

Πολλαπλά ολοκληρώματα

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών
Σχολή Μηχανικών



Μάιος 2019

1 Διπλά ολοκληρώματα

1.1 Διπλά ολοκληρώματα συναρτήσεων που ορίζονται σε ορθογώνια χωρία

Ας ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας μερικά βασικά στοιχεία για το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής. Έστω ότι $f(x)$ είναι μια συνάρτηση που ορίζεται στο διάστημα $a \leq x \leq b$. Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε αρκετά μικρά διαδοχικά υποδιαστήματα με τη βοήθεια μιας επιλογής διαδοχικών σημείων

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Τα σημεία $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ ονομάζονται **διαιρετικά σημεία**, και το σύνολό τους $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ ονομάζεται **διαμέριση** του διαστήματος $[a, b]$. Στη συνέχεια, επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε **ενδιάμεσο** σημείο ξ_i σε κάθε υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, και κατασκευάζουμε το λεγόμενο **άθροισμα Riemann**

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Παρατήρηση: Γενικά, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις του διαστήματος $[a, b]$, διότι α) υπάρχουν άπειρες επιλογές του πλήθους n των υποδιαστημάτων που ορίζονται από τη διαμέριση και, β) για κάθε $n \geq 2$ υπάρχουν άπειρες επιλογές διαιρετικών σημείων $x_1, \dots, x_{n-1}$. Επομένως, και κάθε άθροισμα Riemann αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη διαμέριση Δ και σε μια συγκεκριμένη επιλογή ενδιάμεσων σημείων ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

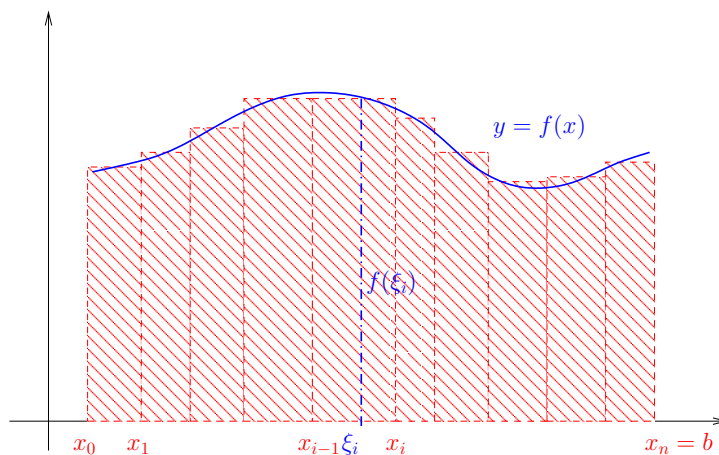
Αν υπάρχει αριθμός A τον οποίο προσεγγίζουν απερίοριστα τα αθροίσματα Riemann της συνάρτησης καθώς το πλήθος των σημείων της διαμέρισης αυξάνει και καθώς τα μήκη των διαστημάτων μικραίνουν, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Ο αριθμός A λέγεται (ορισμένο) ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$ και τον συμβολίζουμε

$$A = \int_a^b f(x) dx,$$

δηλαδή

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $f(x) \geq 0$, τότε το άθροισμα Riemann ερμηνεύεται ως το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων του Σχήματος 1, και το $\int_a^b f(x) dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x)$ και τον x -άξονα, για $a \leq x \leq b$.



Σχήμα 1: Χωρισμός σε κατακόρυφες στοιχειώδεις επιφάνειες.

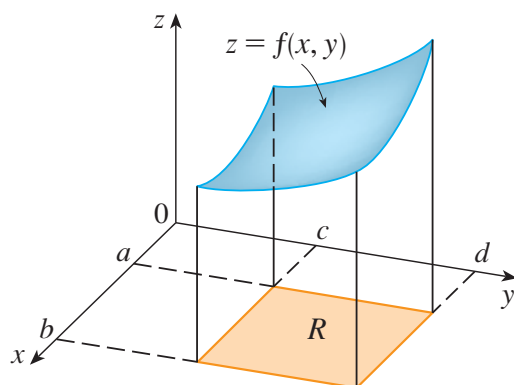
1.1.1 Διπλό ολοκλήρωμα συνάρτησης που ορίζεται σε ορθογώνιο, κλειστό και φραγμένο χωρίο

Θα εργαστούμε ανάλογα για συναρτήσεις δύο μεταβλητών που ορίζονται σε ένα κλειστό και φραγμένο ορθογώνιο χωρίο

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

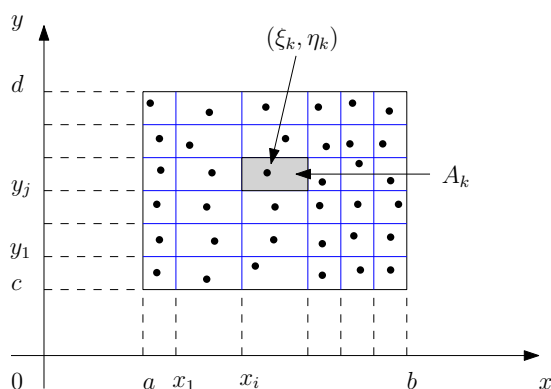
Αρχικά, θα υποθέσουμε ότι $f(x, y) \geq 0$. Το γράφημα της f είναι μια επιφάνεια που περιγράφεται από την εξίσωση $z = f(x, y)$, βλ. Σχήμα 2.

Ας ονομάσουμε S το στερεό που ορίζεται από το χωρίο R και το γράφημα της f , δηλαδή $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$. Ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τον όγκο του S .



Σχήμα 2: Η επιφάνεια $z = f(x, y)$ για $(x, y) \in R$.

Το πρώτο μας βήμα είναι να χωρίσουμε το ορθογώνιο R σε μικρότερα ορθογώνια. Για τον λόγο αυτό παίρνουμε μια διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$ και μια διαμέριση του διαστήματος $[c, d]$, και από τα διαιρετικά σημεία φέρνουμε ευθείες παράλληλες στους άξονες των x και y , βλ. Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Διαμέριση του R σε μικρότερα ορθογώνια.

Έτσι κατασκευάζουμε μια διαμέριση του ορθογωνίου R σε n μικρότερα ορθογώνια, τα οποία αριθμούμε με κάποιο τρόπο. Ας συμβολίσουμε τα ορθογώνια αυτά A_k , $k = 1, \dots, n$. Σε κάθε ορθογώνιο A_k επιλέγουμε ένα σημείο (ξ_k, η_k) και προσεγγίζουμε τον όγκο του μέρους του στερεού S που αντιστοιχεί στο ορθογώνιο A_k από τη «λεπτή» ορθογώνια «στήλη» (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) που έχει βάση το A_k και ύψος $f(\xi_k, \eta_k)$, βλ. Σχήμα 4 (αριστερά), δηλαδή από τον αριθμό

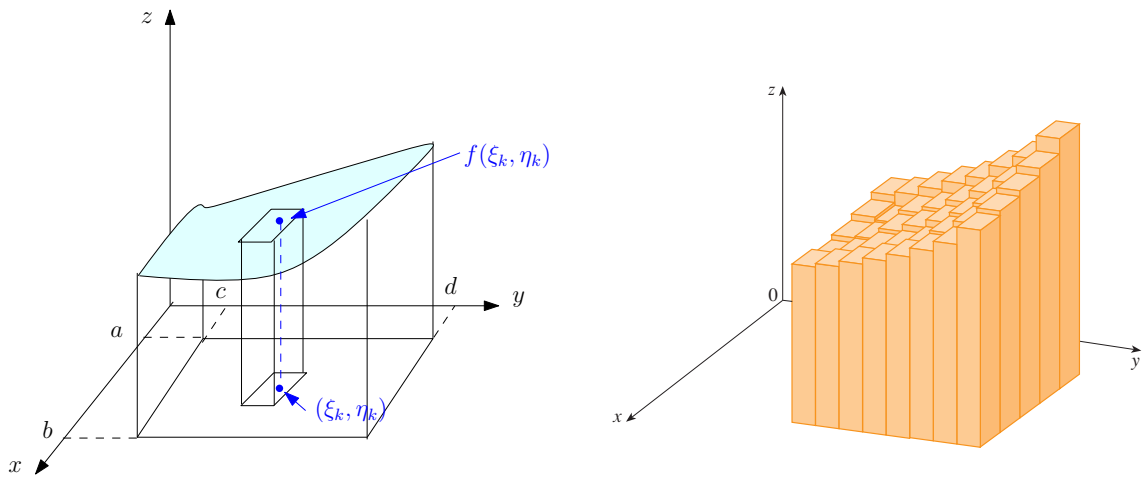
$$f(\xi_k, \eta_k) \Delta A_k,$$

όπου με ΔA_k συμβολίζουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου A_k . Ακολουθούμε την ίδια τακτική για όλα τα ορθογώνια του R , προσθέτουμε τους όγκους των αντίστοιχων ορθογωνίων παραλληλεπίπεδων, και έτσι βρίσκουμε μια προσέγγιση του συνολικού όγκου του στερεού S

από ένα άθροισμα Riemann:

$$\text{όγκος του } S \approx S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta A_k,$$

βλ. Σχήμα 4 (δεξιά). Φυσικά ανάλογα με το πώς επιλέγουμε τα σημεία (ξ_k, η_k) σε κάθε ορθογώνιο A_k θα παίρνουμε και διαφορετικές τιμές για το άθροισμα Riemann S_n και, επιπλέον, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις του χωρίου R σε ορθογώνια. Το ερώτημα είναι πώς συμπεριφέρονται τα αθροίσματα Riemann καθώς το μήκος και το πλάτος όλων των μικρών ορθογωνίων πλησιάζουν προς το μηδέν.



