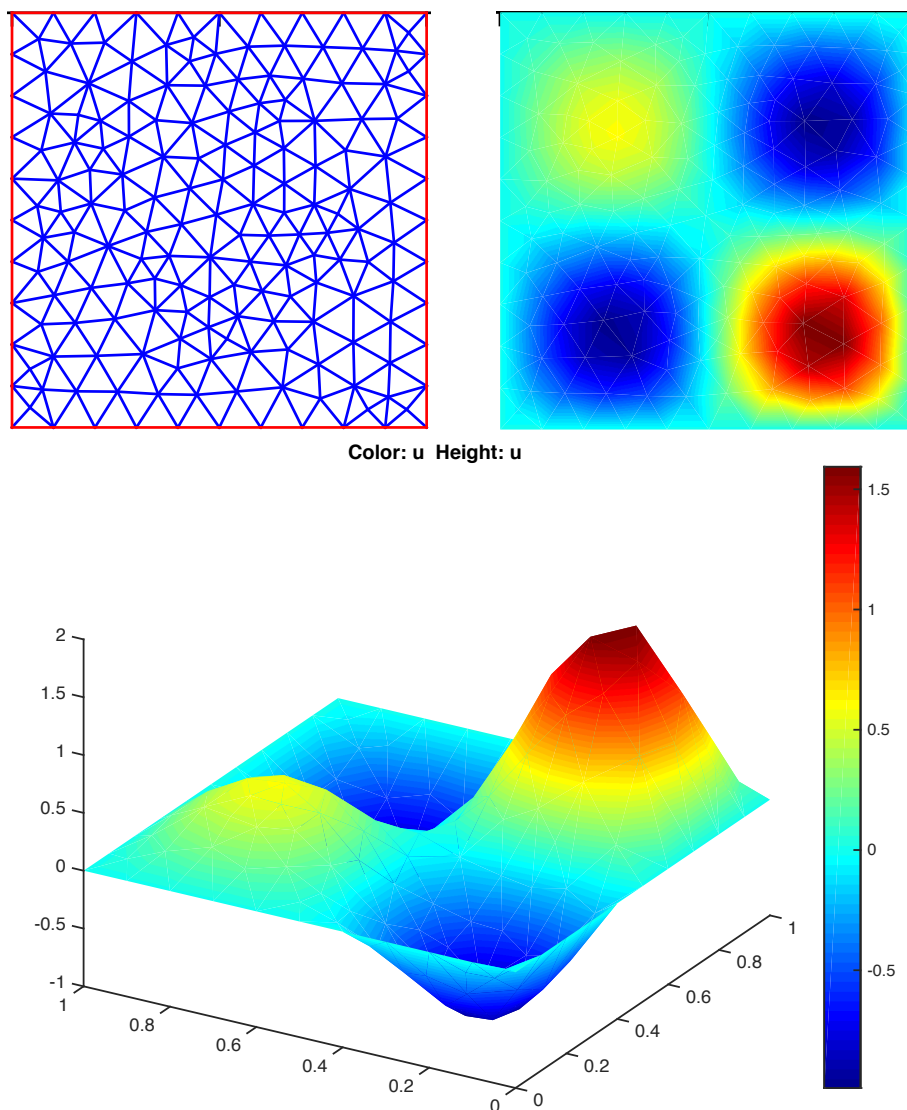
## Αναφορές - Περαιτέρω διάβασμα

Για μια εισαγωγή στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με μεγαλύτερη έμφαση στην κατανόηση πρακτικών θεμάτων σχετικά με την υλοποίηση των μεθόδων μπορείτε να συμβουλευτείτε το βιβλίο: M.S. Gockenbach, *Understanding and Implementing the Finite Element Method*, SIAM, 2006.

