

# Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών  
Σχολή Μηχανικών



Μάϊος 2023

Σε προηγούμενα κεφάλαια είδαμε πώς ολοκληρώνουμε συναρτήσεις δύο ή τριών μεταβλητών πάνω σε χωρία του  $\mathbb{R}^2$  και του  $\mathbb{R}^3$ , αντίστοιχα. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με ολοκλήρωση βαθμωτών συναρτήσεων και διανυσματικών πεδίων πάνω σε καμπύλες.

## 1 Επικαμπύλια ολοκληρώματα

### 1.1 Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής συνάρτησης

Έστω  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια  $C^1$  τροχιά<sup>1</sup> στον χώρο με παραμετρική αναπαράσταση  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , και  $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχής συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού  $A$  περιέχει την εικόνα της  $\mathbf{r}$  (έτσι ώστε να ορίζεται η σύνθεση  $f(\mathbf{r}(t))$ ). Στη συνέχεια, θα ορίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της βαθμωτής συνάρτησης  $f$  ως το όριο κατάλληλων αθροισμάτων Riemann.

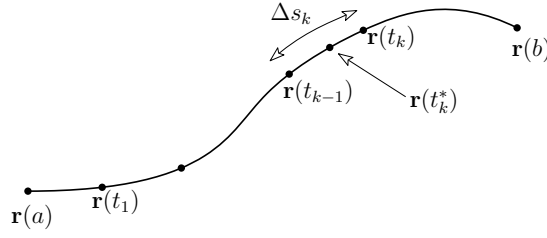
Αρχικά, διαμερίζουμε το διάστημα  $[a, b]$  σε αρκετά μικρά διαδοχικά υποδιαστήματα με τη βοήθεια μιας επιλογής διαδοχικών σημείων

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b,$$

και επιλέγουμε ένα αυθαίρετο σημείο  $t_k^*$  στο  $k$ -υποδιάστημα  $[t_{k-1}, t_k]$ . Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε και μια διαμέριση της τροχιάς  $\mathbf{r}$  σε μικρότερα τόξα, βλ. Σχήμα 1, όπου έστω ότι το μήκος του  $k$ -οστού μικρού τόξου είναι ίσο με  $\Delta s_k$ .

---

<sup>1</sup>Με τον όρο  $C^1$  εννοούμε ότι η συνάρτηση  $\mathbf{r}$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, δηλαδή είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι και αυτή συνεχής.



Σχήμα 1: Η τροχιά  $\mathbf{r}$  διαμερίζεται σε μικρά τόξα από  $t = a$  έως  $t = b$ . Το μήκος του  $k$ -οστού μικρού τόξου είναι  $\Delta s_k$ .

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος αυτό μέσω του τύπου<sup>2</sup>

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathbf{r}'(t)\| dt, \quad (1)$$

όπου με το σύμβολο  $\|\cdot\|$  θα συμβολίζουμε στο κεφάλαιο αυτό το μέτρο ενός διανύσματος. (Επομένως, εδώ  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ .)

Τώρα σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\mathbf{r}(t_k^*)) \Delta s_k. \quad (2)$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα,<sup>3</sup> υπάρχει ένα σημείο  $t_k^{**} \in [t_{k-1}, t_k]$ , τέτοιο ώστε

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \underbrace{(t_k - t_{k-1})}_{\Delta t_k} \|\mathbf{r}'(t_k^{**})\| = \|\mathbf{r}'(t_k^{**})\| \Delta t_k.$$

(Έχουμε συμβολίσει με  $\Delta t_k$  το μήκος  $t_k - t_{k-1}$ .) Δεδομένου ότι το  $t_k^*$  είναι ένα αυθαίρετο σημείο στο διάστημα  $[t_{k-1}, t_k]$ , επιλέγουμε  $t_k^* = t_k^{**}$ , οπότε η (2) γράφεται ως εξής:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\mathbf{r}(t_k^*)) \Delta s_k = \sum_{k=1}^n f(\mathbf{r}(t_k^{**})) \|\mathbf{r}'(t_k^{**})\| \Delta t_k.$$

Βεβαίως ανάλογα με το πώς διαμερίζουμε την τροχιά μπορούμε να πάρουμε διαφορετικές τιμές για το  $S_n$ . Επειδή όμως η  $\mathbf{r}$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ( $C^1$ ) και η  $f$  είναι συνεχής, τα αθροίσματα  $S_n$  προσεγγίζουν κάποιο όριο καθώς το  $n$  αυξάνει και τα  $\Delta t_k$  τείνουν στο μηδέν. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό:

<sup>2</sup>Βλ., π.χ., τις σημειώσεις στα Μαθηματικά Ι σχετικά με το ολοκλήρωμα Riemann, Παράγραφος 6.2.

<sup>3</sup>Υπενθύμιση: Θ.Μ.Τ. για ολοκληρώματα. Αν  $f$  συνεχής, τότε  $\exists \xi \in [a, b]$  τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi).$$

**Ορισμός 1.1.** Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής συνάρτησης  $f$  κατά μήκος της τροχιάς  $\mathbf{r}$  ορίζεται όταν η  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι  $C^1$  και η σύνθετη συνάρτηση  $f(\mathbf{r}(t))$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$ . Το ολοκλήρωμα αυτό συμβολίζεται

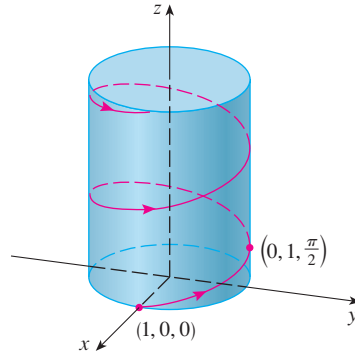
$$\int_{\mathbf{r}} f \, ds,$$

και ορίζεται μέσω της

$$\int_{\mathbf{r}} f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt.$$

Παρατηρήστε ότι αν  $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ , τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα εκφράζει, προφανώς, το μήκος της τροχιάς  $\mathbf{r}(t)$ .

**Παράδειγμα 1.1.** Έστω  $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , η έλικα  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$  (βλ. Σχήμα 2) και  $f(x, y, z) = xy + z$ .



Σχήμα 2: Η έλικα του Παραδείγματος 1.1 (από THOMAS Απειροστικός Λογισμός, ΠΕΚ 2018).

Θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbf{r}} f \, ds = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt.$$

Καταρχήν  $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ , και  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .

Επιπλέον,  $f(\mathbf{r}(t)) = \cos t \sin t + t = \frac{1}{2} \sin 2t + t$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} f(x, y, z) \, ds &= \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \sin 2t + t \right) \sqrt{2} \, dt \\ &= \sqrt{2} \left( \left[ -\frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^{2\pi} + \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} \right) = 2\sqrt{2}\pi^2. \end{aligned}$$

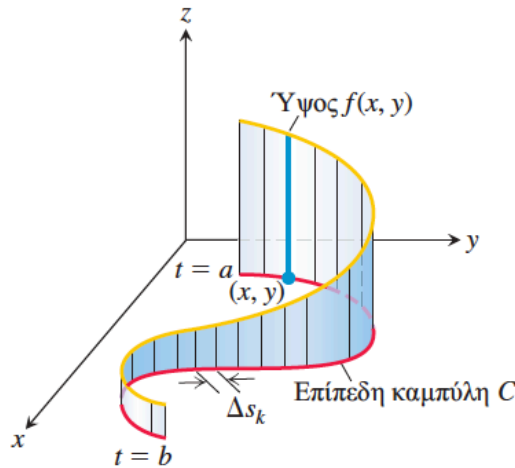
□

### Παρατηρήσεις:

1. Αν μια κατά τμήματα  $C^1$  τροχιά  $\mathbf{r}$  αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος τροχιών  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  που τις έχουμε ενώσει μια προς μία στα άκρα τους, τότε

$$\int_{\mathbf{r}} f ds = \int_{\mathbf{r}_1} f ds + \dots + \int_{\mathbf{r}_n} f ds.$$

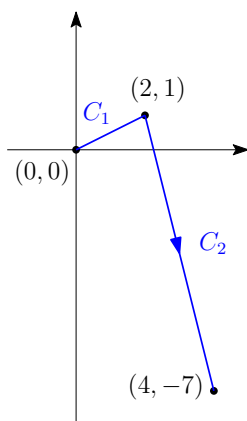
2. Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα για τροχιές που ανήκουν στο επίπεδο επιδέχονται την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία. Έστω  $C$  μια καμπύλη στο επίπεδο με παραμετρική αναπαράσταση  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , και  $z = f(x, y)$  μια μη αρνητική συνεχή συνάρτηση ορισμένη σε ένα χωρίο του επιπέδου που περιέχει την καμπύλη  $C$ . Άρα η γραφική παράσταση της  $f$  είναι μια επιφάνεια που βρίσκεται πάνω από το  $xy$ -επίπεδο. Σχηματίζουμε το καμπύλο «τοιχίο» που στηρίζεται στην καμπύλη  $C$ , είναι κάθετο στο επίπεδο, και σε κάθε σημείο  $(x, y)$  της καμπύλης το ύψος του είναι  $f(x, y)$ , βλ. Σχήμα 3. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int_{\mathbf{r}} f ds$  εκφράζει το εμβαδόν του τοιχίου που φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 3: Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int_{\mathbf{r}} f ds$  εκφράζει το εμβαδόν του «τοιχίου» κάτω από την  $z = f(x, y) \geq 0$  (από THOMAS Απειροστικός Λογισμός, ΠΕΚ 2018).

3. Αν η  $\mathbf{r}$  δεν είναι  $C^1$ , αλλά είναι κατά τμήματα  $C^1$  (δηλαδή μπορούμε να χωρίσουμε το  $[a, b]$  σε ένα πεπερασμένο πλήθος υποδιαστημάτων όπου σε καθένα από αυτά η  $\mathbf{r}$  είναι  $C^1$ ), τότε μπορούμε και πάλι να ορίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int_{\mathbf{r}} f ds$  «χωρίζοντάς» το κατάλληλα. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε αν η  $f(\mathbf{r}(t))$  είναι μόνον κατά τμήματα συνεχής στο  $[a, b]$ .

**Παράδειγμα 1.2.** Έστω  $f(x, y) = y - x$  και  $\mathbf{r} : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$  η επίπεδη τροχιά με παραμετρική αναπαράσταση  $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (2t, t), & 0 \leq t \leq 1 \\ (t+1, 5-4t), & 1 < t \leq 3. \end{cases}$



Σχήμα 4: Η κατά τμήματα  $C^1$  τροχιά του Παραδείγματος 1.2,

Τότε:  $\int_{\mathbf{r}} f \, ds = \int_{\mathbf{r}_1} f \, ds + \int_{\mathbf{r}_2} f \, ds$ , με

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= (2t, t), & \mathbf{r}'_1(t) &= (2, 1), & \|\mathbf{r}'_1(t)\| &= \sqrt{5}, \\ \mathbf{r}_2(t) &= (t+1, 5-4t), & \mathbf{r}'_2(t) &= (1, -4), & \|\mathbf{r}'_2(t)\| &= \sqrt{17}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}_1} f \, ds &= \int_0^1 f(\mathbf{r}_1(t)) \|\mathbf{r}'_1(t)\| dt = \int_0^1 (t-2t) \sqrt{5} \, dt = -\sqrt{5} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \\ \int_{\mathbf{r}_2} f \, ds &= \int_1^3 f(\mathbf{r}_2(t)) \|\mathbf{r}'_2(t)\| dt = \int_1^3 (5-4t-t-1) \sqrt{17} \, dt = -12\sqrt{17}. \end{aligned}$$

Επομένως,  $\int_{\mathbf{r}} f \, ds = -\frac{\sqrt{5}}{2} - 12\sqrt{17}$ . □

## 1.2 Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς ολοκληρώνουμε ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μιας τροχιάς. Έστω, και πάλι,  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια  $C^1$  τροχιά, και  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο του οποίου το πεδίο ορισμού  $A$  περιέχει την εικόνα της  $\mathbf{r}$  (έτσι ώστε να ορίζεται η σύνθεση  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ ). Τότε έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 1.2.** Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$  κατά μήκος της  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  συμβολίζεται  $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ , και ορίζεται μέσω της

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt.$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου συχνά αναφέρεται ως *επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους* για να διακρίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης, βλ. Ορισμό 1.1.

Παρατηρήστε ότι στον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος  $\int_r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  το διαφορικό  $d\mathbf{s}$  θα πρέπει να ερμηνεύεται ως μια διανυσματική ποσότητα (το «διαφορικό» της θέσης κατά μήκος της τροχιάς).

**Παράδειγμα 1.3.** Έστω  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  το ακτινικό διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , και  $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\mathbf{r}(t) = (t, 3t^2, 2t^3)$ . Τότε  $\mathbf{r}'(t) = (1, 6t, 6t^2)$ , επομένως έχουμε:

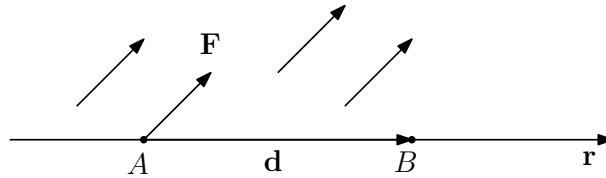
$$\begin{aligned} \int_r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 (t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 6t^2\mathbf{k}) dt \\ &= \int_0^1 (t + 18t^3 + 12t^5) dt = \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{9t^4}{2} + 2t^6 \right]_0^1 = 7. \end{aligned}$$

□

Ας δούμε τώρα, κάπως περιγραφικά, μια φυσική ερμηνεία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος όταν το  $\mathbf{F}$  είναι ένα πεδίο δυνάμεων στο χώρο. Έστω ότι ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της εικόνας μιας τροχιάς  $\mathbf{r}$  υπό την επίδραση της  $\mathbf{F}$ .