Σχήμα 4: **Αριστερά:** Προσέγγιση του μέρους του στερεού S που αντιστοιχεί στο ορθογώνιο A_k από το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση A_k και ύψος $f(\xi_k, \eta_k)$. **Δεξιά:** Προσέγγιση του στερεού S με ορθογώνια παραλληλεπίπεδα που αντιστοιχούν σε μια διαμέριση του R .

Επομένως, θέλουμε να εξετάσουμε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta A_k,$$

υπό την έννοια ότι καθώς $n \rightarrow \infty$, τόσο το μήκος όσο και το πλάτος κάθε ορθογωνίου A_k τείνουν προς το μηδέν, οπότε το πλήθος n των A_k αυξάνει αλλά το εμβαδόν τους $\Delta A_k \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

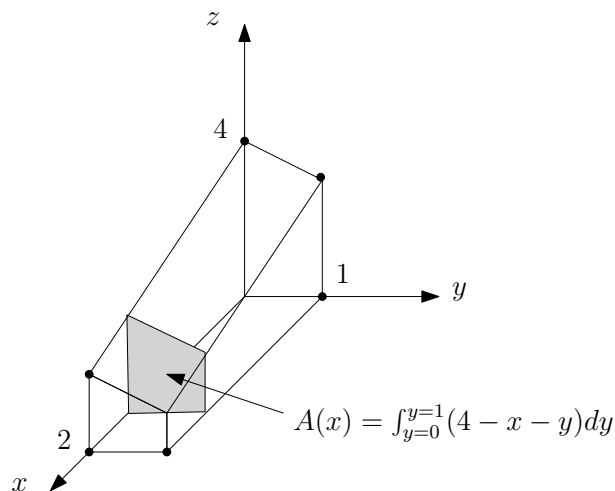
Εαν υπάρχει ένας αριθμός τον οποίο προσεγγίζουν απεριορίστα τα αθροίσματα Riemann της συνάρτησης καθώς το πλήθος των σημείων της διαμέρισης αυξάνει και καθώς τα εμβαδά των ορθογωνίων μικραίνουν, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο R . Ο αριθμός αυτός λέγεται (ορισμένο) ολοκλήρωμα της f στο R και τον συμβολίζουμε

$$\iint_R f(x, y) dA.$$

Παράδειγμα. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $z = 4 - x - y$, για τα (x, y) που ανήκουν στο ορθογώνιο χωρίο

$$R = [0, 2] \times [0, 1] = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\},$$

βλ. Σχήμα 5.



Σχήμα 5

Σταθεροποιούμε ένα x μεταξύ 0 και 2, θεωρούμε την τομή του στερεού με το επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα των x , και συμβολίζουμε το εμβαδόν της διατομής με $A(x)$, βλέπε Σχήμα 5. Τότε το εμβαδόν $A(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) dy,$$

ενώ ο όγκος του στερεού από το ολοκλήρωμα

$$\int_{x=0}^{x=2} A(x) dx.$$

Αντικαθιστώντας έχουμε :

$$\begin{aligned} \text{Όγκος} &= \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \left(4 - x - \frac{1}{2} \right) dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{7}{2} - x \right) dx = \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=2} = 5. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι ο παραπάνω υπολογισμός υποδεικνύει ότι για να υπολογίσουμε τον όγκο ολοκληρώνουμε αρχικά τη συνάρτηση $4 - x - y$ ως προς y από $y = 0$ έως $y = 1$ κρατώντας το x σταθερό, και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε την έκφραση που θα προκύψει ως προς x από $x = 0$ έως $x = 1$. Δηλαδή υπολογίζουμε δύο **διαδοχικά ολοκληρώματα**.

Είναι καλό να επαληθεύσετε ότι θα φτάναμε στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα αν παίρναμε τομές με επίπεδα κάθετα στον άξονα των y . □

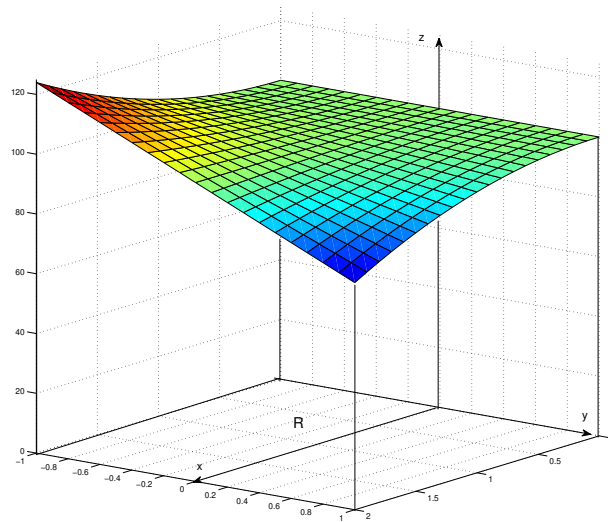
Γενικά, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.1 (Θεώρημα Fubini). Αν $f(x, y)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση που ορίζεται στο ορθογώνιο χωρίο $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Το θεώρημα Fubini μας επιτρέπει να υπολογίσουμε διπλά ολοκληρώματα συναρτήσεων που ορίζονται σε ορθογώνια χωρία ως διαδοχικά ολοκληρώματα.

Παράδειγμα 1. Υπολογίστε το $\iint_R f(x, y) dA$ αν $f(x, y) = 100 - 6x^2y$ και $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$ (Σχήμα 6).



Σχήμα 6: Η επιφάνεια $z = 100 - 6x^2y$, για $(x, y) \in R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$.

Από το Θεώρημα Fubini έχουμε:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \int_0^2 (100 - 6x^2y) dx dy = \int_{-1}^1 \left[100x - \frac{6x^3y}{3} \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_{-1}^1 (200 - 16y) dy = \left[200y - \frac{16y^2}{2} \right]_{-1}^1 \\ &= \left(200 - \frac{16}{2} \right) - \left(-200 - \frac{16}{2} \right) = 400. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2. Υπολογίστε το $\iint_R (10 + x^2 + 3y^2) dA$, αν $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

Από το Θεώρημα Fubini έχουμε:

$$\begin{aligned}\iint_R (10 + x^2 + 3y^2) dA &= \int_0^1 \int_0^2 (10 + x^2 + 3y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 [10y + x^2y + y^3]_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 (20 + 2x^2 + 8) dx = \int_0^1 (28 + 2x^2) dx \\ &= \left[28x + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{86}{3}.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3. Υπολογίστε το $\iint_R y \sin(xy) dA$, αν $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi\}$.

Ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς x και στη συνέχεια ως προς y :

$$\begin{aligned}\iint_R y \sin(xy) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy) dx dy = \int_0^\pi \left[-\cos(xy) \right]_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y) dy = \left[-\frac{1}{2} \sin 2y + \sin y \right]_0^\pi \\ &= \left(-\frac{1}{2} \sin 2\pi + \sin \pi \right) - \left(-\frac{1}{2} \sin 0 + \sin 0 \right) = 0.\end{aligned}$$

□

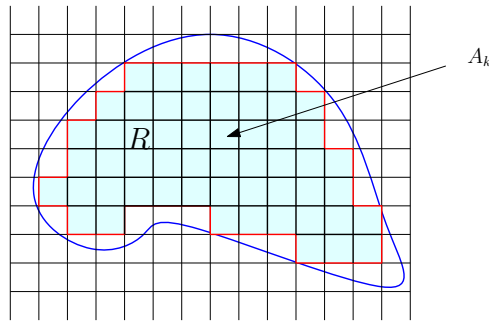
1.1.2 Διπλό ολοκλήρωμα συνάρτησης που ορίζεται σε φραγμένο, γενικό χωρίο

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να υπολογίσουμε διπλά ολοκληρώματα συναρτήσεων που ορίζονται σε φραγμένα χωρία του επιπέδου που είναι γενικότερα από τα ορθογώνια.

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $f(x, y)$ που ορίζεται σε ένα φραγμένο μη ορθογώνιο χωρίο R , όπως αυτό που οριοθετείται από τη μπλε καμπύλη του Σχήματος 7.

Όπως κάναμε και στην περίπτωση του ορθογώνιου χωρίου καλύπτουμε το χωρίο με ένα πλέγμα μικρών ορθογώνιων κελιών. Τώρα όμως δεν μπορούμε να καλύψουμε ακριβώς το R με ένα πεπερασμένο πλήθος τέτοιων μικρών ορθογώνιων αφού το σύνορο του R είναι καμπυλόγραμμο. Συγκεκριμένα, καθορίζουμε μια διαμέριση του R που αποτελείται από εκείνα τα ορθογώνια που ανήκουν εξ' ολοκλήρου μέσα στο R . Με τον τρόπο αυτό προσεγγίζουμε το R από το πολυγωνικό χωρίο που σημειώνεται με γαλάζιο χρώμα στο Σχήμα 7. Στη συνέχεια αριθμούμε και πάλι το ορθογώνια κελιά A_k , $k = 1, \dots, n$, επιλέγουμε ένα σημείο (ξ_k, η_k) σε κάθε A_k , $k = 1, \dots, n$, και σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta A_k$$



Σχήμα 7: Μια διαμέριση σε μικρά ορθογώνια του φραγμένου, μη ορθογωνίου χωρίου R .