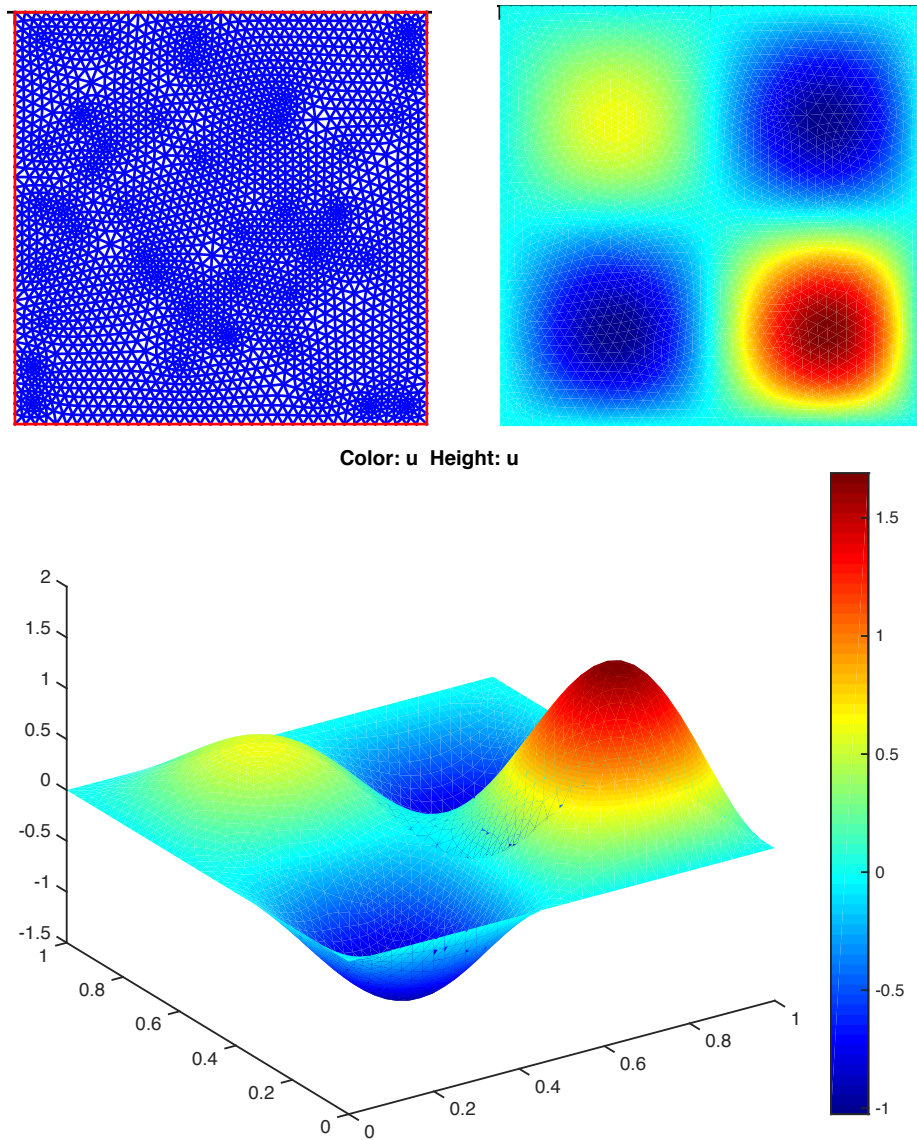
Κλασσική αναφορά αποτελεί το βιβλίο: T.R. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover, 2000.

Για μια πολύ συστηματική εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων παραπέμπουμε στις σημειώσεις παραδόσεων του B.A. Δουγαλή, *Finite Element Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations (Revised 2013)*.

[http://scholar.uoa.gr/sites/default/files/doug/files/fe\\_notes\\_current.pdf](http://scholar.uoa.gr/sites/default/files/doug/files/fe_notes_current.pdf)



Σχήμα 10: Προσέγγιση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα (27) με τον τριγωνισμό του  $\Omega$  που φαίνεται στο πάνω αριστερά σχήμα.



Σχήμα 11: Προσέγγιση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα (27) με τον τριγωνισμό του  $\Omega$  που φαίνεται στο πάνω αριστερά σχήμα (λεπτότερος τριγωνισμός).