Αρχικά, ας θεωρήσουμε ότι η τροχιά  $\mathbf{r}$  είναι μια ευθεία,  $\mathbf{d}$  είναι το διάνυσμα μετατόπισης του σωματιδίου από την αρχική θέση  $A$  στην τελική θέση  $B$ , και η  $\mathbf{F}$  είναι σταθερή δύναμη, βλ. Σχήμα 5. Τότε το έργο που παράγει η  $\mathbf{F}$  για να μετακινήσει το σωματίδιο κατά μήκος της ευθείας από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$  δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Έργο της } \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}.$$



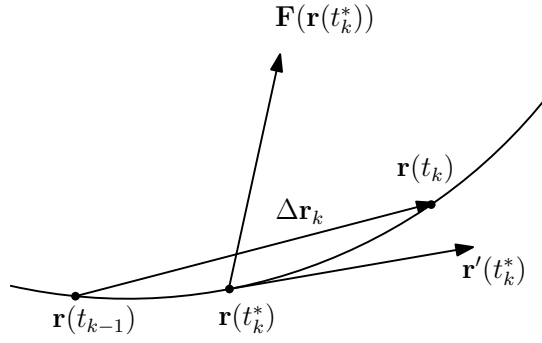
Σχήμα 5: Το έργο που παράγει η  $\mathbf{F}$  για να μετακινήσει το σωματίδιο κατά μήκος της ευθείας από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$  είναι ίσο με  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$ .

Έστω τώρα ότι έχουμε μια τυχούσα τροχιά στον χώρο και  $\mathbf{F}$  είναι ένα πεδίο δυνάμεων που μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος της  $\mathbf{r}$ . Εντούτοις, για ένα μικρό τόξο της τροχιάς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι σχεδόν ευθύγραμμο και ότι εκεί (λόγω συνέχειας) η  $\mathbf{F}$  είναι σχεδόν σταθερή. Στη συνέχεια, παίρνουμε μια διαμέριση του  $[a, b]$  σε  $n$  υποδιαστήματα  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_n = b$ , και εστιάζουμε την προσοχή μας στο  $k$ -οστό τόξο της τροχιάς, βλ. Σχήμα 6. Τότε:

$$\text{Το έργο κατά μήκος του } k\text{-οστού τόξου} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_k^*)) \cdot \Delta \mathbf{r}_k.$$

Επειδή

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t},$$



Σχήμα 6: Προσέγγιση του έργου κατά μήκος ενός μικρού τόξου της τροχιάς  $\mathbf{r}$ .

αν υποθέσουμε ότι  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1} \approx 0$  και  $t_{k-1} \leq t_k^* \leq t_k$ , τότε

$$\mathbf{r}'(t_k^*) \approx \frac{\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = \frac{\Delta \mathbf{r}_k}{\Delta t_k}.$$

Τότε το ολικό έργο που παράγει η  $\mathbf{F}$  είναι κατά προσέγγιση ίσο με

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_k^*)) \cdot \Delta \mathbf{r}_k \approx \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_k^*)) \cdot \mathbf{r}'(t_k^*) \Delta t_k.$$

Όταν  $n \rightarrow \infty$ , οπότε  $\Delta t_k \rightarrow 0$ , η προσέγγιση γίνεται ολοένα και καλύτερη, και το όριο αυτό δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

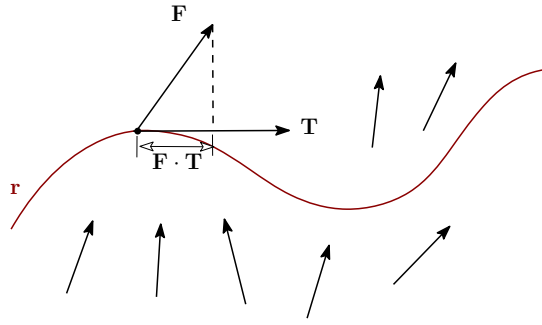
Άρα το έργο που εκτελείται από τη μετατόπιση ενός σωματιδίου από το σημείο  $\mathbf{r}(a)$  έως το σημείο  $\mathbf{r}(b)$  κατά μήκος της τροχιάς  $\mathbf{r}$ , υπό την επίδραση της  $\mathbf{F}$ , είναι

$$\text{Έργο} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3)$$

Ας δούμε τώρα μια εναλλακτική διατύπωση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος ενός διανυσματικού πεδίου για τροχιές  $\mathbf{r}$  για τις οποίες  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ , για  $a \leq t \leq b$ . Συγκεκριμένα, συμβολίζουμε με  $\mathbf{T}(t)$  το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα, δηλαδή  $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/\|\mathbf{r}'(t)\|$ . Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \left( \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \int_{\mathbf{r}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Άρα το  $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  είναι ίσο με κάτι που μοιάζει με το (βαθμωτό) επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εφαπτομενικής συνιστώσας του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$  κατά μήκος της  $\mathbf{r}$ .



Σχήμα 7: Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int_r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  ισούται με  $\int_r (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) ds$ , το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εφαπτομενικής συνιστώσας του  $\mathbf{F}$  κατά μήκος της  $r$ .

Για να υπολογίσουμε επικαμπύλια ολοκληρώματα (β' είδους) μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε τον Ορισμό 1.2 ή να ολοκληρώσουμε, σύμφωνα με την (4), την εφαπτομενική συνιστώσα του  $\mathbf{F}$  κατά μήκος της  $r$ , ανάλογα με το ποιο από τα δύο είναι ευκολότερο ή καταλληλότερο.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το  $\mathbf{F}$  παριστάνει το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού που ρέει σε ένα χωρίο του  $\mathbb{R}^3$ . Τότε το ολοκλήρωμα του  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$  κατά μήκος μιας τροχιάς στο χωρίο αυτό περιγράφει τη ροή του ρευστού κατά μήκος της τροχιάς ή την κυκλοφορία (circulation) κατά μήκος της τροχιάς. Συγκεκριμένα, δίνουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

**Ορισμός 1.3.** Αν  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια  $C^1$  τροχιά στο πεδίο ορισμού ενός συνεχούς πεδίου ταχυτήτων  $\mathbf{F}$  με παραμετρική αναπαράσταση  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , τότε η **ροή** κατά μήκος της τροχιάς από το σημείο  $r(a)$  έως το  $r(b)$  είναι

$$\text{Ροή} = \int_r \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds. \quad (5)$$

Αν η εικόνα της τροχιάς αρχίζει και τελειώνει στο ίδιο σημείο ( $r(a) = r(b)$ ), τότε η ροή ονομάζεται **κυκλοφορία** κατά μήκος της (κλειστής) τροχιάς.

**Παράδειγμα 1.4.** Βρείτε την κυκλοφορία των διανυσματικών πεδίων (α)  $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ , και (β)  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ , κατά μήκος του κύκλου  $x^2 + y^2 = 9$ .

Θεωρούμε την παραμετρική αναπαράσταση  $r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , για τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 9$ . Τότε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα είναι ίσο με

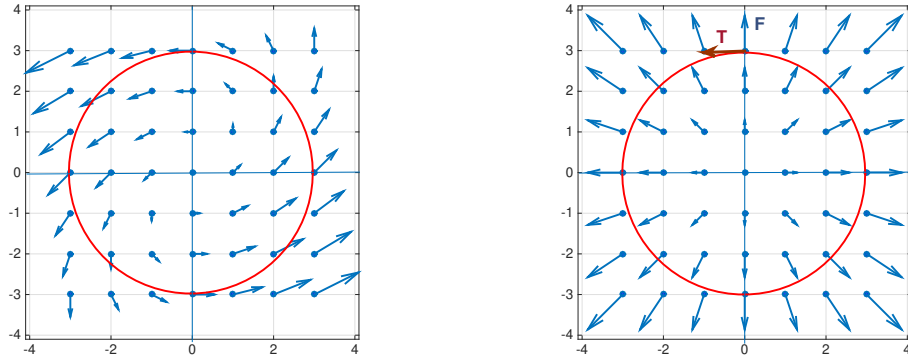
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{-3 \sin t \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j}}{\sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t}} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}.$$

Επίσης, όπως ήδη είδαμε,  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} = 3$ .

Επιπλέον, για το πεδίο  $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(r(t)) \cdot \mathbf{T}(t) &= (3 \cos t - 3 \sin t) \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j} \cdot (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}) \\ &= -3 \sin t \cos t + 3 \sin^2 t + 3 \cos^2 t = 3 - 3 \sin t \cos t = 3 - \frac{3}{2} \sin 2t. \end{aligned}$$





Σχήμα 8: Τα διανυσματικά πεδία (α)  $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  (αριστερά), και (β)  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  (δεξιά), και ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 9$ .

Άρα η κυκλοφορία του  $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  κατά μήκος του κύκλου  $x^2 + y^2 = 9$ , είναι

$$\begin{aligned} \int_r \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \int_0^{2\pi} (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \left(3 - \frac{3}{2} \sin 2t\right) 3 dt \\ &= \left[9t + \frac{9}{4} \cos 2t\right]_0^{2\pi} = 18\pi. \end{aligned}$$

Όπως υποδεικνύει και το Σχήμα 8 (αριστερά), ένα ρευστό με αυτό το πεδίο ταχυτήτων «κυκλοφορεί» πάνω στον κύκλο με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, άρα η κυκλοφορία είναι θετική.

Τώρα, για το (ακτινικό) πεδίο  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t) &= (3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}) \cdot (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}) \\ &= -3 \sin t \cos t + 3 \sin t \cos t = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, το  $\mathbf{F}$  είναι συνεχώς κάθετο στον κύκλο, άρα

$$\int_r \underbrace{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})}_{=0} ds = 0.$$

Άρα η κυκλοφορία ενός ρευστού με αυτό το πεδίο ταχυτήτων πάνω στον κύκλο είναι μηδέν. (Παρατηρήστε ότι αν θεωρούσαμε το  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  ως ένα πεδίο δυνάμεων θα συμπεραίναμε ότι παράγει μηδενικό έργο κατά μήκος του κύκλου.)  $\square$

Έστω τώρα  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια  $C^1$  τροχιά στον χώρο με παραμετρική αναπαράσταση  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , και  $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$  ένα

συνεχές διανυσματικό πεδίο. Τότε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b (M(x, y, z) \mathbf{i} + N(x, y, z) \mathbf{j} + P(x, y, z) \mathbf{k}) \cdot (x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} + z'(t) \mathbf{k}) dt \\ &= \int_a^b (M(x, y, z) x'(t) + N(x, y, z) y'(t) + P(x, y, z) z'(t)) dt.\end{aligned}$$

Προφανώς τα διαφορικά των  $x, y, z$  είναι αντίστοιχα ίσα με  $dx = x'(t)dt$ ,  $dy = y'(t)dt$ ,  $dz = z'(t)dt$ , οπότε το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή:

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz. \quad (6)$$

Η (6) αποτελεί έναν εναλλακτικό συμβολισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος και αναφέρεται συνήθως ως *διαφορική μορφή* του επικαμπύλιου ολοκληρώματος. (Ακριβέστερα, η έκφραση  $M dx + N dy + P dz$  αναφέρεται ως μια διαφορική μορφή.) Σημειώστε ότι κατά τον υπολογισμό της (6) θα πρέπει να ερμηνεύσετε την  $M dx + N dy + P dz$  σωστά: Για τον υπολογισμό της θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τις παραμετρικές εξισώσεις για τα  $x, y, z$  που προέρχονται από την περιγραφή της τροχιάς  $\mathbf{r}$ .

**Παράδειγμα 1.5.** Υπολογίστε το

$$\int_{\mathbf{r}} (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz,$$

για την τροχιά  $\mathbf{r}$  με παραμετρική αναπαράσταση  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

*Λύση:* Κατά μήκος της  $\mathbf{r}$  έχουμε:  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ , επομένως  $dx = dt$ ,  $dy = 2t dt$ ,  $dz = 3t^2 dt$ . Άρα

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{r}} (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz &= \int_0^1 (t^2 + t^3) dt + (t + t^3)2t dt + (t + t^2)3t^2 dt \\ &= \int_0^1 (5t^4 + 4t^3 + 3t^2) dt = \left[ t^5 + t^4 + t^3 \right]_0^1 = 3.\end{aligned}$$

□

### Αναπαραμέτρηση καμπύλης

Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα. Θεωρήστε τις ακόλουθες δύο τροχιές στο επίπεδο:

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{και} \quad \gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t).$$

Αμέσως διαπιστώνουμε ότι και οι δύο διαγράφουν έναν κύκλο με κέντρο το  $(0, 0)$ , ακτίνα 1, και φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού. Επίσης, αν θεωρήσουμε  $u(t) = 2t$ , τότε

έχουμε ότι  $\gamma(t) = \mathbf{r}(u(t))$ . Άρα η  $\gamma$  είναι η  $\mathbf{r}$  με μια αλλαγή μεταβλητής. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 1.4.** Έστω  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια  $C^1$  τροχιά. Θα λέμε ότι μια άλλη  $C^1$  τροχιά  $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια **αναπαραμέτρηση** (reparametrization) της  $\mathbf{r}$  αν υπάρχει μια  $1-1$  και επί,  $C^1$  συνάρτηση  $u : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , τέτοια ώστε η αντίστροφη της  $u^{-1} : [a, b] \rightarrow [c, d]$  να είναι και αυτή  $C^1$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$\gamma(t) = \mathbf{r}(u(t)), \quad \text{δηλαδή} \quad \gamma = \mathbf{r} \circ u.$$

**Παράδειγμα 1.6.** Θεωρήστε την τροχιά  $\mathbf{r}$  με παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2t, 2 - t, 3 + 5t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

η οποία διατρέχει το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο  $(1, 2, 3)$  και πέρας το σημείο  $(3, 1, 8)$ . Ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και με την τροχιά

$$\gamma(t) = (1 + 2t^2, 2 - t^2, 3 + 5t^2), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Έχουμε ότι η  $\gamma$  είναι μια αναπαραμέτρηση της  $\mathbf{r}$  μέσω της αλλαγής μεταβλητής  $u(t) = t^2$ , η οποία είναι προφανώς  $1-1$ , επί και συνεχώς παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$ .