Αν η $f(x, y)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και το R ένα αρκετά «ομαλό» χωρίο, τότε καθώς λεπταίνουμε τη διαμέριση του R , δηλαδή καθώς $n \rightarrow \infty$ έτσι ώστε τόσο το μήκος όσο και το πλάτος κάθε ορθογωνίου A_k να τείνουν στο μηδέν, τα αθροίσματα Riemann θα συγκλίνουν και πάλι σε έναν αριθμό που ονομάζεται διπλό ολοκλήρωμα της $f(x, y)$ στο R :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta A_k = \iint_R f(x, y) dA.$$

Παρατήρηση: Το σύνορο του χωρίου R δημιουργεί διάφορα προβλήματα στον παραπάνω ορισμό. Όπως είδαμε, στη γενική περίπτωση, τα n ορθογώνια της διαμέρισης βρίσκονται μέσα στο R αλλά δεν καλύπτουν ολόκληρο το R . Συνεπώς, καθώς λεπταίνουμε τη διαμέρισή μας, αυτή θα προσεγγίζει καλά το R όσο το μέρος του R που δεν καλύπτεται από τα ορθογώνια γίνεται αμελητέο. Όλα τα χωρία που θα μελετήσουμε στη συνέχεια θα έχουν αυτή τη συμπεριφορά, και γενικά, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα με σύνορα που είναι πολυγωνικές γραμμές, κύκλοι, ελλείψεις κλπ.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε συγκεκριμένα είδη χωρίων.

Ορισμός 1.1. Ένα επίπεδο φραγμένο χωρίο R θα λέμε ότι είναι χωρίο τύπου I, αν βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων δύο συνεχών συναρτήσεων του x ,

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Στο Σχήμα 8 δίνονται παραδείγματα χωρίων τύπου I.

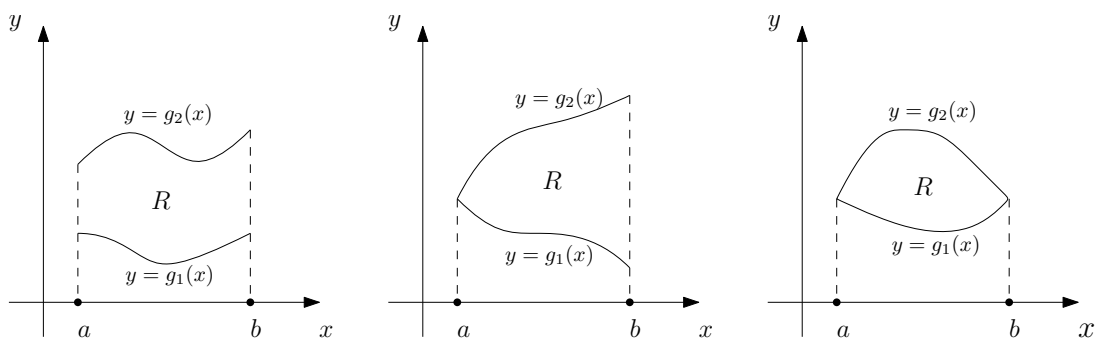
Ορισμός 1.2. Ένα επίπεδο φραγμένο χωρίο R της μορφής

$$R = \{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

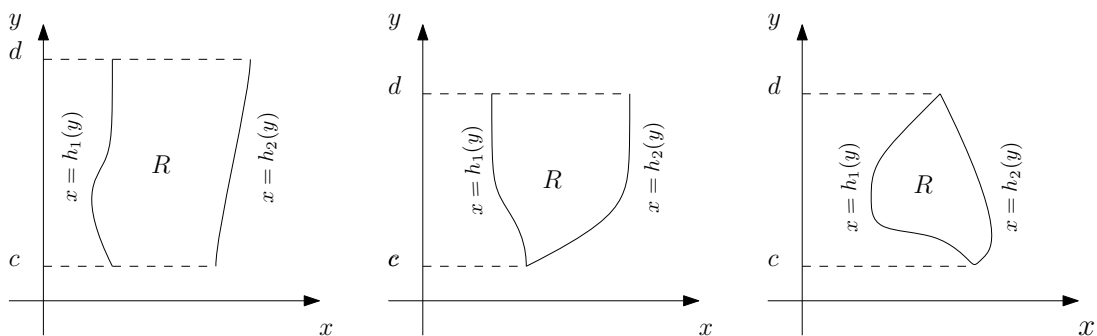
θα λέμε ότι είναι χωρίο τύπου II.

Στο Σχήμα 9 δίνονται παραδείγματα χωρίων τύπου II.

Για συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται σε χωρία τύπου I ή II ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:



Σχήμα 8: Παραδείγματα χωρίων τύπου I.



Σχήμα 9: Παραδείγματα χωρίων τύπου II.

Θεώρημα 1.2. Έστω $f(x, y)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη σ' ένα χωρίο R .

- Αν το R είναι τύπου I, με g_1, g_2 συνεχείς στο $[a, b]$, τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

- Αν το R είναι τύπου II, με h_1, h_2 συνεχείς στο $[c, d]$, τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

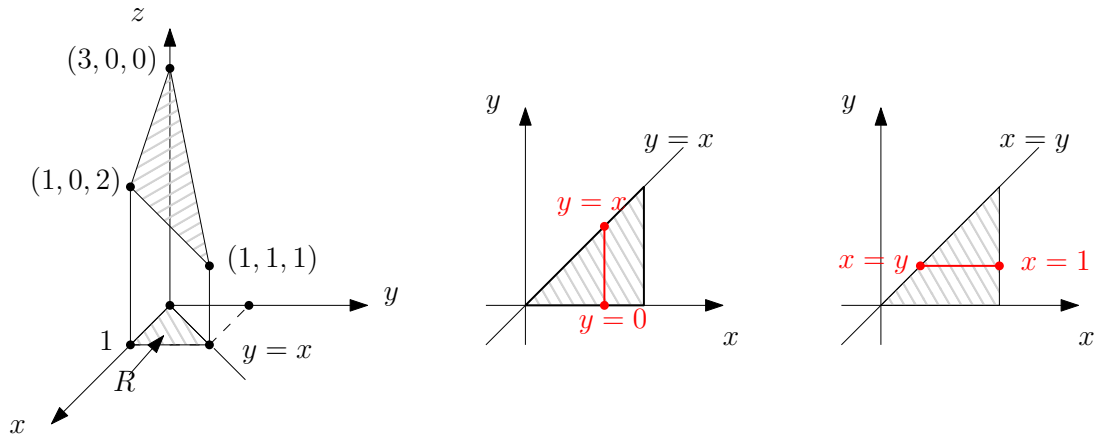
Παράδειγμα 1. Υπολογίστε τον όγκο του πρίσματος που έχει ως βάση το τρίγωνο στο xy -επίπεδο που σχηματίζουν ο x -άξονας, και οι ευθείες $y = x$ και $x = 1$, ενώ η πάνω έδρα καθορίζεται από το επίπεδο

$$z = f(x, y) = 3 - x - y.$$

Λύση. Ο όγκος του ζητούμενου στερεού (βλ. Σχήμα 10, αριστερά), αν θεωρήσουμε το τριγωνικό χωρίο R ως χωρίο τύπου I (βλ. Σχήμα 10, κέντρο), δίνεται από το ακόλουθο διπλό

ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (3 - x - y) dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} (3 - x - y) dy dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left(3x - x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$



Σχήμα 10: Αριστερά: Το πρίσμα του Παραδείγματος 1. Κέντρο: Το R ως χωρίο τύπου I. Δεξιά: Το R ως χωρίο τύπου II.

Αν θεωρήσουμε το τριγωνικό χωρίο R ως χωρίο τύπου II (βλ. Σχήμα 10, δεξιά), τότε ο όγκος του ζητούμενου στερεού δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (3 - x - y) dA = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} (3 - x - y) dx dy = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=y}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left[3 - \frac{1}{2} - y - \left(3y - \frac{y^2}{2} - y^2 \right) \right] dy = \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3y^2}{2} \right) dy \\ &= \left[\frac{5y}{2} - 2y^2 + \frac{y^3}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{2} - 2 + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2. Υπολογίστε το $\iint_R (x + 2y) dA$, όπου R είναι το φραγμένο χωρίο που περικλείεται από τις παραβολές $y = 2x^2$ και $y = 1 + x^2$.

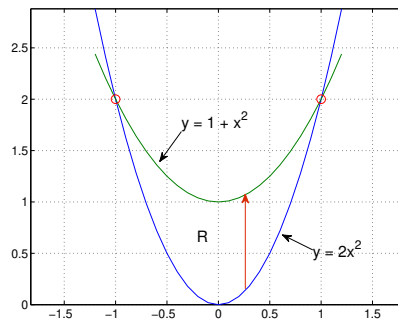
Λύση. Στο Σχήμα 11 σχεδιάζουμε τις δύο παραβολές $y = 2x^2$ και $y = 1 + x^2$.

Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο παραβολών λύνουμε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 2x^2 \\ y = 1 + x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Άρα τα σημεία τομής είναι $(-1, 2)$ και $(1, 2)$. Το χωρίο R περιγράφεται ως

$$R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\},$$



Σχήμα 11: Το χωρίο R που περικλείεται από τις παραβολές $y = 2x^2$ και $y = 1 + x^2$.