Αν τώρα θεωρήσουμε την τροχιά

$$\sigma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{με} \quad \sigma(t) = (1 + 2t^2, 2 - t^2, 3 + 5t^2),$$

έχουμε και πάλι ότι  $\sigma(t) = \mathbf{r}(u(t))$ , με  $u(t) = t^2$ , όμως τώρα η  $u$  απεικονίζει το διάστημα  $[-1, 1]$  στο  $[0, 1]$  με τρόπο που δεν είναι  $1-1$ . Άρα η  $\sigma$  δεν είναι αναπαραμέτρηση της  $\mathbf{r}$ .

Αν θεωρήσουμε την τροχιά

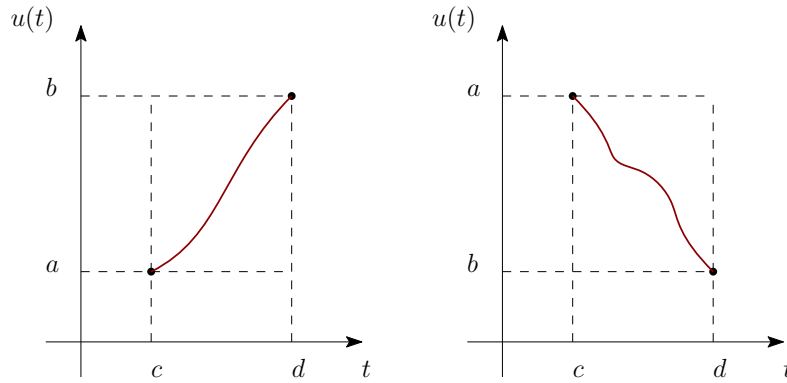
$$\chi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{με} \quad \chi(t) = (3 - 2t, 1 + t, 8 - 5t),$$

έχουμε ότι  $\chi(t) = \mathbf{r}(u(t))$ , με  $u(t) = 1 - t$ , και η συνάρτηση  $u : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  είναι  $1-1$ , επί και συνεχώς παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$ . Άρα η  $\chi$  είναι μια αναπαραμέτρηση της  $\mathbf{r}$ , η οποία γεωμετρικά διατρέχει το ίδιο με πριν ευθύγραμμο τμήμα αλλά με αντίστροφη φορά (από το σημείο  $(3, 1, 8)$  προς το  $(1, 2, 3)$ ). □

Έστω  $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια αναπαραμέτρηση της  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μέσω της αλλαγής μεταβλητής  $u : [c, d] \rightarrow [a, b]$ . Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσετε ότι υπό τις υποθέσεις που θέσαμε για την  $u : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , δηλαδή να είναι  $1-1$ , επί και συνεχώς παραγωγίσιμη τότε είτε

(i) η  $u$  θα είναι γνησίως αύξουσα με  $u(c) = a$  και  $u(d) = b$ , (βλ. Σχήμα 9, αριστερά), ή

(ii) η  $u$  θα είναι γνησίως φθίνουσα με  $u(c) = b$  και  $u(d) = a$ , (βλ. Σχήμα 9, δεξιά).



Σχήμα 9

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η  $\gamma$  (ή η  $u$ ) **διατηρεί τον προσανατολισμό**, ενώ στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι η  $\gamma$  (ή η  $u$ ) **αντιστρέφει τον προσανατολισμό**.

Στα επόμενα δύο θεωρήματα θα δούμε αν και κατά πόσον η αναπαραμέτρηση μιας τροχιάς επηρεάζει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής συνάρτησης ή ενός διανυσματικού πεδίου.

**Θεώρημα 1.1.** Έστω  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κατά τμήματα  $C^1$  τροχιά και  $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχής συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού  $A$  περιέχει την εικόνα της  $\mathbf{r}$ . Αν  $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια αναπαραμέτρηση της  $\mathbf{r}$ , τότε

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{\mathbf{r}} f \, ds.$$

*Απόδειξη.* Θα δώσουμε την απόδειξη στην περίπτωση που η  $\mathbf{r}$  (και κατ' επέκταση η  $\gamma$ ) είναι  $C^1$ . (Όταν είναι κατά τμήματα  $C^1$  μπορούμε πάντα να «σπάσουμε» καταλλήλως το ολοκλήρωμα.)

Παρατηρήστε ότι από την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης, μιας και  $\gamma(t) = \mathbf{r}(u(t))$ , έχουμε

$$\|\gamma'(t)\| = \|\mathbf{r}'(u(t)) u'(t)\| = \|\mathbf{r}'(u(t))\| |u'(t)|.$$

$$\text{Επομένως, } \int_{\gamma} f \, ds = \int_c^d f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_c^d f(\mathbf{r}(u(t))) \|\mathbf{r}'(u(t))\| |u'(t)| \, dt.$$

Αν η  $\gamma$  διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε  $u(c) = a$ ,  $u(d) = b$  και  $|u'(t)| = u'(t)$  (διότι η  $u'$  είναι θετική μιας και η  $u$  είναι γνησίως αύξουσα). Συνεπώς κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $v = u(t)$ , έχουμε  $dv = u'(t) \, dt$ . Επίσης όταν  $t = c$ ,  $v = u(c) = a$ , και όταν  $t = d$ ,  $v = u(d) = b$ . Άρα

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\mathbf{r}(u(t))) \|\mathbf{r}'(u(t))\| |u'(t)| \, dt &= \int_c^d f(\mathbf{r}(u(t))) \|\mathbf{r}'(u(t))\| u'(t) \, dt \\ &= \int_a^b f(\mathbf{r}(v)) \|\mathbf{r}'(v)\| \, dv = \int_{\mathbf{r}} f \, ds. \end{aligned}$$

Αν η  $\gamma$  αντιστρέφει τον προσανατολισμό, τότε  $u(c) = b$ ,  $u(d) = a$  και  $|u'(t)| = -u'(t)$  (αφού η  $u$  είναι γνησίως φθίνουσα). Κάνουμε και πάλι την αλλαγή μεταβλητής  $v = u(t) \Rightarrow dv = u'(t) dt$ . Επίσης όταν  $t = c$ ,  $v = u(c) = b$ , και όταν  $t = d$ ,  $v = u(d) = a$ . Άρα

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\mathbf{r}(u(t))) \|\mathbf{r}'(u(t))\| |u'(t)| dt &= \int_c^d f(\mathbf{r}(u(t))) \|\mathbf{r}'(u(t))\| (-u'(t)) dt \\ &= - \int_b^a f(\mathbf{r}(v)) \|\mathbf{r}'(v)\| dv = \int_a^b f(\mathbf{r}(v)) \|\mathbf{r}'(v)\| dv = \int_{\mathbf{r}} f ds. \end{aligned}$$

□

**Θεώρημα 1.2.** Έστω  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κατά τμήματα  $C^1$  τροχιά και  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο τέτοιο ώστε το πεδίο ορισμού  $A$  περιέχει την εικόνα της  $\mathbf{r}$ . Αν  $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια αναπαραμέτρηση της  $\mathbf{r}$ , τότε

1. Αν η  $\gamma$  διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ .
2. Αν η  $\gamma$  αντιστρέφει τον προσανατολισμό, τότε  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ .

*Απόδειξη.* Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.1 θα θεωρήσουμε μόνον την περίπτωση που η  $\mathbf{r}$  είναι  $C^1$ . Από τον Ορισμό 1.2 έχουμε

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_c^d \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}(u(t))) \cdot \mathbf{r}'(u(t)) u'(t) dt.$$

Αν η  $\gamma$  διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε  $u(c) = a$ ,  $u(d) = b$ , οπότε κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $v = u(t) \Rightarrow dv = u'(t) dt$ . Επίσης όταν  $t = c$ ,  $v = u(c) = a$ , και όταν  $t = d$ ,  $v = u(d) = b$ . Άρα

$$\int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}(u(t))) \cdot \mathbf{r}'(u(t)) u'(t) dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(v)) \cdot \mathbf{r}'(v) dv = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

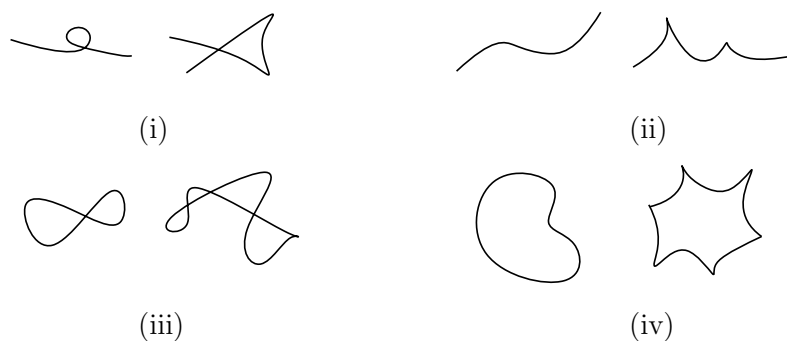
οπότε αποδείξαμε την Περίπτωση 1.

Αν η  $\gamma$  αντιστρέφει τον προσανατολισμό, τότε  $u(c) = b$ ,  $u(d) = a$ , οπότε κάνοντας την ίδια με πριν αλλαγή μεταβλητής, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}(u(t))) \cdot \mathbf{r}'(u(t)) u'(t) dt &= \int_b^a \mathbf{F}(\mathbf{r}(v)) \cdot \mathbf{r}'(v) dv \\ &= - \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(v)) \cdot \mathbf{r}'(v) dv = - \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει την Περίπτωση 2. □

Τα Θεωρήματα 1.1 και 1.2, εκτός του ότι μας βοηθούν να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του υπολογισμού ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος, μας επιτρέπουν να ορίσουμε επικαμπύλια

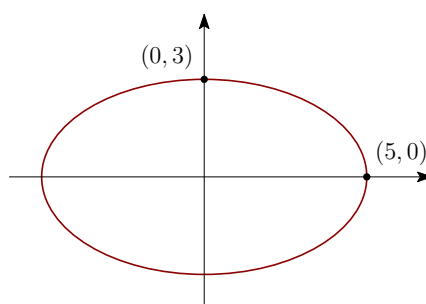


Σχήμα 10: Είδη καμπυλών: (i) Μη απλές, μη κλειστές, (ii) Απλές αλλά όχι κλειστές, (iii) Κλειστές αλλά όχι απλές, (iv) Απλές και κλειστές.

ολοκληρώματα πάνω σε καμπύλες. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, θα λέμε ότι μια κατά τμήματα  $C^1$  τροχιά  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι **κλειστή** αν  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ . Επιπλέον, θα λέμε ότι είναι **απλή** αν δεν τέμνει τον εαυτό της, δηλαδή αν η  $\mathbf{r}$  είναι 1-1 στο  $[a, b]$  εκτός ίσως από το ενδεχόμενο  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ .

Τώρα, θα ονομάζουμε **καμπύλη**  $C$  την εικόνα μιας τροχιάς  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι 1-1 στο  $[a, b]$  εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων στο  $[a, b]$ . Τότε θα λέμε ότι η  $\mathbf{r}$  είναι μια παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης  $C$ . Επιπλέον, θα λέμε ότι η  $C$  είναι **απλή** (**κλειστή**) αν έχει μια παραμετρική αναπαράσταση που είναι απλή (κλειστή). Σημειώστε ότι ισχύει (αν και δεν θα το αποδείξουμε) ότι αν  $\mathbf{r}$  και  $\gamma$  είναι δύο παραμετρικές αναπαραστάσεις της ίδιας καμπύλης  $C$ , τότε η μία είναι αναπαραμέτρηση της άλλης. Στο Σχήμα 10 δίνουμε παραδείγματα καμπυλών διαφόρων ειδών.

**Παράδειγμα 1.6.** Θεωρήστε την έλλειψη  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  του Σχήματος 11, που είναι προφανώς μια απλή, κλειστή καμπύλη.



Σχήμα 11: Η έλλειψη  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

Μια παραμετρική της αναπαράσταση είναι η:

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}(t) = (5 \cos t, 3 \sin t),$$

ενώ μια δεύτερη είναι η:

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (5 \cos 2(\pi - t), 3 \sin 2(\pi - t)).$$

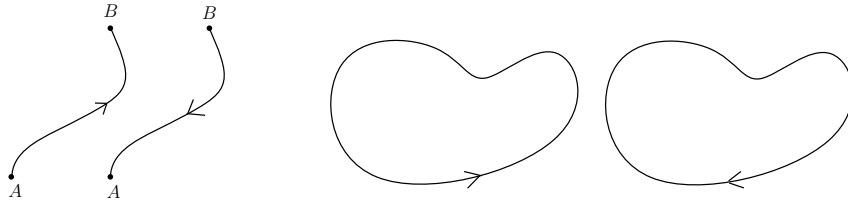
Και οι δύο έχουν ως εικόνα την έλλειψη, επίσης είναι και οι δύο 1 – 1 εκτός από τα άκρα του διαστήματος στα οποία ορίζονται. Παρατηρήστε ότι η  $\gamma$  είναι αναπαραμέτρηση της  $r$ .

Αν θεωρήσουμε την

$$\sigma : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad r(t) = (5 \cos t, 3 \sin t),$$

τότε αυτή δεν είναι μια παραμετρική αναπαράσταση της έλλειψης μιας και διαγράφει την έλλειψη τρεις φορές καθώς το  $t$  παίρνει τιμές από 0 έως  $6\pi$ . Άρα η  $\sigma$  δεν είναι 1 – 1 στο  $(0, 6\pi)$ .  $\square$

Οι απλές καμπύλες είτε είναι κλειστές είτε όχι, έχουν πάντα δύο δυνατούς προσανατολισμούς, βλ. Σχήμα 12. Θα χαρακτηρίζουμε μια καμπύλη ως **προσανατολισμένη** αν έχουμε επιλέξει έναν προσανατολισμό.



Σχήμα 12: Οι δύο διαφορετικοί προσανατολισμοί για μια μη κλειστή και για μια κλειστή καμπύλη.

Παρατηρήστε ότι, λόγω του Θεωρήματος 1.1, αν  $C$  είναι μια κατά τμήματα  $C^1$  απλή καμπύλη, τότε μπορούμε πάντα να ορίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής συνάρτησης  $f$  ως

$$\int_C f \, ds = \int_r f \, ds,$$

όπου  $r$  είναι μια οποιαδήποτε παραμετρική αναπαράσταση της  $C$ .

Αντιθέτως, ορίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου μόνον για προσανατολισμένες απλές καμπύλες. Συγκεκριμένα, αν επιλέξουμε έναν προσανατολισμό για την  $C$  και  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια παραμετρική αναπαράσταση της  $C$  που συμφωνεί με τον προσανατολισμό της  $C$ , τότε ορίζουμε

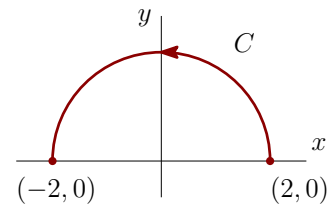
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Αν  $C^-$  είναι η ίδια καμπύλη με την  $C$ , αλλά προσανατολισμένη με την αντίθετη φορά, και  $r_\alpha$  η παραμετρική αναπαράσταση της  $C^-$ , τότε από το Θεώρημα 1.2 έχουμε

$$\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

**Παράδειγμα 1.7.** Έστω  $C$  το ημικύκλιο με κέντρο το  $(0, 0)$  και ακτίνα 2 που ανήκει στο άνω ημιεπίπεδο, προσανατολισμένο αντίθετα με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού από το σημείο  $(2, 0)$  προς το σημείο  $(-2, 0)$ , βλ. Σχήμα 13. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C (x^2 - y^2 + 1) ds.$$



Σχήμα 13: Το ημικύκλιο  $C$ .

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό θα πρέπει να επιλέξουμε μια παραμετρική αναπαράσταση της προσανατολισμένης καμπύλης  $C$ . Έστω, π.χ.,

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Τότε  $\mathbf{r}'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$  και  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} = 2$ . Άρα

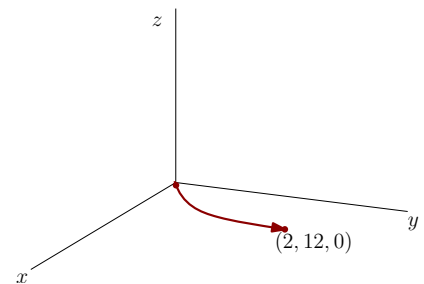
$$\begin{aligned} \int_C (x^2 - y^2 + 1) ds &= \int_{\mathbf{r}} (x^2 - y^2 + 1) ds = \int_0^\pi (4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t + 1) 2 dt \\ &= 2 \int_0^\pi (4 \cos 2t + 1) dt = 2 \left[ 2 \sin 2t + t \right]_0^\pi = 2\pi. \end{aligned}$$

□

**Παράδειγμα 1.8.** Υπολογίστε το έργο του διανυσματικού πεδίου δυνάμεων

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k},$$

πάνω σ' ένα σωματίδιο που κινείται κατά μήκος της παραβολής  $y = 3x^2$ ,  $z = 0$ , από την αρχή των αξόνων μέχρι το σημείο  $(2, 12, 0)$ , βλ. Σχήμα 14.



Σχήμα 14: Η καμπύλη  $C$  του Παραδείγματος 1.8.

Όπως είδαμε νωρίτερα, βλ. (3), το έργο ισούται με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του  $\mathbf{F}$  επί της  $C$ . Άρα για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό παραμετροποιούμε την καμπύλη  $C$  μέσω της

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \text{με} \quad x(t) = t, \quad y(t) = 3t^2, \quad z(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Επιπλέον,  $\mathbf{r}'(t) = (1, 6t, 0)$ , επομένως,

$$\begin{aligned} \text{Έργο} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^2 (t, -3t^2, t + 3t^2) \cdot (1, 6t, 0) dt = \int_0^2 (t - 18t^3) dt \\ &= \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{9t^4}{2} \right]_0^2 = 2 - 72 = -70. \end{aligned}$$



Η ερμηνεία του αρνητικού προσήμου στο αποτέλεσμα είναι ότι καθώς το σωματίδιο κινείται κατά μήκος της καμπύλης με τη δεδομένη φορά, το έργο έχει φορά αντίθετη προς εκείνη της δύναμης. Αν επιλέγαμε τον αντίθετο προσανατολισμό στην καμπύλη, δηλαδή από το σημείο  $(2, 12, 0)$  προς την αρχή των αξόνων, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν 70.  $\square$

## 2 Το Θεώρημα του Green και το θεώρημα απόκλισης στο επίπεδο

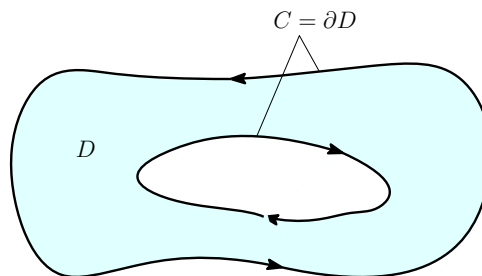
### 2.1 Το θεώρημα του Green

Το θεώρημα του Green συνδέει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης  $C$  στο επίπεδο, με το διπλό ολοκλήρωμα μιας κατάλληλης συνάρτησης πάνω στο χωρίο  $D$  που περικλείεται από τη  $C$ . Στη συνέχεια διατυπώνουμε το θεώρημα αυτό, ενώ για μια περιγραφή της απόδειξής του παραπέμπουμε στο Παράρτημα που βρίσκεται στο τέλος των σημειώσεων αυτών.

**Θεώρημα 2.1** (Θεώρημα του Green). Έστω  $D$  ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο στον  $\mathbb{R}^2$  του οποίου το σύνορο  $C = \partial D$  αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος απλών, κλειστών, κατά τμήματα  $C^1$  καμπυλών. Επιλέγουμε προσανατολισμό στις καμπύλες αυτές που απαρτίζουν το  $C$  έτσι ώστε καθώς τις διατρέχουμε το χωρίο  $D$  να βρίσκεται συνεχώς στα αριστερά μας (βλ. Σχήμα 15). Έστω  $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$  ένα  $C^1$  διανυσματικό πεδίο με πεδίο ορισμού το  $D$ . Τότε

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

**Παρατήρηση.** Το σύμβολο  $\oint_C$  δηλώνει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπολογίζεται πάνω σε μία ή περισσότερες κλειστές καμπύλες.

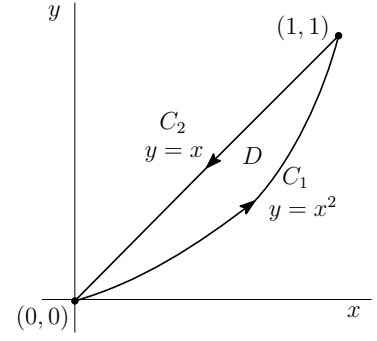


Σχήμα 15: Το σύνορο του χωρίου  $D$  αποτελείται από δύο απλές, κλειστές,  $C^1$  καμπύλες. Η ένωση των καμπυλών αυτών συμβολίζεται με  $C$ . Παρατηρήστε τον προσανατολισμό της κάθε καμπύλης: Έχει επιλεγεί έτσι ώστε καθώς τις διατρέχουμε το χωρίο  $D$  να βρίσκεται συνεχώς στα αριστερά μας.

**Παράδειγμα 2.1.** Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j},$$

και έστω  $D$  το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που περικλείεται μεταξύ της παραβολής  $y = x^2$  και της ευθείας  $y = x$ , βλ. Σχήμα 16. Στο σύνορο  $\partial D$  του χωρίου  $D$  θεωρούμε τον προσανατολισμό που περιγράψαμε στη διατύπωση του Θεωρήματος του Green, και είναι αυτός που απεικονίζεται στο Σχήμα 16.



Σχήμα 16: Το χωρίο  $D$  του Παραδείγματος 2.1.

Για να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial D} xy dx + y^2 dy,$$

θα πρέπει να αναπαραστήσουμε παραμετρικά τα δύο τμήματα  $C_1$  και  $C_2$  του συνόρου  $\partial D$ . Για παράδειγμα, επιλέγουμε τις ακόλουθες παραμετρικές αναπαραστάσεις:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{και} \quad C_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Παρατηρήστε ότι ο προσανατολισμός των  $C_1$  και  $C_2$  συμφωνεί με αυτόν του Σχήματος 16. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \oint_{C_1} xy dx + y^2 dy + \oint_{C_2} xy dx + y^2 dy \\ &= \int_0^1 t \cdot t^2 dt + t^4 \cdot 2t dt + \int_0^1 (1-t)^2(-dt) + (1-t)^2(-dt) \\ &= \int_0^1 (t^3 + 2t^5) dt + \int_0^1 2(1-t)^2(-dt) \\ &= \left[ \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{2}{3}(1-t)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Επίσης, θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα  $\iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$  θεωρώντας το  $D$  ως ένα χωρίο τύπου I.

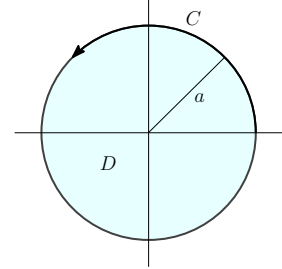
$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=x} \left( \frac{\partial}{\partial x}(y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right) dy dx = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=x} -x dy dx \\ &= \int_0^1 -x(x - x^2) dx = \int_0^1 (x^3 - x^2) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Άρα το επικαμπύλιο και το διπλό ολοκλήρωμα έχουν την ίδια τιμή όπως ακριβώς προβλέπει το Θεώρημα Green. □

**Παράδειγμα 2.2.** Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j},$$

και έστω  $C$  ο κύκλος με κέντρο το  $(0, 0)$ , ακτίνα  $a$  και προσανατολισμό αντίθετο της φοράς των δεικτών του ρολογιού, βλ. Σχήμα 17. Δηλαδή, ο κύκλος  $C$  είναι το σύνορο του δίσκου  $D$  με κέντρο το  $(0, 0)$  και ακτίνα  $a$ , και ο προσανατολισμός έχει επιλεγεί έτσι ώστε να ισχύει το Θεώρημα του Green.



Σχήμα 17: Ο δίσκος  $D$  του Παραδείγματος 2.2.

Για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος  $\oint_C -y dx + x dy$  θα μπορούσαμε, φυσικά, να παραμετριοποιήσουμε τον κύκλο  $C$  και να προχωρήσουμε απευθείας στον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Αντί αυτού, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Green:

$$\begin{aligned} \oint_C -y dx + x dy &= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right] dA \\ &= \iint_D 2 dA = 2 (\text{εμβαδόν του } D) = 2\pi a^2. \end{aligned}$$

□

**Παρατήρηση.** Ο συλλογισμός που ακολουθήσαμε στο Παράδειγμα 2.2 μπορεί να εφαρμοσθεί και σε πολύ γενικότερα χωρία. Γενικά, αν  $D$  είναι οποιοδήποτε χωρίο για το οποίο ισχύει το Θεώρημα του Green, τότε με κατάλληλο προσανατολισμό του συνόρου  $\partial D$ , έχουμε

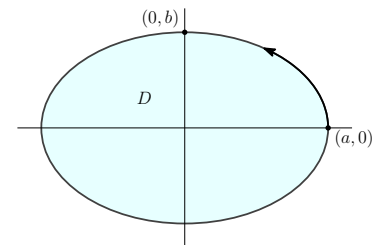
$$\frac{1}{2} \oint_{\partial D} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \iint_D 2 dA = \text{εμβαδόν του } D. \quad (7)$$

Άρα μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν ενός διδιάστατου χωρίου υπολογίζοντας ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (που είναι μια μονοδιάστατη κατασκευή).

**Παράδειγμα 2.3.** Χρησιμοποιήστε τον τύπο (7) για να υπολογίσετε το εμβαδόν της έλλειψης με τύπο

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

βλ. Σχήμα 18. Ως προσανατολισμό επιλέγουμε τον αντίθετο της φοράς των δεικτών του ρολογιού έτσι ώστε να ισχύει το Θεώρημα του Green.