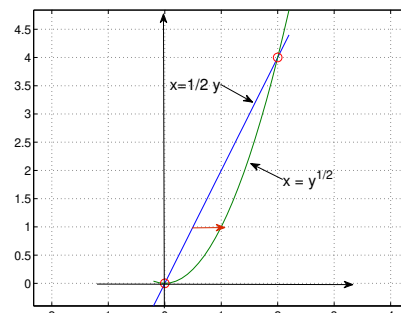
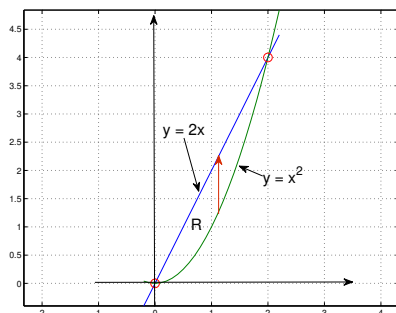
και άρα είναι ένα χωρίο τύπου I. Επομένως,

$$\begin{aligned} \iint_R (x + 2y) dA &= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=2x^2}^{y=1+x^2} (x + 2y) dy dx = \int_{-1}^1 \left[xy + y^2 \right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[x(1+x^2) + (1+x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2 \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 (x + x^3 + 1 + 2x^2 + x^4 - 2x^3 - 4x^4) dx \\ &= \int_{-1}^1 (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) dx = \left[-\frac{3x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 \\ &= \left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{6}{5} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3. Υπολογίστε το $\iint_R (4x + 2) dA$, όπου R είναι το φραγμένο χωρίο που περικλείεται από την ευθεία $y = 2x$ και την παραβολή $y = x^2$.

Λύση. Στο Σχήμα 12 σχεδιάζουμε την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = 2x$.



Σχήμα 12: Το χωρίο R που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = 2x$ ως χωρίο τύπου I (αριστερά) και ως χωρίο τύπου II (δεξιά).

Για να βρούμε τα σημεία τομής της παραβολής και της ευθείας λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2.$$

Άρα τα σημεία τομής είναι $(0, 0)$ και $(2, 4)$. Το χωρίο R μπορούμε να το δούμε και ως τύπου I και ως τύπου II. Ας το θεωρήσουμε αρχικά ως τύπου I, βλ. Σχήμα 12, αριστερά:

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \iint_R (4x+2) dA &= \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=x^2}^{y=2x} (4x+2) dy dx = \int_0^2 \left[4xy + 2y \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^2 (4x(2x) + 2(2x) - 4x(x^2) - 2x^2) dx \\ &= \int_0^2 (8x^2 + 4x - 4x^3 - 2x^2) dx = \int_0^2 (-4x^3 + 6x^2 + 4x) dx \\ &= \left[-x^4 + 2x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = -16 + 16 + 8 = 8. \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε το R ως τύπου II, βλ. Σχήμα 12, δεξιά:

$$R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}\},$$

τότε

$$\begin{aligned} \iint_R (4x+2) dA &= \int_{y=0}^{y=4} \int_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} (4x+2) dx dy = \int_0^4 \left[2x^2 + 2x \right]_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^4 \left(2y + 2\sqrt{y} - \frac{y^2}{2} - y \right) dy = \int_0^4 \left(y + 2\sqrt{y} - \frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2} + \frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^4 = 8 + \frac{32}{3} - \frac{64}{6} = 8. \end{aligned}$$

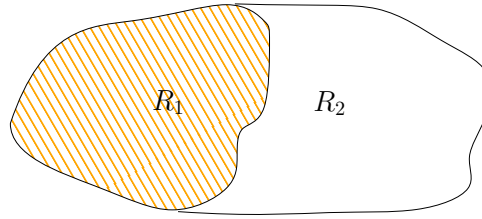
□

1.1.3 Ιδιότητες διπλών ολοκληρωμάτων

Αν οι $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο φραγμένο χωρίο R , τότε:

1. $\iint_R c f(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA$
2. $\iint_R (f(x, y) \pm g(x, y)) dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA$
3. $\iint_R f(x, y) dA \geq 0$, αν $f(x, y) \geq 0$ στο R
 $\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA$, αν $f(x, y) \geq g(x, y)$ στο R
4. $\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$,

όπου R_1, R_2 είναι δύο μη αλληλοκαλυπτόμενα χωρία που η ένωσή τους είναι το R , βλ. Σχήμα 13. ($R = R_1 \cup R_2$ με $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.)



Σχήμα 13: $R = R_1 \cup R_2$.

Παράδειγμα. Εκφράστε το $\iint_R f(x, y) dA$ ως διαδοχικά ολοκληρώματα, όπου $f(x, y)$ είναι μια θετική συνάρτηση και R είναι το φραγμένο χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που περικλείεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 25$, την ευθεία $y = \frac{3}{4}x$ και τον x -άξονα.

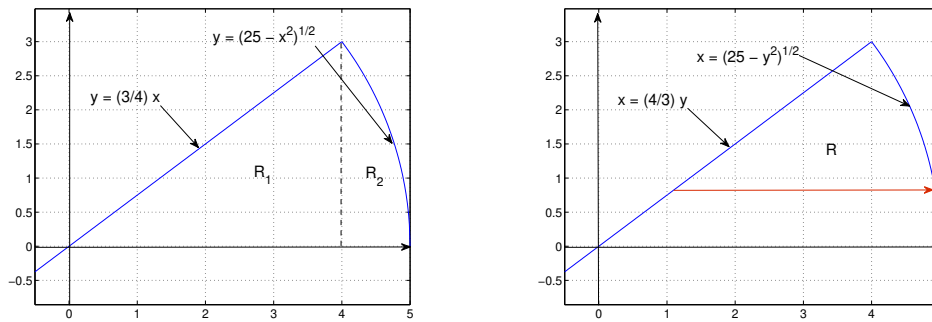
Λύση. Για να βρούμε τα σημεία τομής του κύκλου και της ευθείας λύνουμε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \frac{3}{4}x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{25}{16}x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4.$$

Επειδή ενδιαφερόμαστε για το πρώτο τεταρτημόριο έχουμε $x = 4 \Rightarrow y = 3$. Άρα το σημείο τομής είναι το $(4, 3)$.

Κοιτώντας το Σχήμα 14, αριστερά, διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε το χωρίο R ως ένωση δύο χωρίων τύπου I, των

$$R_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{3}{4}x\} \text{ και } R_2 = \{(x, y) : 4 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}.$$



Σχήμα 14: Το χωρίο R του πρώτου τεταρτημορίου που περικλείεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 25$, την ευθεία $y = \frac{4}{3}x$ και τον x -άξονα ως την ένωση δύο χωρίων τύπου I (αριστερά) και ως χωρίο τύπου II (δεξιά).

Επομένως, λόγω της Ιδιότητας 4, έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA \\ &= \int_0^4 \int_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy dx, \end{aligned}$$

και βλέπουμε ότι αυτή η περιγραφή απαιτεί τον υπολογισμό δύο διπλών ολοκληρωμάτων. Μπορούμε όμως να εκφράσουμε το χωρίο R και ως χωρίο τύπου II, βλ. Σχήμα 14, δεξιά,

$$R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 3, \frac{4}{3}y \leq x \leq \sqrt{25 - y^2}\}.$$

Στην περίπτωση αυτή

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_0^3 \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx dy,$$

οπότε απαιτείται ο υπολογισμός ενός μόνο διπλού ολοκληρώματος. □

1.1.4 Το εμβαδό χωρίου ως διπλό ολοκλήρωμα

Το εμβαδόν A ενός κλειστού και φραγμένου επίπεδου χωρίου R είναι:

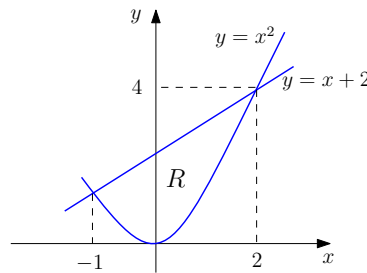
$$A = \iint_R dA.$$

Παράδειγμα 1. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία $y = x + 2$ και την παραβολή $y = x^2$.

Λύση. Για να βρούμε τα σημεία τομής της παραβολής και της ευθείας λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2.$$

Άρα τα σημεία τομής είναι $(-1, 1)$ και $(2, 4)$.



Σχήμα 15: Το χωρίο R που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = x + 2$.

Το χωρίο R (Σχήμα 15) είναι τύπου I,

$$R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x + 2\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA = \int_{x=-1}^{x=2} \int_{y=x^2}^{y=x+2} dy dx = \int_{-1}^2 \left[y \right]_{y=x^2}^{y=x+2} dx \\ &= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

□

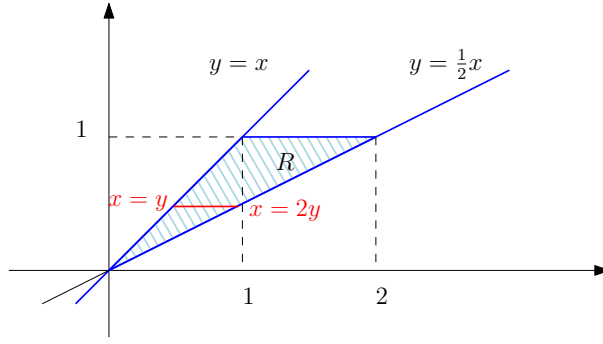
Παράδειγμα 2. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου: $0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2y$.

Λύση. Το χωρίο $R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2y\}$ περικλείεται από τις ευθείες $y = x$ και $y = \frac{1}{2}x$ που τέμνονται στην αρχή των αξόνων, και από την οριζόντια ευθεία $y = 1$, βλ. Σχήμα 16.