Σχήμα 18: Το χωρίο  $D$  με σύνορο την έλλειψη  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Για την έλλειψη επιλέγουμε την ακόλουθη παραμετρική αναπαράσταση:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Για τον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου  $D$  εφαρμόζουμε τον τύπο (7):

$$\begin{aligned}\text{Εμβαδόν του } D &= \frac{1}{2} \oint_{\partial D} -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -b \sin t (-a \sin t dt) + a \cos t (b \cos t dt) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \sin^2 t + ab \cos^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.\end{aligned}$$

□

## 2.2 Εναλλακτικές διατυπώσεις του θεωρήματος του Green

Έστω  $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$  ένα  $C^1$  διανυσματικό πεδίο. Μπορούμε να το θεωρήσουμε ως ένα διανυσματικό πεδίο στον  $\mathbb{R}^3$  παίρνοντας την  $\mathbf{k}$ -συνιστώσα του να είναι μηδέν. Ας υπολογίσουμε τον στροβιλισμό του  $\mathbf{F}$ ,  $\text{curl } \mathbf{F}$ :

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M(x, y) & N(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Επειδή, προφανώς,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ , μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \iint_D \underbrace{\left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}_{\nabla \times \mathbf{F}} dA = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA.$$

Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα του Green στην ακόλουθη μορφή:

**Πρόταση 2.1** (Διανυσματική διατύπωση του θεωρήματος του Green). *Αν  $D$  ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο στον  $\mathbb{R}^2$  τέτοιο ώστε να ισχύει το θεώρημα του Green και*

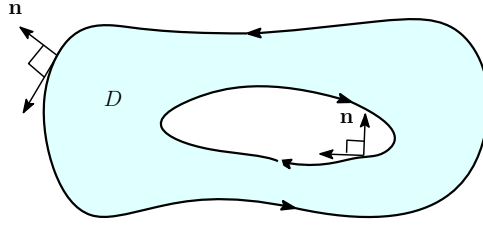
$$\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

*είναι ένα  $C^1$  διανυσματικό πεδίο στο  $D$ , τότε αν το σύνορο  $\partial D$  έχει τον κατάλληλο προσανατολισμό, ισχύει ότι:*

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA.$$

Έστω, και πάλι, ότι  $D$  είναι ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο στον  $\mathbb{R}^2$  τέτοιο ώστε να ισχύει το θεώρημα του Green και ότι οι καμπύλες που αποτελούν το σύνορο του  $D$  έχουν τον κατάλληλο προσανατολισμό. Θα συμβολίζουμε με  $\mathbf{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο  $\partial D$  και έχει φορά προς το εξωτερικό μέρος του  $D$ , βλ. Σχήμα 19. Θα αποκαλούμε το  $\mathbf{n}$  **εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα** στο  $\partial D$ .

Τότε μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα:



Σχήμα 19: Το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  στο σύνορο  $\partial D$ .

**Θεώρημα 2.2** (Θεώρημα της απόκλισης στο επίπεδο). Αν  $D$  ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο στον  $\mathbb{R}^2$  τέτοιο ώστε να ισχύει το θεώρημα του Green,  $\mathbf{n}$  είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο  $\partial D$ , και

$$\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

είναι ένα  $C^1$  διανυσματικό πεδίο στο  $D$ , τότε

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA.$$

Απόδειξη. Έστω  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ , παραμετρική αναπαράσταση μιας  $C^1$  καμπύλης που αποτελεί τμήμα του  $\partial D$ . Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  στο  $\partial D$  αν περιστρέψουμε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα  $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/\|\mathbf{r}'(t)\|$  κατά  $\pi/2$  με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε ότι

$$\mathbf{n} = \frac{y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}}{\sqrt{(y'(t))^2 + (-x'(t))^2}} = \frac{y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$ . Πάνω σε κάθε  $C^1$  τμήμα του συνόρου  $\partial D$  η συνεισφορά στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ίση με

$$\begin{aligned} & \int_a^b (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{n}(t)) \, dt \\ &= \int_a^b [M(x(t), y(t))\mathbf{i} + N(x(t), y(t))\mathbf{j}] \cdot \frac{y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b [M(x(t), y(t))y'(t) - N(x(t), y(t))x'(t)] \, dt \\ &= \int_{\mathbf{r}} -N \, dx + M \, dy. \end{aligned}$$

Επομένως, από το θεώρημα του Green έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \oint_{\partial D} -N \, dx + M \, dy = \iint_D \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial(-N)}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D \underbrace{\left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right)}_{\nabla \cdot \mathbf{F}} dA = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA. \end{aligned}$$

□

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.2 είναι και η ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 2.2** (Πρώτη και δεύτερη ταυτότητα του Green). Έστω  $D$  ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο στον  $\mathbb{R}^2$  τέτοιο ώστε να ισχύει το θεώρημα του Green,  $\mathbf{n}$  είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο  $\partial D$ . Τότε αν  $\phi$  είναι μια  $C^1$  συνάρτηση στο  $D$  και  $\psi$  είναι μια  $C^2$  συνάρτηση στο  $D$ , ισχύει η λεγόμενη **πρώτη ταυτότητα του Green**

$$\iint_D \phi \nabla^2 \psi \, dA = \oint_{\partial D} \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, ds - \iint_D \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dA. \quad (8)$$

Αν  $\phi, \psi$  είναι  $C^2$  συναρτήσεις στο  $D$ , τότε ισχύει η **δεύτερη ταυτότητα του Green**

$$\iint_D (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dA = \oint_{\partial D} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (9)$$

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα 2.2 έχουμε ότι

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA = \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Επιλέγουμε ως  $\mathbf{F} = \phi \nabla \psi$ , οπότε

$$\iint_D \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) \, dA = \oint_{\partial D} \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα  $\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{F} + \phi \nabla \cdot \mathbf{F}$ , για  $\mathbf{F} = \nabla \psi$ , και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \iint_D (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla \cdot \nabla \psi) \, dA &= \oint_{\partial D} \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, ds \\ \Rightarrow \iint_D \phi \nabla^2 \psi \, dA &= \oint_{\partial D} \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, ds - \iint_D \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dA. \end{aligned}$$

Για την απόδειξη της (9) εναλλάσσουμε στην (8) το ρόλο των  $\phi$  και  $\psi$ , και καταλήγουμε στην

$$\iint_D \psi \nabla^2 \phi \, dA = \oint_{\partial D} \psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, ds - \iint_D \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, dA. \quad (10)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (8) και (10) και βρίσκουμε ότι

$$\iint_D (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dA = \oint_{\partial D} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

□

**Παρατηρήσεις.**

1. Στην Πρόταση 2.2,  $\nabla \psi \cdot \mathbf{n}$  είναι η παράγωγος της  $\psi$  στην κατεύθυνση του εξωτερικού μοναδιαίου διανύσματος  $\mathbf{n}$ . Η παράγωγος αυτή συμβολίζεται συχνά ως  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ . Επίσης, υπενθυμίζουμε ότι  $\nabla^2$  είναι ο τελεστής Laplace, ο οποίος για μια συνάρτηση  $f$  δύο

μεταβλητών ορίζεται ως:  $\Delta f = \nabla^2 f := \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ . Με τον συμβολισμό αυτό οι ταυτότητες του Green γράφονται στη μορφή:

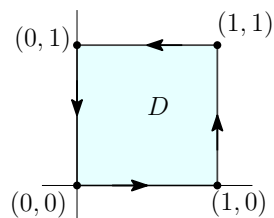
$$\begin{aligned} \iint_D \phi \Delta \psi \, dA &= \oint_{\partial D} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds - \iint_D \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dA, \\ \iint_D (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) \, dA &= \oint_{\partial D} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds. \end{aligned}$$

2. Η πρώτη ταυτότητα του Green, (8), για συναρτήσεις δύο μεταβλητών μπορεί να ερμηνευθεί ως το ανάλογο της ολοκλήρωσης κατά μέρη στην περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.
3. Αν  $C$  είναι μια απλή, προσανατολισμένη καμπύλη, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$ , όπου  $\mathbf{n}$  είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην  $C$ , ονομάζεται **η ροή** (flux) του  $\mathbf{F}$  διαμέσου της  $C$ . Π.χ., αν το  $\mathbf{F}$  είναι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού στο επίπεδο, τότε η ροή μετράει τον ρυθμό με τον οποίο το ρευστό μεταφέρεται διαμέσου της  $C$  ανα μονάδα χρόνου. (Υποθέτουμε ότι το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο  $t$ .)

**Παράδειγμα 2.4.** Έστω

$$\mathbf{F} = y^3 \mathbf{i} + x^5 \mathbf{j}.$$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της κάθετης συνιστώσας του  $\mathbf{F}$  στο σύνορο του μοναδιαίου τετραγώνου.



Σχήμα 20: Το μοναδιαίο τετράγωνο του Παραδείγματος 2.4.

Εδώ  $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(x^5) = 0$ . Άρα, από το Θεώρημα 2.2, έχουμε ότι

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA = \iint_D 0 \, dA = 0.$$

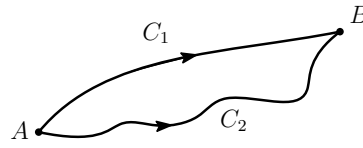
□

### 3 Συντηρητικά Διανυσματικά Πεδία

**Ορισμός 3.1.** Ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  θα λέμε ότι έχει **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου** αν

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

για οποιεσδήποτε δύο απλές, κατά τμήματα  $C^1$ , προσανατολισμένες καμπύλες, που ανήκουν στο πεδίο ορισμού του  $\mathbf{F}$  και έχουν το ίδιο αρχικό και τελικό σημείο (βλ. Σχήμα 21).

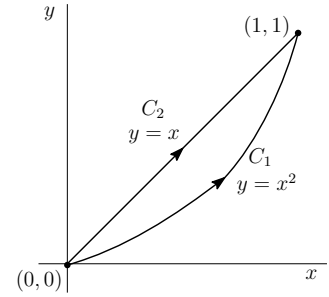


Σχήμα 21: Δύο απλές, κατά τμήματα  $C^1$ , προσανατολισμένες καμπύλες με αρχικό σημείο  $A$  και τελικό σημείο  $B$ .

**Παράδειγμα 3.1.** Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j},$$

και τις καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  που συνδέουν τα σημεία  $A(0,0)$  και  $B(1,1)$  και απεικονίζονται στο Σχήμα 22. Συγκεκριμένα, η  $C_1$  είναι το τμήμα της παραβολής  $y = x^2$  που συνδέει τα  $A$  και  $B$ , ενώ η  $C_2$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα  $A$  και  $B$ .



Σχήμα 22: Οι καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  του Παραδείγματος 3.1.

Παραμετροποιούμε τις  $C_1$  και  $C_2$  ως εξής:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{και} \quad C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Τότε

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, -t) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 (t^2 - 2t^2) dt = \left[ -\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{3},$$

ενώ

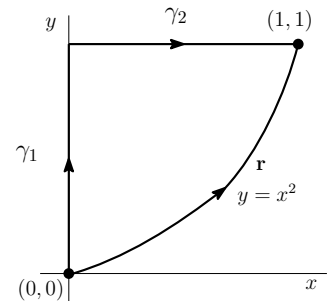
$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, -t) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 (t - t) dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Άρα  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ , επομένως το  $\mathbf{F}$  δεν έχει επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου. □

**Παράδειγμα 3.2.** Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

και τις καμπύλες  $\mathbf{r}$  και  $\gamma$  που συνδέουν τα σημεία  $A(0,0)$  και  $B(1,1)$  και απεικονίζονται στο Σχήμα 23. Συγκεκριμένα, η  $\mathbf{r}$  είναι το τμήμα της παραβολής  $y = x^2$  που συνδέει τα  $A$  και  $B$ , ενώ η  $\gamma$  αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  που συνδέουν το  $A$  με το  $(0,1)$  και το  $(0,1)$  με το  $B$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 23: Οι καμπύλες του Παραδείγματος 3.2.



Οι καμπύλες αυτές έχουν παραμετρικές αναπαραστάσεις:

$$\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}(t) = (t, t^2), \quad \gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{με} \quad \begin{cases} \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma_1(t) = (0, t), \\ \gamma_2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma_2(t) = (t - 1, 1). \end{cases}$$

Άρα,

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, t^2) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 (t + 2t^3) dt = \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} \right]_0^1 = 1,$$

και

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 (t - 1, 1) \cdot (1, 0) dt \\ &= \int_0^1 t dt + \int_1^2 (t - 1) dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[ \frac{(t - 1)^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Εδώ βλέπουμε ότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα κατά μήκος των καμπυλών  $\mathbf{r}$  και  $\gamma$  έχουν την ίδια τιμή. Αυτό, φυσικά, δεν αποτελεί απόδειξη του ότι το  $\mathbf{F}$  έχει επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου. Για να το πούμε αυτό θα πρέπει να ελέγξουμε όλους τους δυνατούς «δρόμους» που συνδέουν οποιαδήποτε δύο σημεία του επιπέδου (κάτι που είναι προφανώς αδύνατον). (Όπως θα δούμε στη συνέχεια το διανυσματικό αυτό πεδίο έχει πράγματι επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου, οπότε δεν αποτελεί σύμπτωση το γεγονός ότι βρήκαμε την ίδια τιμή κατά μήκος δύο διαφορετικών καμπυλών.)  $\square$

Το επόμενο θεώρημα μας παρέχει μια αναδιατύπωση του Ορισμού 3.1.

**Θεώρημα 3.1.** Έστω  $\mathbf{F}$  ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο. Τότε το  $\mathbf{F}$  έχει επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου αν και μόνον αν

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

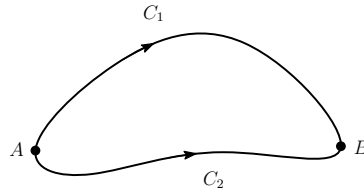
για όλες τις κατά τμήματα  $C^1$ , απλές, κλειστές καμπύλες  $C$  στο πεδίο ορισμού του  $\mathbf{F}$ .

*Απόδειξη.* “ $\Rightarrow$ ” Έστω ότι το  $\mathbf{F}$  έχει επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου και ότι  $C$  είναι απλή, κλειστή, κατά τμήματα  $C^1$  καμπύλη με παραμετρική αναπαράσταση  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , με  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b) = A$ . Έστω  $B$  οποιοδήποτε άλλο σημείο της  $C$ . Τότε θεωρούμε ότι η  $C$  αποτελείται από δύο προσανατολισμένες καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  με αρχικό σημείο  $A$  και τελικό σημείο  $B$ . Μία από αυτές, ας πούμε η  $C_1$ , θα έχει τον ίδιο προσανατολισμό με αυτόν της  $C$ , ενώ η άλλη τον αντίθετο, βλ. Σχήμα 24.

Άρα, έχουμε:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

αφού το  $\mathbf{F}$  έχει επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου.



Σχήμα 24: Η απλή, κλειστή καμπύλη  $C$  αποτελείται από δύο προσανατολισμένες καμπύλες με αρχικό σημείο  $A$  και τελικό σημείο  $B$ .