Το χωρίο R είναι τύπου II, οπότε

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=2y} dx dy = \int_0^1 \left[x \right]_y^{2y} dy = \int_0^1 (2y - y) dy \\ &= \int_0^1 y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

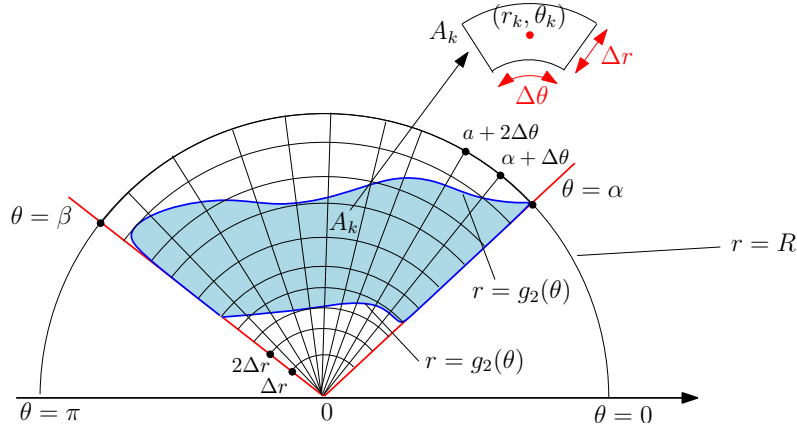
□



Σχήμα 16: Το χωρίο $R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2y\}$.

1.2 Διπλά ολοκληρώματα σε πολική μορφή

Έστω τώρα ότι έχουμε μια συνάρτηση σε πολικές συντεταγμένες $f(r, \theta)$ με πεδίο ορισμού ένα χωρίο $\mathcal{R}$ που φράσσεται από τις ακτίνες $\theta = \alpha$ και $\theta = \beta$, και τις συνεχείς καμπύλες $r = g_1(\theta)$ και $r = g_2(\theta)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $0 \leq g_1(\theta) \leq g_2(\theta) \leq R$, βλ. Σχήμα 17, δηλαδή θεωρούμε ότι το χωρίο $\mathcal{R}$ περιέχεται σε ένα χωρίο (κυκλικό τομέα) $Q = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$.



Σχήμα 17: Το χωρίο $\mathcal{R} = \{(r, \theta) : g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ (απεικονίζεται με γαλάζιο χρώμα), και μια διαμέριση του κυκλικού τομέα $Q = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ από «πολικά ορθογώνια».

Καλύπτουμε το Q με ένα πλέγμα που αποτελείται από ακτίνες και κυκλικά τόξα. Τα τόξα αυτά ανήκουν σε κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνες $\Delta r, 2\Delta r, \dots, k\Delta r$, ενώ οι ακτίνες καθορίζονται από τις γωνίες $\theta = \alpha, \theta = \alpha + \Delta\theta, \dots, \theta = \alpha + m\Delta\theta = \beta$. Αριθμούμε τα κελιά A_k του πλέγματος που ανήκουν στο $\mathcal{R}$, με $k = 1, \dots, n$. Κάθε τέτοιο κελί στις πλευρές του οποίου οι τιμές του r και του θ είναι σταθερές, λέμε ότι είναι ένα «πολικό ορθογώνιο». Σε κάθε κελί A_k με εμβαδόν ΔA_k , επιλέγουμε ένα σημείο (r_k, θ_k) , $k = 1, \dots, n$,

και σχηματίζουμε το άθροισμα

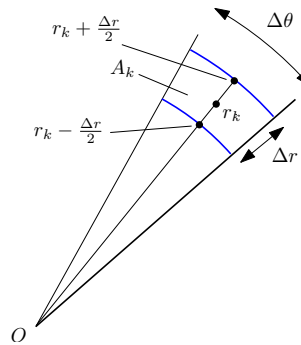
$$S_n = \sum_{k=1}^n f(r_k, \theta_k) \Delta A_k.$$

Αν η f είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\mathcal{R}$, τότε καθώς λεπταίνουμε τη διαμέριση ώστε τα $\Delta\theta$ και Δr να τείνουν στο 0, το άθροισμα αυτό θα τείνει προς έναν αριθμό τον οποίο αποκαλούμε διπλό ολοκλήρωμα της f στο $\mathcal{R}$. Συμβολικά

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iint_{\mathcal{R}} f(r, \theta) dA.$$

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι αν, χάριν ευκολίας, επιλέξουμε σε κάθε πολικό ορθογώνιο A_k το σημείο r_k να είναι ο μέσος όρος της εσωτερικής και της εξωτερικής ακτίνας που ορίζουν το A_k , βλ. Σχήμα 18, τότε το «πολικό ορθογώνιο» A_k έχει εμβαδόν

$$\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta.$$



Σχήμα 18: Το «πολικό ορθογώνιο» A_k έχει εμβαδόν $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$.

Τότε το άθροισμα S_n γράφεται στη μορφή

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r \Delta \theta,$$

και μια μορφή του Θεωρήματος Fubini μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, που ισούται με το $\iint_{\mathcal{R}} f(r, \theta) dA$, ως διαδοχικά ολοκληρώματα, πρώτα ως προς r και μετά ως προς θ . Συγκεκριμένα,

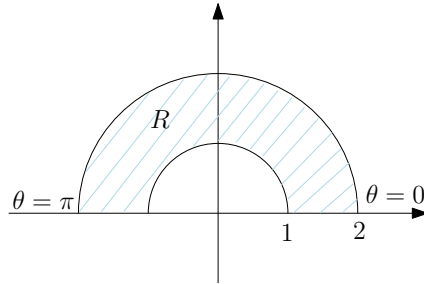
$$\iint_{\mathcal{R}} f(r, \theta) dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta. \quad (1)$$

Σημείωση: Προσοχή, όταν υπολογίζετε διπλό ολοκλήρωμα σε ένα πολικό χωρίο **μην ξεχνάτε τον επιπλέον παράγοντα r** που εμφανίζεται στο δεύτερο μέλος της (1).

Παράδειγμα 1. Υπολογίστε το

$$\iint_R (3r \cos \theta + 1) dA,$$

όπου το χωρίο R είναι το χωρίο του άνω ημιεπιπέδου που περικλείεται από τους κύκλους $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 = 4$, βλ. Σχήμα 19.



Σχήμα 19: Το χωρίο R στο άνω ημιεπίπεδο που περικλείεται από τους κύκλους $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 = 4$.

Λύση. Το χωρίο R περιγράφεται σε πολική μορφή ως $R = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \iint_R (3r \cos \theta + 1) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos \theta + 1) r dr d\theta = \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2 \cos \theta + r) dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[r^3 \cos \theta + \frac{r^2}{2} \right]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^\pi \left(8 \cos \theta + 2 - \cos \theta - \frac{1}{2} \right) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(7 \cos \theta + \frac{3}{2} \right) d\theta = \left[7 \sin \theta + \frac{3}{2} \theta \right]_0^\pi = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.1. Το εμβαδόν ενός κλειστού και φραγμένου χωρίου R σε πολικές συντεταγμένες είναι:

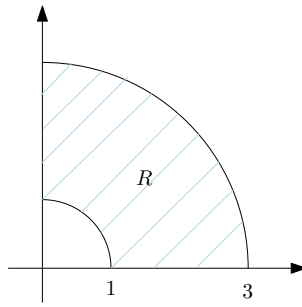
$$A = \iint_R r dr d\theta.$$

Παράδειγμα 2. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου R που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τους κύκλους $r = 1$ και $r = 3$.

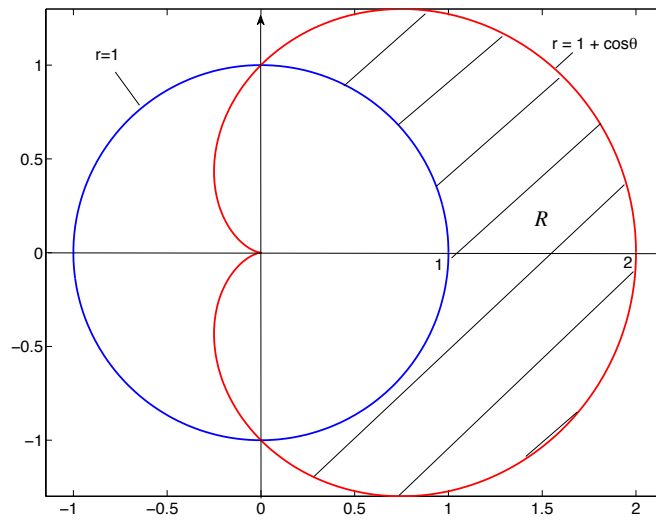
Λύση. Λόγω της Πρότασης 1.1 το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \int_{r=1}^{r=3} r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=1}^{r=3} d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) d\theta = \left[4\theta \right]_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

□



Σχήμα 20: Το χωρίο R που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τους κύκλους $r = 1$ και $r = 3$.



Σχήμα 21: Το χωρίο R που περικλείεται από τον κύκλο $r = 1$ και την καρδιοειδή καμπύλη $r = 1 + \cos \theta$.

Παράδειγμα 3. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου R που περικλείεται από τον κύκλο $r = 1$ και την καρδιοειδή καμπύλη $r = 1 + \cos \theta$, βλ. Σχήμα 21.

Λύση. Λόγω της Πρότασης 1.1 το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos \theta} r \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=1}^{r=1+\cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1 + \cos \theta)^2 - 1] \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 \theta + 2 \cos \theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε το πρώτο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε τον τριγωνομετρικό τύπο

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{1}{8} \left[\sin 2\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[\sin \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= \frac{\pi}{4} + 0 + 2 = 2 + \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

□

1.2.1 Μετατροπή διπλών ολοκληρωμάτων από καρτεσιανή σε πολική μορφή

Για να μετατρέψουμε ένα ολοκλήρωμα από την καρτεσιανή μορφή $\iint_R f(x, y) dx dy$ σε πολική μορφή, πρώτα αντικαθιστούμε $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, και στη θέση του $dx dy$ βάζουμε $r dr d\theta$. Στη συνέχεια καθορίζουμε τα όρια της ολοκλήρωσης του πολικού χωρίου. Συγκεκριμένα,

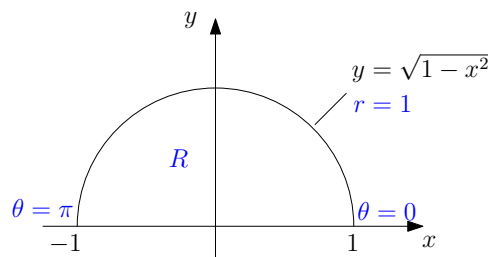
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta, \quad (2)$$

όπου με G συμβολίζουμε το χωρίο R εκφρασμένο σε πολικές συντεταγμένες.