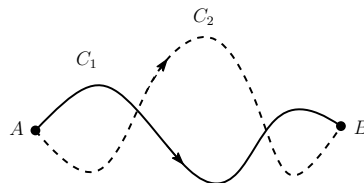
“ $\Leftarrow$ ” Στην περίπτωση αυτή θα περιγράψουμε τη γενική ιδέα της απόδειξης. Έστω ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του  $\mathbf{F}$  κατά μήκος οποιασδήποτε απλής, κλειστής καμπύλης είναι μηδέν. Τώρα αν  $C_1$  και  $C_2$  είναι δύο τυχαίες κατά τμήματα  $C^1$ , απλές, κλειστές καμπύλες με τα ίδια άκρα, συμβολίζουμε με  $C$  την κλειστή καμπύλη που αποτελείται από την  $C_1$  και την  $-C_2$ . Τότε έχουμε:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Αν η  $C$  τύχει να είναι απλή, τότε λόγω της υπόθεσης έχουμε ότι  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ , και άρα  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ . Παρόλα αυτά αν και οι  $C_1, C_2$  είναι απλές καμπύλες, δεν είναι αναγκαίο να είναι και η  $C$  απλή, βλ. Σχήμα 25. Στην περίπτωση αυτή αν είναι δυνατόν να «σπάσουμε» τις  $C_1$  και  $C_2$  σε πεπερασμένο πλήθος τόξων έτσι ώστε ένα τόξο  $C'_1$  της  $C_1$  και ένα τόξο  $C'_2$  της  $C_2$  είτε (α) να συμπίπτουν, ή (β) να σχηματίζουν μια απλή, κλειστή καμπύλη  $C'$ , τότε δεν είναι δύσκολο να τροποποιήσουμε το προηγούμενο επιχείρημα και να αποδείξουμε και πάλι ότι

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Όμως αυτό δεν είναι πάντα εφικτό και έτσι απαιτούνται και άλλα τεχνικά επιχειρήματα τα οποία όμως παραλείπουμε. □



Σχήμα 25: Η κλειστή καμπύλη  $C$  που αποτελείται από την  $C_1$  και την  $-C_2$  δεν είναι κατ' ανάγκη απλή.

### 3.1 Διανυσματικά πεδία κλίσεων και επικαμπύλια ολοκληρώματα

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε μια οικογένεια διανυσματικών πεδίων τα οποία έχουν την ιδιότητα να έχουν επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου. Έστω ότι

$\mathbf{F}$  είναι ένα διανυσματικό πεδίο για το οποίο έχουμε ότι  $\mathbf{F} = \nabla f$ , για κάποια βαθμωτή  $C^1$  συνάρτηση  $f$ . Υπενθυμίζουμε ότι τότε λέμε πως το  $\mathbf{F}$  είναι **πεδίο κλίσεων** ή **συντηρητικό διανυσματικό πεδίο**, ενώ η  $f$  αναφέρεται ως **βαθμωτό δυναμικό**.

Τότε μπορούμε να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 3.1.** Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μια  $C^1$  συνάρτηση και  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  μια κατά τμήματα  $C^1$  καμπύλη. Τότε

$$\int_{\mathbf{r}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τη σύνθετη συνάρτηση  $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ . Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι:

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

Επιπλέον, το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού μας εξασφαλίζει ότι

$$\int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

Άρα για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $\nabla f$  κατά μήκος της  $\mathbf{r}$  έχουμε:

$$\int_{\mathbf{r}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

□

Η Πρόταση 3.1 μας εξασφαλίζει ότι αν το  $\mathbf{F}$  είναι ένα συντηρητικό πεδίο (πεδίο κλίσης), τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας καμπύλης εξαρτάται μόνον από τις τιμές του βαθμωτού δυναμικού στα άκρα της καμπύλης. Άρα τα συντηρητικά πεδία έχουν επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάτω από ορισμένες υποθέσεις ισχύει και το αντίστροφο. Διατυπώνουμε λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα παραλείποντας την απόδειξή του.

**Θεώρημα 3.2.** Έστω  $\mathbf{F}$  ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε ένα ανοικτό και συνεκτικό χωρίο  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  ή  $3$ . Τότε  $\mathbf{F} = \nabla f$ , για κάποια βαθμωτή  $C^1$  συνάρτηση  $f$  στο  $D$ , αν και μόνον αν το  $\mathbf{F}$  έχει επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου για καμπύλες που ανήκουν στο  $D$ .

Επιπλέον, αν  $C$  είναι οποιαδήποτε κατά τμήματα  $C^1$  προσανατολισμένη καμπύλη στο  $D$  με αρχή το σημείο  $A$  και πέρας το σημείο  $B$ , τότε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(B) - f(A).$$

**Παρατήρηση:** Ένα χωρίο  $D \subset \mathbb{R}^n$  λέγεται **συνεκτικό** αν δύο οποιαδήποτε σημεία του μπορούν να ενωθούν με μια (συνεχή) τροχιά που κείται εξ' ολοκλήρου μέσα στο  $D$ .

**Παράδειγμα 3.3.** Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  του Παραδείγματος 3.2. Παρατηρήστε ότι αν θεωρήσουμε την πραγματική συνάρτηση  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , τότε  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2 (ή την Πρόταση 3.1) το  $\mathbf{F}$  έχει επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου. Αν, τώρα,  $C$  είναι οποιαδήποτε καμπύλη που ενώνει τα σημεία  $(0, 0)$  και  $(1, 1)$  θα έχουμε ότι:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(1, 1) - f(0, 0) = \frac{1}{2}(1^2 + 1^2) - \frac{1}{2}(0^2 + 0^2) = 1.$$

(Το αποτέλεσμα αυτό, φυσικά, συμφωνεί και για τις συγκεκριμένες καμπύλες που εξετάσαμε στο Παράδειγμα 3.2.) □

### 3.2 Ένα κριτήριο για συντηρητικά διανυσματικά πεδία

Όπως ήδη είδαμε το Θεώρημα 3.2 μας λέει ότι ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  έχει επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου ακριβώς όταν είναι συντηρητικό (πεδίο κλίσεων). Δύο ερωτήσεις προκύπτουν εντελώς φυσιολογικά:

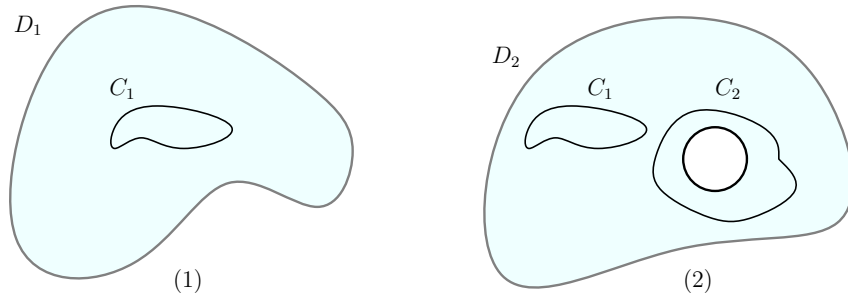
1. Πώς ελέγχουμε αν ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό;
2. Αν υποθέσουμε ότι η πρώτη ερώτηση έχει θετική απάντηση και το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό, τότε πώς βρίσκουμε μια βαθμωτή συνάρτηση  $f$  τέτοια ώστε  $\mathbf{F} = \nabla f$ ;

Για τη συνέχεια θα χρειαστεί να ορίσουμε μια καινούργια έννοια:

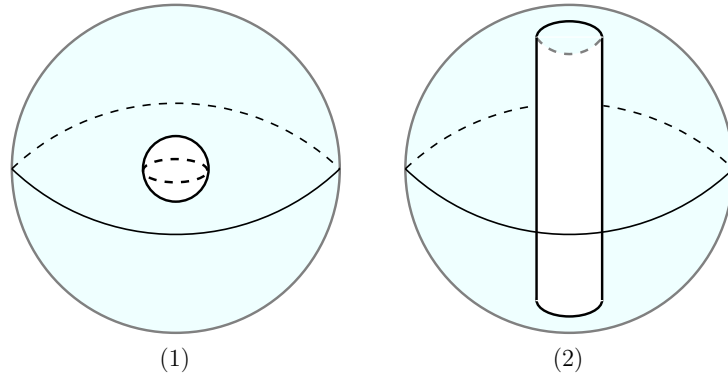
**Ορισμός 3.2.** Ένα χωρίο  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  ή  $3$ , λέγεται **απλά συνεκτικό** αν είναι συνεκτικό και αν, επιπλέον, κάθε απλή, κλειστή καμπύλη  $C$  στο  $D$  μπορεί να συρρικνωθεί κατά συνεχή τρόπο σε ένα σημείο παραμένοντας μέσα στο  $D$  καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας αυτής.

Αν το  $D \subset \mathbb{R}^2$ , τότε διαισθητικά το  $D$  είναι απλά συνεκτικό αν δεν έχει «τρύπες», βλ. Σχήμα 26. Επίσης, η έννοια της συρρίκνωσης μιας καμπύλης σε ένα σημείο με συνεχή τρόπο μπορεί να ορισθεί με αυστηρότητα αλλά αυτό ξεφεύγει από το σκοπό των σημειώσεων αυτών. Αν το  $D \subset \mathbb{R}^3$ , τότε το ζήτημα είναι πιο «λεπτό». Π.χ., στο Σχήμα 27, αριστερά, έχουμε αφαιρέσει από μια μπάλα μια άλλη μπάλα με μικρότερη ακτίνα και το χωρίο που προκύπτει είναι απλά συνεκτικό. Δεξιά, έχουμε αφαιρέσει από τη μπάλα ένα κύλινδρο που «διαπερνά» όλη τη μπάλα. Αν θεωρήσουμε μια καμπύλη που ανήκει στη μπάλα και περιβάλλει τον κύλινδρο είναι αδύνατον να τη συρρικνώσουμε σε σημείο με συνεχή τρόπο μιας και θα «κολλήσει» στον κύλινδρο που λείπει.

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα:



Σχήμα 26: (1) Το χωρίο  $D_1 \subset \mathbb{R}^2$  είναι απλά συνεκτικό. Κάθε κλειστή καμπύλη  $C_1$  στο  $D_1$  μπορεί να συρρικνωθεί κατά συνεχή τρόπο σε ένα σημείο παραμένοντας συνεχώς μέσα στο  $D_1$ . (2) Το χωρίο  $D_2 \subset \mathbb{R}^2$  δεν είναι απλά συνεκτικό. Η καμπύλη  $C_2$  περικλείει μια τρύπα, επομένως είναι αδύνατον να συρρικνωθεί κατά συνεχή τρόπο σε ένα σημείο παραμένοντας συνεχώς μέσα στο  $D_2$ .



Σχήμα 27: (1) Απλά συνεκτικό χωρίο στον  $\mathbb{R}^3$ . (2) Μη απλά συνεκτικό χωρίο.

**Θεώρημα 3.3.** Έστω  $\mathbf{F}$  ένα  $C^1$  διανυσματικό πεδίο με πεδίο ορισμού ένα απλά συνεκτικό χωρίο  $D$  στον  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  ή  $3$ . Τότε  $\mathbf{F} = \nabla f$  για κάποια βαθμωτή  $C^2$  συνάρτηση  $f$  στο  $D$  αν και μόνον αν  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  σε κάθε σημείο του  $D$ .

**Παρατήρηση:** Ειδικότερα, στην περίπτωση που το  $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$  είναι ένα διδιάστατο διανυσματικό πεδίο η συνθήκη ότι ο στροβιλισμός  $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$  είναι ισοδύναμος με την απαίτηση:

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M(x, y) & N(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Άρα στην περίπτωση αυτή αρκεί να ελέγχουμε την απλούστερη συνθήκη:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (11)$$

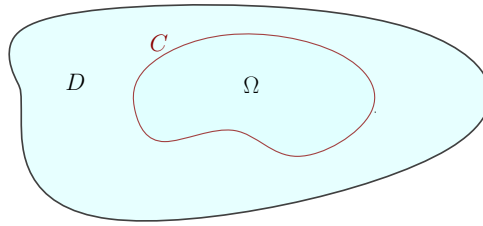
Σκιαγράφηση της απόδειξης του Θεωρήματος 3.3 για  $D \subset \mathbb{R}^2$ :

“ $\Rightarrow$ ” Για το ευθύ, αν  $\mathbf{F} = \nabla f$  για  $f \in C^2(D)$ , τότε

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0},$$

όπως έχουμε ήδη αποδείξει στο Θεώρημα 2.1, στις σημειώσεις «Εισαγωγή στα Διανυσματικά Πεδία».

“ $\Leftarrow$ ” Για το αντίστροφο, θα θεωρήσουμε ότι το χωρίο  $D$  είναι ένα απλά συνεκτικό χωρίο στον  $\mathbb{R}^2$ , και  $C$  είναι μια οποιαδήποτε  $C^1$  απλή, κλειστή καμπύλη στο  $D$ . Δεδομένου ότι το  $D$  είναι απλά συνεκτικό η κλειστή καμπύλη  $C$  αποτελεί το σύνορο ενός χωρίου  $\Omega$  που περιέχεται εξ’ ολοκλήρου μέσα στο  $D$ , βλ. Σχήμα 28. Τώρα η υπόθεσή μας είναι ότι  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  στο  $D$ .



Σχήμα 28: Επειδή το  $D$  είναι απλά συνεκτικό κάθε απλή, κλειστή καμπύλη  $C$  στο  $D$  καθορίζει ένα χωρίο  $\Omega$  που περιέχεται εξ’ ολοκλήρου μέσα στο  $D$ .