Παράδειγμα 1. Υπολογίστε το

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dy dx,$$

όπου το χωρίο R είναι το ημικυκλικό χωρίο που περικλείεται από τον άξονα των x και την καμπύλη $y = \sqrt{1-x^2}$, βλ. Σχήμα 22.



Σχήμα 22: Το χωρίο R που περικλείεται από τον άξονα των x και την καμπύλη $y = \sqrt{1-x^2}$.

Λύση. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα δεν είναι καθόλου εύκολο να υπολογιστεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες μιας και δεν υπάρχει απ' ευθείας τρόπος να ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση $e^{x^2+y^2}$ είτε ως προς x ή ως προς y . Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή αντικαθιστούμε $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, και στη θέση του $dx dy$ βάζουμε $r dr d\theta$. Το χωρίο R

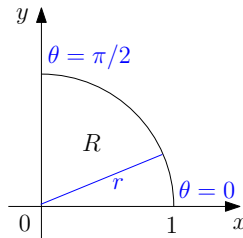
περιγράφεται σε πολική μορφή ως $R = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \iint_R e^{x^2+y^2} dy dx &= \int_0^\pi \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^1 d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2} (e - 1) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (e - 1) \left[\theta \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} (e - 1). \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2. Υπολογίστε το

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx.$$



Σχήμα 23: Το χωρίο R του Παραδείγματος 2.

Λύση. Το χωρίο $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ είναι το μέρος του δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1, που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο, βλέπε Σχήμα 23. Σε πολική μορφή περιγράφεται ως $R = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

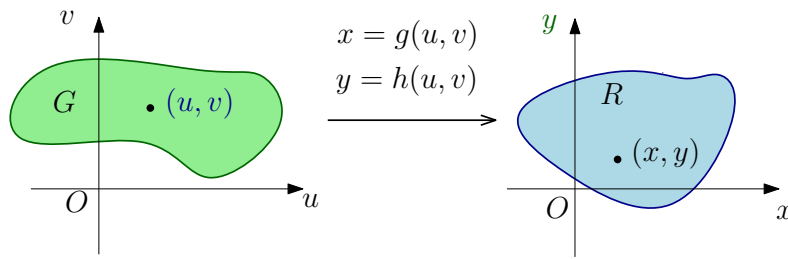
□

1.3 Αντικαταστάσεις σε διπλά ολοκληρώματα

Η μετατροπή διπλών ολοκληρωμάτων από καρτεσιανή σε πολική μορφή που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο αποτελεί μια ειδική μορφή μιας γενικότερης μεθόδου αντικατάστασης για διπλά ολοκληρώματα, η οποία αντιμετωπίζει την αλλαγή μεταβλητών ως ένα μετασχηματισμό χωρίων.

Για να γίνουμε συγκεκριμένοι, έστω ότι G είναι ένα χωρίο στο uv -επίπεδο το οποίο μετασχηματίζεται (1-1) σε ένα χωρίο R του xy -επιπέδου μέσω εξισώσεων της μορφής

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v),$$



Σχήμα 24: Οι εξισώσεις $x = g(u, v)$ και $y = h(u, v)$ ορίζουν ένα μετασχηματισμό του χωρίου G του uv -επιπέδου στο χωρίο R του xy -επιπέδου.

βλ. Σχήμα 24.

Θα αποκαλούμε το χωρίο R το *είδωλο* του χωρίου G μέσω του μετασχηματισμού, ενώ το G προ-είδωλο του R . Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε συνάρτηση $f(x, y)$ με πεδίο ορισμού το R , ως μια συνάρτηση $f(g(u, v), h(u, v))$ με πεδίο ορισμού το G . Επιπλέον, κάτω από κάποιες προϋποθέσεις που θα δούμε στη συνέχεια, μπορούμε να συσχετίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της $f(x, y)$ στο R με το διπλό ολοκλήρωμα της $f(g(u, v), h(u, v))$ στο G ως εξής:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_G f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (3)$$

Ο όρος $J(u, v)$ που η απόλυτη τιμή του εμφανίζεται στη σχέση (3) είναι η λεγόμενη *Ιακωβιανή του μετασχηματισμού* $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ (το όνομα οφείλεται στο γερμανό μαθηματικό Carl Jacobi (1804–1851)), και ορίζεται ως εξής:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}. \quad (4)$$

Σημειώνουμε ότι η (3) ισχύει αν οι f , g και h έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, και η Ιακωβιανή $J(u, v)$ μηδενίζεται, το πολύ, σε μεμονωμένα σημεία. Η απόδειξη της (3) είναι αρκετά περίπλοκη και υπερβαίνει το επίπεδο και τους στόχους των σημειώσεων αυτών.

Παράδειγμα 1. Βρείτε την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού από πολικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες και χρησιμοποιήστε την (3) για να γράψετε το ολοκλήρωμα $\iint_R f(x, y) dx dy$ ως ένα πολικό ολοκλήρωμα.

Λύση. Όπως γνωρίζουμε, ο μετασχηματισμός από πολικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από τις σχέσεις

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

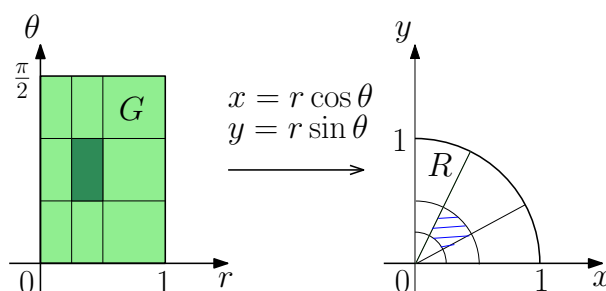
Άρα

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Επειδή το $r \geq 0$ (αφού συμβολίζει ακτίνα) έχουμε ότι $|J(r, \theta)| = |r| = r$, επομένως η (3) γίνεται:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Παρατηρήστε ότι ο τύπος αυτός είναι ο ίδιος με τον (2) τον οποίο είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.



Σχήμα 25: Οι εξισώσεις $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$ ορίζουν ένα μετασχηματισμό του χωρίου G του καρτεσιανού $r\theta$ -επιπέδου, στο χωρίο R του καρτεσιανού xy -επιπέδου.

Τέλος, στο Σχήμα 25 απεικονίζουμε πώς οι εξισώσεις $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ μετασχηματίζουν το ορθογώνιο $G = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ στον κυκλικό τομέα R του πρώτου τεταρτημορίου του καρτεσιανού xy -επιπέδου που φράσσεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$. □

Παράδειγμα 2 (γραμμικού μετασχηματισμού). Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx dy,$$

εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό

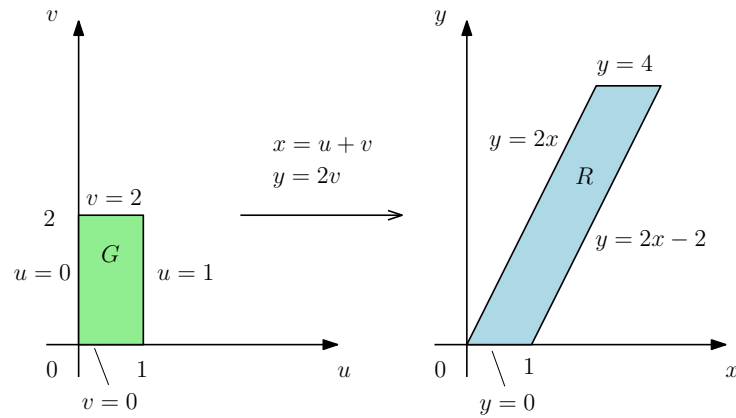
$$u = \frac{2x-y}{2}, \quad v = \frac{y}{2}, \tag{5}$$

και ολοκληρώνοντας πάνω σε ένα κατάλληλο χωρίο του uv -επιπέδου.

Λύση. Αρχικά σχεδιάζουμε το χωρίο ολοκλήρωσης R στο xy -επίπεδο (βλ. Σχήμα 26, δεξιά) και καθορίζουμε τις εξισώσεις που χαρακτηρίζουν το σύνορό του.

Στη συνέχεια, για να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (3), πρέπει να καθορίσουμε το αντίστοιχο χωρίο G στο uv -επίπεδο και την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού. Για το σκοπό αυτό λύνουμε τις εξισώσεις (5) ως προς x και y . Άμεσα βλέπουμε ότι

$$x = u + v, \quad y = 2v. \tag{6}$$



Σχήμα 26: Οι εξισώσεις $x = u + v$ και $y = 2v$ ορίζουν ένα μετασχηματισμό του χωρίου G του καρτεσιανού uv -επιπέδου, στο χωρίο R του καρτεσιανού xy -επιπέδου. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός, δηλ. οι εξισώσεις $u = (2x - y)/2$, $v = y/2$ απεικονίζει το χωρίο R στο χωρίο G .

Για να βρούμε τις εξισώσεις που καθορίζουν το σύνορο του G αντικαθιστούμε τις (6) στις εξισώσεις που καθορίζουν το σύνορο του R και έχουμε:

Για το κάτω σύνορο: $y = 0 \Rightarrow 2v = 0 \Rightarrow v = 0$.

Για το πάνω σύνορο: $y = 4 \Rightarrow 2v = 4 \Rightarrow v = 2$.

Για το αριστερό σύνορο: $x = y/2 \Rightarrow u + v = 2v/2 \Rightarrow u + v = v \Rightarrow u = 0$.

Για το δεξιό σύνορο: $x = (y/2) + 1 \Rightarrow u + v = (2v/2) + 1 \Rightarrow u + v = v + 1 \Rightarrow u = 1$.

Επομένως καταλήγουμε στο ορθογώνιο χωρίο R , που απεικονίζεται αριστερά στο Σχήμα 26. Επίσης, η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u + v) & \frac{\partial}{\partial v}(u + v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Τώρα πια είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την (3):

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx dy &= \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=1} u |J(u, v)| du dv = \int_0^2 \int_0^1 2u du dv \\ &= \int_0^2 \left[u^2 \right]_0^1 dv = \int_0^2 dv = 2. \end{aligned}$$

□

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα διπλά ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{ll}(\alpha) & \int_0^1 \int_1^2 xy e^x dy dx \\(\gamma) & \int_{-1}^2 \int_0^{\pi/2} y \sin x dx dy\end{array} \quad \begin{array}{ll}(\beta) & \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x + \cos y) dx dy \\(\delta) & \int_0^2 \int_{-1}^1 (x - y) dy dx\end{array}$$

2. Υπολογίστε τα διπλά ολοκληρώματα στα χωρία που δίνονται:

$$\begin{array}{ll}(\alpha) & \iint_R (6y^2 - 2x) dA, \quad R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}. \\(\beta) & \iint_R xy \cos y dA, \quad R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\}. \\(\gamma) & \iint_R e^{x-y} dA, \quad R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \ln 2, 0 \leq y \leq \ln 2\}.\end{array}$$

3. Υπολογίστε το $\iint_R 3y^3 e^{xy} dA$, όπου R είναι το φραγμένο χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $x = 0$, $y = 1$ και την καμπύλη $x = y^2$. (Απάντηση: $e - 2$.)

4. Υπολογίστε το $\iint_R y dA$, όπου $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$. (Απάντηση: $\pi/4$.)

5. Υπολογίστε το

$$\iint_R \frac{\sin y}{y} dA,$$

όπου R είναι το φραγμένο χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $x = 0$, $y = x$ και $y = \pi$. (Απάντηση: 2.)

6. Υπολογίστε το $\iint_R xy dA$, όπου R είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 1)$, $(4, 1)$, $(1, 2)$. (Απάντηση: $31/8$.)

7. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται κάτω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και πάνω από το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $x = y^2$. (Απάντηση: $6/35$.)

8. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου R που περικλείεται από τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$ και $y = 2 - x$. (Απάντηση: 2.)

9. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου R που περικλείεται από τις καμπύλες $y = 2x^2 - 2$ και $y = x^2 - 1$. (Απάντηση: $4/3$.)

10. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου R που περικλείεται από τις ευθείες $y = 2$ και $y = 1 - x$ και την καμπύλη $y = e^x$. (Απάντηση: $2 \ln 2 - \frac{1}{2}$.)

11. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου R που περικλείεται από την ευθεία $y = x/2$ και την καμπύλη $y^2 = 3x$. (Απάντηση: 12.)

12. Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες για να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_R \cos(x^2 + y^2) dA,$$

όπου R το χωρίο που βρίσκεται πάνω από τον x -άξονα και βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$. (Απάντηση: $(\pi/2) \sin 9$.)

13. Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες για να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_R \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} dA,$$

όπου $R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$. (Απάντηση: 2π .)

2 Τριπλά ολοκληρώματα

2.1 Τριπλά ολοκληρώματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Όπως ορίσαμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής και το διπλό ολοκλήρωμα για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, έτσι μπορούμε να ορίσουμε και το τριπλό ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών. Θα ξεκινήσουμε με την απλούστερη περίπτωση μιας συνάρτησης $f(x, y, z)$ που ορίζεται σε ένα ορθογώνιο «κουτί» (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) B :

$$B = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}.$$

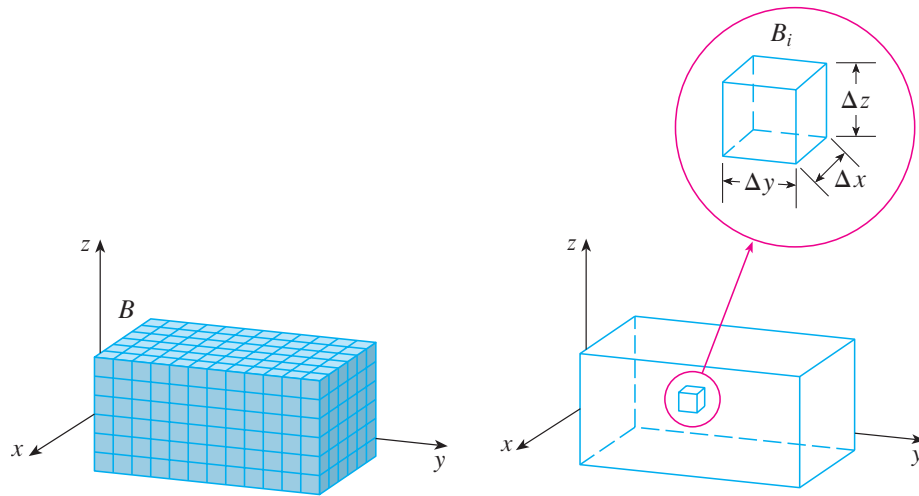
Καταρχήν χωρίζουμε το B σε n μικρότερα κουτάκια $B_i, i = 1, \dots, n$. Για ευκολία, ας θεωρήσουμε ότι όλα είναι ίσα και το καθένα έχει διαστάσεις $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$, βλ. Σχήμα 27. Τότε ο όγκος ΔV του κάθε κουτιού είναι ίσος με $\Delta x \Delta y \Delta z$.

Σε κάθε κουτάκι B_i επιλέγουμε ένα σημείο (x_i, y_i, z_i) και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V.$$

Όπως ακριβώς κάναμε και στο διπλό ολοκλήρωμα ορίζουμε το τριπλό ολοκλήρωμα ως το όριο του παραπάνω αθροίσματος Riemann. Άρα το ολοκλήρωμα της f στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο B ορίζεται ως εξής:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V. \quad (7)$$



Σχήμα 27: Διαμέριση του B σε μικρότερα κουτιά B_i (από Stewart, Calculus: Concepts and Contexts, CRC 2008).

Το όριο αυτό (όταν υπάρχει) είναι ανεξάρτητο της διαμέρισης και του τρόπου επιλογής των σημείων (x_i, y_i, z_i) . Τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο B . Και πάλι μπορεί να αποδειχθεί ότι αν η f είναι συνεχής στο B , τότε είναι ολοκληρώσιμη.

Όπως κάναμε και με τα διπλά ολοκληρώματα έτσι και εδώ για να υπολογίσουμε πρακτικά ένα τριπλό ολοκλήρωμα το εκφράζουμε ως διαδοχικά ολοκληρώματα με τον τρόπο που διατυπώνεται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.1 (Fubini). Αν $f(x, y, z)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση που ορίζεται στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $B = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$, τότε

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz.$$

Φυσικά, υπάρχουν άλλες πέντε δυνατότητες όσον αφορά τη σειρά ολοκλήρωσης. Π.χ., μπορούμε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y , μετά ως προς z και, τέλος, ως προς x , και έχουμε

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx.$$

Παράδειγμα 2.1. Υπολογίστε το

$$\iiint_B xyz^2 dV$$

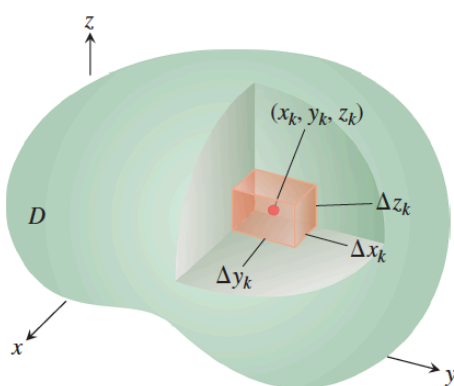
όταν

$$B = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}.$$

Λύση. Π.χ., αν επιλέξουμε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x , μετά ως προς y και, τέλος, ως προς z , έχουμε

$$\begin{aligned}\iiint_B xyz^2 dV &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dx dy dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2 y z^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy dz \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{y z^2}{2} dy dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2 z^2}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} dz = \int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz \\ &= \left[\frac{z^3}{4} \right]_{z=0}^{z=3} = \frac{27}{4}.\end{aligned}$$

□



Σχήμα 28: Διαμέριση του D σε μικρότερα κουτιά όγκου ΔV_k (από THOMAS Απειροστικός Λογισμός, ΠΕΚ 2018).