Από την Πρόταση 2.1 (διανυσματική διατύπωση του Θεωρήματος του Green) έχουμε ότι:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pm \iint_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA = \pm \iint_{\Omega} 0 dA = 0.$$

Χρησιμοποιούμε το πρόσημο  $\pm$  για την περίπτωση που η καμπύλη  $C$  έχει τον αντίθετο προσανατολισμό από αυτόν που προϋποθέτει το Θεώρημα του Green. Επομένως, από το Θεώρημα 3.1, συμπεραίνουμε ότι το  $\mathbf{F}$  έχει επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου, άρα από το Θεώρημα 3.2 έχουμε άμεσα ότι το πεδίο  $\mathbf{F}$  είναι πεδίο κλίσεων.

(Στις τρεις διαστάσεις μπορεί κανείς να εφαρμόσει ανάλογα επιχειρήματα και να χρησιμοποιήσει το Θεώρημα του Stokes.) □

**Παράδειγμα 3.4.** Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F} = x^2 y \mathbf{i} - 2xy \mathbf{j}$ .

Εδώ  $M(x, y) = x^2 y$  και  $N(x, y) = -2xy$ . Άρα

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2y \quad \text{ενώ} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = x^2,$$

επομένως το  $\mathbf{F}$  δεν είναι συντηρητικό. □

**Παράδειγμα 3.5.** Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = (2xy + \cos 2y) \mathbf{i} + (x^2 - 2x \sin 2y) \mathbf{j}.$$

Το  $\mathbf{F}$  είναι  $C^1$  σε ολόκληρο το  $\mathbb{R}^2$  (που είναι προφανώς απλά συνεκτικό).

Εδώ  $M(x, y) = 2xy + \cos 2y$  και  $N(x, y) = x^2 - 2x \sin 2y$ , οπότε

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2 \sin 2y \quad \text{και} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x - 2 \sin 2y,$$

επομένως το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό.

Αν θεωρήσουμε, π.χ., την έλλειψη  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , συμπεραίνουμε άμεσα (χωρίς να κάνουμε καμία πράξη) ότι  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ . □

**Παράδειγμα 3.6.** Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} - 6x \right) \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{j} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{k},$$

Το  $\mathbf{F}$  είναι  $C^1$  στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , το οποίο είναι απλά συνεκτικό. Επαληθεύστε, ως άσκηση, ότι

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

για κάθε  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , άρα από το Θεώρημα 3.3, το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό.

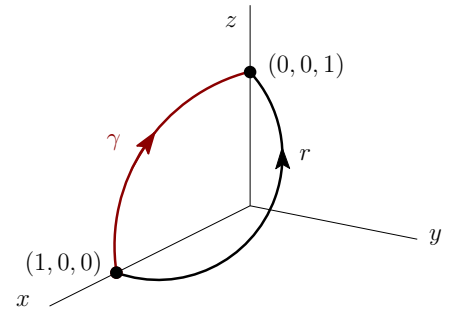
Έστω τώρα η καμπύλη  $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{r}(t) = (1 - t, \sin \pi t, t)$ , η οποία ενώνει τα σημεία  $(1, 0, 0)$  και  $(0, 0, 1)$ , βλ. Σχήμα 29. Για να βρούμε απ' ευθείας την τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος  $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ , θα πρέπει να υπολογίσουμε το:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 \left( \frac{1-t}{(1-t)^2 + \sin^2 \pi t + t^2} - 6(1-t), \frac{\sin \pi t}{(1-t)^2 + \sin^2 \pi t + t^2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{1-t}{(1-t)^2 + \sin^2 \pi t + t^2} \right) \cdot (-1, \pi \cos \pi t, 1) dt \\ &= \int_0^1 \left( \frac{2t-1 + \pi \sin \pi t \cos \pi t}{(1-t)^2 + \sin^2 \pi t + t^2} + 6(1-t) \right) dt. \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα στο οποίο καταλήξαμε δεν υπολογίζεται εύκολα. Παρόλα αυτά, το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό, επομένως το ολοκλήρωμα του  $\mathbf{F}$  θα έχει την ίδια τιμή κατά μήκους οποιασδήποτε άλλης καμπύλης  $\gamma$  που συνδέει τα σημεία  $(1, 0, 0)$  και  $(0, 0, 1)$ . Ας θεωρήσουμε λοιπόν την καμπύλη  $\gamma(t) = (\cos t, 0, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , η οποία ανήκει πάνω στη σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , γεγονός που θα διευκολύνει τους υπολογισμούς μας. Άρα

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\cos t}{1} - 6 \cos t, \frac{0}{1}, \frac{\sin t}{1} \right) \cdot (-\sin t, 0, \cos t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 6 \cos t \sin t dt = \int_0^{\pi/2} 3 \sin 2t dt = \left[ -\frac{3 \cos 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{3}{2}(-1 - 1) = 3. \end{aligned}$$

□



Σχήμα 29: Οι καμπύλες του Παραδείγματος 3.6.

### Εύρεση βαθμωτών δυναμικών

Τώρα που το Θεώρημα 3.3 μας προσφέρει ένα εύχρηστο κριτήριο για να ελέγχουμε αν ένα πεδίο  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό, το επόμενο βήμα είναι να περιγράψουμε μια μέθοδο για να βρίσκουμε ένα βαθμωτό δυναμικό για το  $\mathbf{F}$ . Αυτό θα γίνει μέσω των επόμενων δύο παραδειγμάτων και βασίζεται στον ορισμό του πεδίου κλίσεων.

**Παράδειγμα 3.7.** Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = (2xy + \cos 2y) \mathbf{i} + (x^2 - 2x \sin 2y) \mathbf{j},$$

του Παραδείγματος 3.5. Έχουμε ήδη ελέγξει ότι το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό. Για να βρούμε ένα βαθμωτό δυναμικό για το  $\mathbf{F}$  αναζητούμε κατάλληλη συνάρτηση  $f(x, y)$  τέτοια ώστε

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = \mathbf{F}.$$

Άρα οι συνιστώσες της κλίσης της  $f$  θα πρέπει να συμφωνούν με τις αντίστοιχες συνιστώσες του  $\mathbf{F}$ . Δηλαδή:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \cos 2y, \quad (12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x \sin 2y. \quad (13)$$

Καταρχάς, ολοκληρώνουμε την (12) ως προς  $x$  και έχουμε:

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int (2xy + \cos 2y) dx = x^2 y + x \cos 2y + g(y). \quad (14)$$

Παρατηρήστε ότι εδώ ο όρος  $g(y)$  παίζει το ρόλο της «αυθαίρετης σταθεράς ολοκλήρωσης», αφού από το ολοκλήρωμα προκύπτει μια σταθερά ως προς  $x$ , άρα, εν γένει, μια συνάρτηση του  $y$ .

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την (14) ως προς  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x \sin 2y + g'(y). \quad (15)$$

Συγκρίνουμε τις (13) και (15) και βλέπουμε ότι πρέπει να ισχύει

$$g'(y) \equiv 0 \Rightarrow g(y) = C,$$

όπου  $C$  είναι αυθαίρετη σταθερά.

Άρα καταλήξαμε ότι το βαθμωτό δυναμικό είναι της μορφής:

$$f(x, y) = x^2 y + x \cos 2y + C.$$



Μπορείτε, αν θέλετε, να επαληθεύσετε ότι  $\nabla f = \mathbf{F}$ . □

**Παράδειγμα 3.8.** Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = (e^x \sin y - yz) \mathbf{i} + (e^x \cos y - xz) \mathbf{j} + (z - xy) \mathbf{k}.$$

Παρατηρήστε ότι το  $\mathbf{F}$  είναι  $C^1$  σε ολόκληρο το  $\mathbb{R}^3$ . Καταρχάς ελέγχουμε αν το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \sin y - yz & e^x \cos y - xz & z - xy \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y}(z - xy) - \frac{\partial}{\partial z}(e^x \cos y - xz) \right) \mathbf{i} \\ &\quad - \left( \frac{\partial}{\partial x}(z - xy) - \frac{\partial}{\partial z}(e^x \sin y - yz) \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y - xz) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y - yz) \right) \mathbf{k} \\ &= (-x - (-x)) \mathbf{i} - (-y - (-y)) \mathbf{j} + (e^x \cos y - z - (e^x \cos y - z)) \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Άρα από το Θεώρημα 3.3, το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό.

Κάθε βαθμωτό δυναμικό  $f(x, y, z)$  για το  $\mathbf{F}$  θα πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y - yz, \quad (16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y - xz, \quad (17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = z - xy. \quad (18)$$

Ολοκληρώνουμε την (16) ως προς  $x$  και έχουμε:

$$f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int (e^x \sin y - yz) dx = e^x \sin y - xyz + g(y, z), \quad (19)$$

όπου  $g(y, z)$  είναι αυθαίρετη συνάρτηση των  $y, z$ .

Παραγωγίζουμε την (19) ως προς  $y$  και συγκρίνουμε το αποτέλεσμα με την (17). Έτσι έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y - xz + \frac{\partial g}{\partial y} = e^x \cos y - xz.$$

Άρα θα πρέπει  $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ , επομένως η  $g$  θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη του  $y$ , άρα θα πρέπει να είναι συνάρτηση μόνο του  $z$ , δηλαδή  $g(y, z) = h(z)$ . Συνεπώς

$$f(x, y, z) = e^x \sin y - xyz + h(z). \quad (20)$$

Τέλος, παραγωγίζουμε την (20) ως προς  $z$  και συγκρίνουμε με την (18):

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -xy + h'(z) = z - xy.$$

Άρα θα πρέπει  $h'(z) = z$ , οπότε ολοκληρώνοντας (ως προς  $z$ ) έχουμε ότι

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C,$$

όπου  $C$  είναι αυθαίρετη σταθερά.

Άρα καταλήξαμε ότι το βαθμωτό δυναμικό για την  $\mathbf{F}$  είναι της μορφής:

$$f(x, y, z) = e^x \sin y - xyz + \frac{z^2}{2} + C.$$

□

## Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα  $\int_r f \, ds$  για τις ακόλουθες  $f$  και  $\mathbf{r}$ :

(α)  $f(x, y) = x + 2y, \quad \mathbf{r}(t) = (2 - 3t, 4t - 1), \quad 0 \leq t \leq 2.$

(β)  $f(x, y) = x + 2y, \quad \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$

(γ)  $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}, \quad \mathbf{r}(t) = (e^{2t} \cos 3t, e^{2t} \sin 3t, e^{2t}), \quad 0 \leq t \leq 5.$

2. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα  $\int_r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  για τα ακόλουθα  $\mathbf{F}$  και  $\mathbf{r}$ :

(α)  $\mathbf{F} = (y + 2)\mathbf{i} + x\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(t) = (\sin t, -\cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$

(β)  $\mathbf{F} = (y - x)\mathbf{i} + x^4 y^3 \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(t) = (t^2, t^3), \quad -1 \leq t \leq 1.$

(γ)  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(t) = (t, 3t^2, 2t^3), \quad -1 \leq t \leq 1.$

3. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int_r x \, dy - y \, dx$ , για  $\mathbf{r}(t) = (\cos 3t, \sin 3t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . (Απάντηση:  $3\pi$ .)

4. Έστω  $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$  και θεωρήστε τις τροχιές

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\gamma(t) = (1 - 2t, 4t^2 - 4t + 1), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

(α) Υπολογίστε τα  $\int_r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  και  $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ .

(β) Σκεφτείτε ποιές είναι οι εικόνες των  $\mathbf{r}$  και  $\gamma$  και, υπό αυτό το πρίσμα, σχολιάστε τις απαντήσεις που βρήκατε στο (α).

5. Έστω  $\mathbf{F} = (2z^5 - 3xy)\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$ . Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του  $\mathbf{F}$  κατά μήκος της περιμέτρου του τετραγώνου με κορυφές τα σημεία  $(1, 1, 3)$ ,  $(-1, 1, 3)$ ,  $(-1, -1, 3)$ ,  $(1, -1, 3)$ , με φορά διαγραφής (προσανατολισμό) αντίθετη προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού ως προς τον  $z$ -άξονα. (Απάντηση: 0.)
6. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int_C y \, dx - x \, dy$ , όταν  $C$  είναι το τμήμα της παραβολής  $y = x^2$  από το σημείο  $(3, 9)$  μέχρι το σημείο  $(0, 0)$ . (Απάντηση: 9.)
7. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int_C xy^2 \, dx - xy \, dy$ , όταν  $C$  είναι το ημικύκλιο από το σημείο  $(0, 2)$  μέχρι το σημείο  $(0, -2)$  και φορά διαγραφής τη φορά των δεικτών του ρολογιού. (Απάντηση: 0.)
8. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int_C yz \, dx - xz \, dy + xy \, dz$ , όταν  $C$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο  $(1, 1, 2)$  μέχρι το σημείο  $(5, 3, 1)$ . (Απάντηση:  $-11/3$ .)
9. Έστω  $C$  η καμπύλη  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , με φορά διαγραφής από το σημείο  $(a, f(a))$  προς το σημείο  $(b, f(b))$ , και όπου η  $f$  είναι θετική και συνεχής στο  $[a, b]$ . Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$ , και αποδείξτε ότι η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  είναι ίση με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του γραφήματος της  $f$ , του  $x$ -άξονα, και των ευθειών  $x = a$  και  $x = b$ .
10. Έστω  $C$  μια ισοσταθμική καμπύλη της συνάρτησης  $f(x, y)$ . Δείξτε ότι  $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{s} = 0$ .
11. (α) Έστω  $D$  είναι χωρίο στον  $\mathbb{R}^2$  τέτοιο ώστε να ισχύει το θεώρημα του Green και ότι το σύνορό του  $\partial D$  έχει τον κατάλληλο προσανατολισμό. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του  $D$  δίνεται από καθένα από τα δύο ακόλουθα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

$$\text{Εμβαδόν } D = \oint_{\partial D} x \, dy = - \oint_{\partial D} y \, dx.$$

(β) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την έλλειψη  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  και τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 25$ .

12. (α) Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Green για να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C y^2 dx + x^2 dy,$$

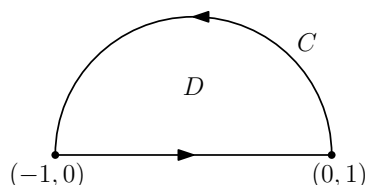
όπου  $C$  είναι το σύνορο του τετραγώνου με κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ , με προσανατολισμό αντίθετο της φοράς των δεικτών του ρολογιού.

(β) Επαληθεύστε το αποτέλεσμα που βρήκατε στο ερώτημα (α) υπολογίζοντας απ' ευθείας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

13. (α) Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Green για να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C y^2 dx + 3xy dy,$$

όπου  $C$  είναι η καμπύλη που ορίζεται από το ημικύκλιο από το σημείο  $(1, 0)$  μέχρι το σημείο  $(-1, 0)$  και το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο  $(-1, 0)$  μέχρι το σημείο  $(1, 0)$ . (Απάντηση:  $2/3$ .)



(β) Επαληθεύστε το αποτέλεσμα που βρήκατε στο ερώτημα (α) υπολογίζοντας απ' ευθείας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

14. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy,$$

όταν  $C$  είναι το σύνορο του τετραγώνου με κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ , προσανατολισμένο με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. (Χρησιμοποιήστε όποιον τρόπο υπολογισμού σας φαίνεται καταλληλότερος. (Απάντηση:  $-2$ .)

15. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C 5y dx - 3x dy,$$

όταν  $C$  είναι η καρδιοειδής καμπύλη με εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες  $r = 1 - \sin \theta$ , με προσανατολισμό αντίθετο της φοράς των δεικτών του ρολογιού. (Απάντηση:  $-12\pi$ .)

16. (α) Χρησιμοποιήστε το θεώρημα της απόκλισης (Θεώρημα 2.2) για να αποδείξετε ότι  $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = 0$ , όταν  $\mathbf{F} = 2y \mathbf{i} - 3x \mathbf{j}$  και  $C$  είναι ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 1$ .

(β) Αποδείξτε ότι  $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = 0$ , υπολογίζοντας απ' ευθείας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

17. Έστω  $C$  οποιαδήποτε απλή, κλειστή καμπύλη στο επίπεδο. Αποδείξτε ότι

$$\oint_C 3x^2 y dx + x^3 dy = 0.$$

18. Αποδείξτε ότι αν  $C$  είναι το σύνορο οποιουδήποτε ορθογώνιου χωρίου στο  $\mathbb{R}^2$ , τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C (x^2 y^3 - 3y) dx + x^3 y^2 dy,$$

εξαρτάται μόνον από το εμβαδόν του ορθογώνιου και όχι από τη θέση του στο επίπεδο  $\mathbb{R}^2$ .

19. Έστω  $f(x, y)$  μια  $C^2$  συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(Τότε η  $f$  λέγεται αρμονική.) Αποδείξτε ότι αν  $C$  είναι οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη στην οποία εφαρμόζεται το θεώρημα του Green, τότε

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0.$$

20. Έστω  $D$  ένα χωρίο στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα του Green και  $\mathbf{n}$  είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο  $\partial D$ . Έστω ότι  $f(x, y)$  είναι μια  $C^2$  συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\iint_D \nabla^2 f dA = \oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n} ds,$$

όπου  $\nabla^2 f$  συμβολίζει την Λαπλασιανή της  $f$  (δηλ.  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ) και  $\frac{\partial f}{\partial n}$  συμβολίζει το  $\nabla f \cdot \mathbf{n}$ .

21. Ελέγξτε αν τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικά. Αν είναι, τότε βρείτε ένα βαθμωτό δυναμικό για το  $\mathbf{F}$ .

(α)  $\mathbf{F} = e^{x+y} \mathbf{i} + e^{xy} \mathbf{j}.$

(β)  $\mathbf{F} = (e^{-y} - y \sin xy) \mathbf{i} - (xe^{-y} + x \sin xy) \mathbf{j}.$

(γ)  $\mathbf{F} = (6xy^2 - 3x^2) \mathbf{i} + (y^2 + 6x^2y) \mathbf{j}.$

(δ)  $\mathbf{F} = (2x + y) \mathbf{i} + (z \cos yz + x) \mathbf{j} + (y \cos yz) \mathbf{k}.$

22. Θεωρήστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int_C z^2 dx + 2y dy + xz dz$ .

(α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα αυτό όταν  $C$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το  $(0, 0, 0)$  στο  $(1, 1, 1)$ .

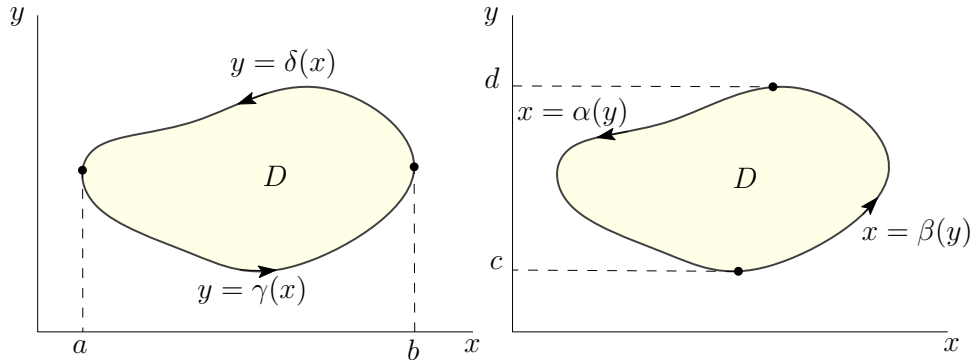
(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα αυτό όταν  $C$  είναι η τροχιά από το  $(0, 0, 0)$  στο  $(1, 1, 1)$  με παραμετρική αναπαράσταση  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

(γ) Είναι το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F} = z^2 \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + xz \mathbf{k}$  συντηρητικό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

## Παράρτημα: Απόδειξη του Θεωρήματος του Green

Εδώ θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος του Green σε τρία βήματα:

**Βήμα 1:** Θα αποδείξουμε το Θεώρημα του Green (Θεώρημα 2.1) στην περίπτωση που το  $D \subset \mathbb{R}^2$  έχει μια ειδική μορφή. Συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε ότι το  $D$  είναι ένα χωρίο τύπου III, δηλαδή χωρίο τύπου I και II, ταυτόχρονα, βλ. Σχήμα 30.



Σχήμα 30: Ένα χωρίο  $D$  τύπου III, ως χωρίο τύπου I (αριστερά), και ως χωρίο τύπου II (δεξιά). Παρατηρήστε τον προσανατολισμό στις καμπύλες που αποτελούν το σύνορο.

Άρα μπορούμε να περιγράψουμε το  $D$  με δύο τρόπους:

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \gamma(x) \leq y \leq \delta(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  είναι όλες συνεχείς και κατά τμήματα  $C^1$ .

Αρχικά, θεωρούμε το  $D$  ως χωρίο τύπου I και υπολογίζουμε τον πρώτο όρο του επικαμπύλιου ολοκληρώματος  $\oint_{\partial D} M dx + N dy$ , δηλαδή τον όρο  $\oint_{\partial D} M dx$ . Το σύνορο  $\partial D$  αποτελείται από τις καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$ , με την  $C_1$  να βρίσκεται κάτω από την  $C_2$ . Παραμετρικοποιούμε τις καμπύλες αυτές ως εξής:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = \gamma(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b \quad \text{και} \quad C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \delta(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b.$$

Παρατηρήστε ότι με αυτή την παραμετρικοποίηση η  $C_2$  έχει τον αντίθετο από τον επιθυμητό προσανατολισμό που βλέπουμε στο Σχήμα 30, αριστερά. Άρα έχουμε ότι:

$$\oint_{\partial D} M(x, y) dx = \int_{C_1} M(x, y) dx - \int_{C_2} M(x, y) dx,$$

όπου το πρόσημο « $-$ » στον δεύτερο όρο προκύπτει λόγω του αντίθετου προσανατολισμού.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} M(x, y) dx &= \int_a^b M(t, \gamma(t)) dt - \int_a^b M(t, \delta(t)) dt \\ &= \int_a^b [M(t, \gamma(t)) - M(t, \delta(t))] dt.\end{aligned}\quad (21)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε και τον όρο  $\iint_D -\frac{\partial M}{\partial y} dA$  και θα συγκρίνουμε το αποτέλεσμα με αυτό που μόλις βρήκαμε. Θεωρούμε λοιπόν το  $D$  ως χωρίο τύπου I και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\iint_D -\frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=\gamma(x)}^{y=\delta(x)} -\frac{\partial M}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b [-M(x, \delta(x)) + M(x, \gamma(x))] dx \\ &= \int_a^b [M(x, \gamma(x)) - M(x, \delta(x))] dx,\end{aligned}\quad (22)$$

όπου για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Άρα, συγκρίνοντας τις (21) και (22), βλέπουμε ότι:

$$\oint_{\partial D} M(x, y) dx = \iint_D -\frac{\partial M}{\partial y} dA.$$

Εντελώς ανάλογα μπορούμε να δείξουμε ότι αν θεωρήσουμε το  $D$  ως χωρίο τύπου II, τότε

$$\oint_{\partial D} N(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x} dA.$$

Άρα αποδείξαμε το Θεώρημα του Green όταν το  $D$  είναι ένα χωρίο τύπου III.

**Βήμα 2:** Έστω τώρα ότι το  $D$  δεν είναι τύπου III, αλλά μπορεί να χωριστεί σε ένα πεπερασμένο πλήθος χωρίων  $D_1, D_2, \dots, D_n$  που το καθένα είναι τύπου III, με τέτοιο τρόπο ώστε να επικαλύπτονται μόνο δύο τη φορά και μόνον κατά μήκος ενός κοινού συνόρου, βλ., π.χ., Σχήμα 31. Προφανώς, όπως δείξαμε στο Βήμα 1, το θεώρημα του Green ισχύει σε καθένα από τα χωρία  $D_i, i = 1, \dots, n$ . Άρα θα έχουμε ότι:

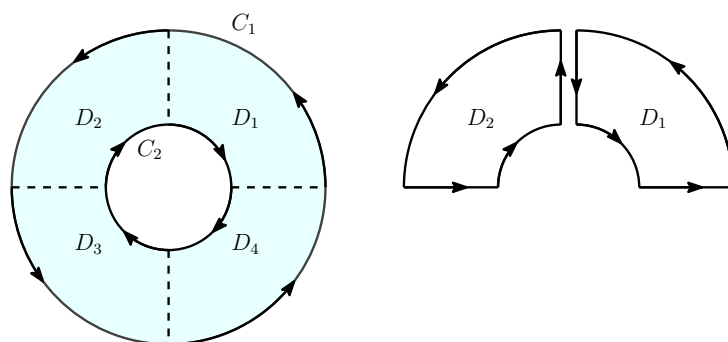
$$\begin{aligned}\iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA &= \iint_{D_1} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA + \dots + \iint_{D_n} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \oint_{\partial D_1} M dx + N dy + \dots + \oint_{\partial D_n} M dx + N dy.\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό είναι δελεαστικό να γράψουμε άμεσα ότι το τελευταίο άθροισμα ισούται με το  $\oint_{\partial D} M dx + N dy$ . Απαιτείται όμως κάποια προσοχή, μιας και κάποια κομμάτια του συνόρου  $\partial D_i$  του χωρίου  $D_i$  δεν είναι απαραίτητως κομμάτια του συνόρου  $\partial D$  του αρχικού

χωρίου  $D$ . Η κρίσιμη παρατήρηση όμως είναι ότι καθένα από τα μέρη του συνόρου  $\partial D_i$  που δεν είναι μέρος του  $\partial D$ , είναι μέρος ενός μόνο άλλου  $\partial D_j$ . Π.χ., στο Σχήμα 31 τα υποχωρία  $D_1$  και  $D_2$  έχουν ένα μόνο κοινό σύνορο και, μάλιστα, το κοινό αυτό σύνορο τη μία φορά υιοθετεί τον προσανατολισμό του  $D_1$  και την άλλη του  $D_2$  (που είναι αντίθετος με τον προηγούμενο). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι συνεισφορές στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα των τόξων των συνόρων  $\partial D_i$  που ανήκουν στο εσωτερικό του  $D$  να αλληλοαναιρούνται κατά ζεύγη. Άρα,

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA &= \oint_{\partial D_1} M dx + N dy + \cdots + \oint_{\partial D_n} M dx + N dy \\ &= \oint_{\partial D} M dx + N dy, \end{aligned}$$

και αποδείξαμε το θεώρημα του Green και σ' αυτήν την περίπτωση.



Σχήμα 31: Αριστερά: το χωρίο  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ , όπου καθένα από τα  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , είναι χωρίο τύπου III. Δεξιά: Το κοινό σύνορο των υποχωρίων  $D_1$  και  $D_2$  τη μία φορά υιοθετεί τον προσανατολισμό του  $D_1$  και την άλλη του  $D_2$  (που είναι αντίθετος με τον προηγούμενο).

**Βήμα 3:** Δυστυχώς δεν είναι δυνατόν για όλα τα χωρία που περιγράφονται στη διατύπωση του θεωρήματος του Green να βρούμε μια διαμέριση σε πεπερασμένο πλήθος υποχωρίων τύπου III. Παρόλα αυτά το θεώρημα του Green πρακτικά εφαρμόζεται σε κάθε «λογικό» χωρίο του  $\mathbb{R}^2$ . Η γενίκευση της απόδειξης για τέτοια χωρία ξεφεύγει από το σκοπό των σημειώσεων αυτών. □

**Σημείωση:** Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό. Κάποια από τα σχήματα του κεφαλαίου αυτού έχουν παρθεί από τα βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.



## Βιβλιογραφία

- S. J. Colley, *Vector Calculus*, 4th edition, Pearson, 2012.
- J. E. Marsden, A. J. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015.
- J. Hass, C. Heil, M.D. Weir, *Thomas Απειροστικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2018.