Τώρα θα ορίσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα για μια συνάρτηση f που ορίζεται σε ένα **γενικό φραγμένο χωρίο** (στερεό) D στον τριδιάστατο χώρο. Για το σκοπό αυτό περικλείουμε το D σε ένα κουτί B , που ορίζεται όπως πριν, και διαμερίζουμε το B σε μικρότερα κουτάκια. Στη συνέχεια λαμβάνουμε υπ' όψιν τα κουτάκια αυτά που περιέχονται εξ' ολοκλήρου μέσα στο D , βλ. Σχήμα 28, και ορίζουμε μια συνάρτηση F που ταυτίζεται με την f στο D και είναι 0 για σημεία του B που βρίσκονται εκτός του D . Τότε,

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iiint_B F(x, y, z) dV.$$

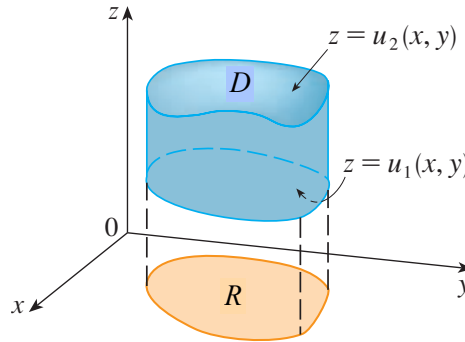
Το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει αν η f είναι συνεχής και το σύνορο του D είναι «αρκούντως ομαλό». Το τριπλό ολοκλήρωμα έχει ουσιαστικά τις ίδιες ιδιότητες που έχει και το διπλό ολοκλήρωμα και οι οποίες αναφέρονται στην Παράγραφο 1.1.3.

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με συνεχείς συναρτήσεις f και με συγκεκριμένα είδη σχετικώς απλών χωρίων.

Ορισμός 2.1. Ένα στερεό φραγμένο χωρίο D θα λέμε ότι είναι **χωρίο τύπου 1**, αν βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων δύο συνεχών συναρτήσεων των x, y ,

$$D = \{(x, y, z) : (x, y) \in R, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

όπου R είναι η **προβολή** του D στο xy -επίπεδο, βλ. Σχήμα 29.



Σχήμα 29: Χωρίο τύπου 1 (από Stewart, Calculus: Concepts and Contexts, CRC 2008).

Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν το D είναι ένα χωρίο τύπου 1, τότε

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA. \quad (8)$$

Αν, επιπλέον, η προβολή R του D στο xy -επίπεδο είναι **χωρίο τύπου I**, βλ. Σχήμα 30 αριστερά, τότε

$$D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

οπότε η εξίσωση (8) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

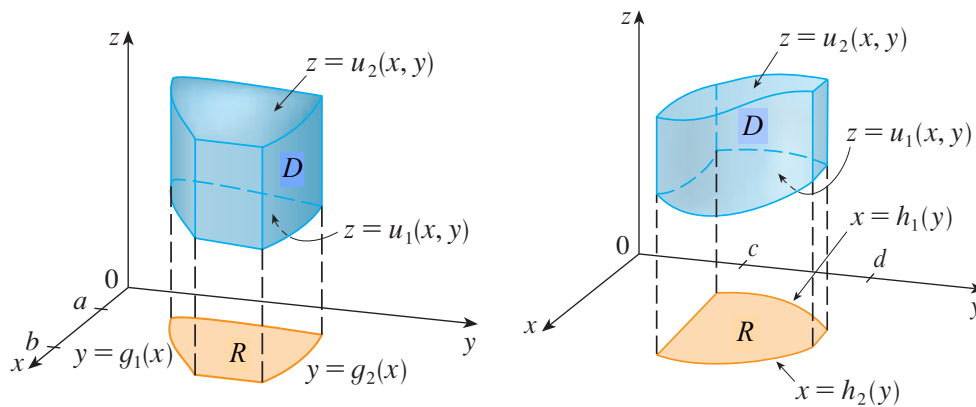
$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=u_1(x, y)}^{z=u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx. \quad (9)$$

Αν, τώρα, η προβολή R του D στο xy -επίπεδο είναι **χωρίο τύπου II**, βλ. Σχήμα 30 δεξιά, τότε

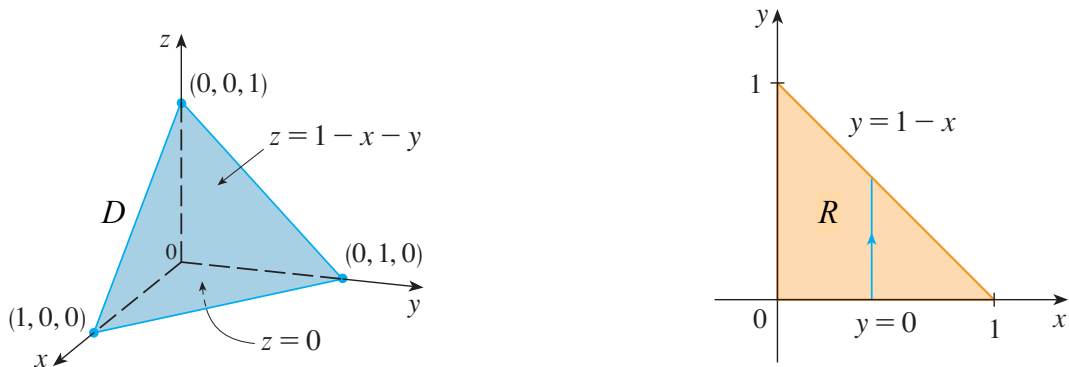
$$D = \{(x, y, z) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

και η εξίσωση (8) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} \int_{z=u_1(x, y)}^{z=u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy. \quad (10)$$



Σχήμα 30: Αριστερά: Το D είναι ένα χωρίο τύπου 1 και η προβολή του, R , είναι χωρίο τύπου I στο xy -επίπεδο. Δεξιά: Η προβολή R είναι χωρίο τύπου II στο xy -επίπεδο. (Από Stewart, Calculus: Concepts and Contexts, CRC 2008.)



Σχήμα 31: Αριστερά: Το στερεό τετράεδρο D του Παραδείγματος 2.2 ως χωρίο τύπου 1. Δεξιά: Η προβολή R ως χωρίο τύπου I στο xy -επίπεδο. (Από Stewart, Calculus: Concepts and Contexts, CRC 2008.)

Παράδειγμα 2.2. Υπολογίστε το $\iiint_D z \, dV$, όπου D είναι το στερεό τετράεδρο που ορίζουν τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, και $x + y + z = 1$, βλ. Σχήμα 31, αριστερά.

Λύση. Θα θεωρήσουμε το τετράεδρο D του Σχήματος 31 (αριστερά) ως ένα χωρίο τύπου 1 που φράσσεται από κάτω με το επίπεδο $z = 0$ (δηλαδή, με τον συμβολισμό της (8), $u_1(x, y) = 0$), και πάνω από το επίπεδο $x + y + z = 1$ (δηλαδή $u_2(x, y) = 1 - x - y$).

Για να υπολογίσουμε την προβολή του D στο xy -επίπεδο, παρατηρούμε ότι τα επίπεδα $x + y + z = 1$ και $z = 0$ τέμνονται κατά μήκος της ευθείας $x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$, στο xy -επίπεδο. Άρα η προβολή του D στο xy -επίπεδο είναι το τριγωνικό χωρίο R που απεικονίζεται στο Σχήμα 31, δεξιά. Θεωρούμε το R ως χωρίο τύπου I, επομένως

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
 \iiint_D z \, dV &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1-x} \int_{z=0}^{z=1-x-y} z \, dz \, dy \, dx = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1-x} (1-x-y)^2 dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{6} \left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{24}.
 \end{aligned}$$

□

Ορισμός 2.2. Ένα στερεό φραγμένο χωρίο D θα λέμε ότι είναι **χωρίο τύπου 2**, αν βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων δύο συνεχών συναρτήσεων των y, z ,

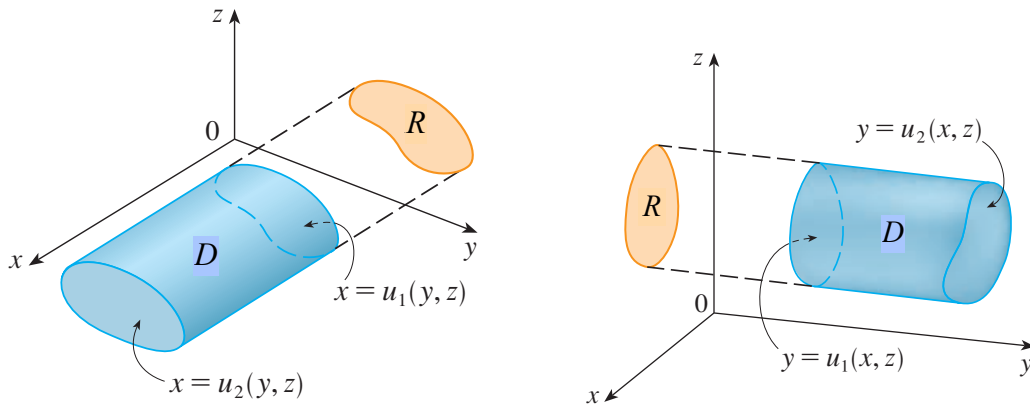
$$D = \{(x, y, z) : (y, z) \in R, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\},$$

όπου R είναι η **προβολή** του D στο yz -επίπεδο, βλ. Σχήμα 32, αριστερά.

Ανάλογα, θα λέμε ότι το D είναι **χωρίο τύπου 3**, αν βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων δύο συνεχών συναρτήσεων των x, z ,

$$D = \{(x, y, z) : (x, z) \in R, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\},$$

όπου, τώρα, R είναι η **προβολή** του D στο xz -επίπεδο, βλ. Σχήμα 32, δεξιά.



Σχήμα 32: Χωρίο τύπου 2 (αριστερά) και τύπου 3 (δεξιά). (Από Stewart, Calculus: Concepts and Contexts, CRC 2008.)

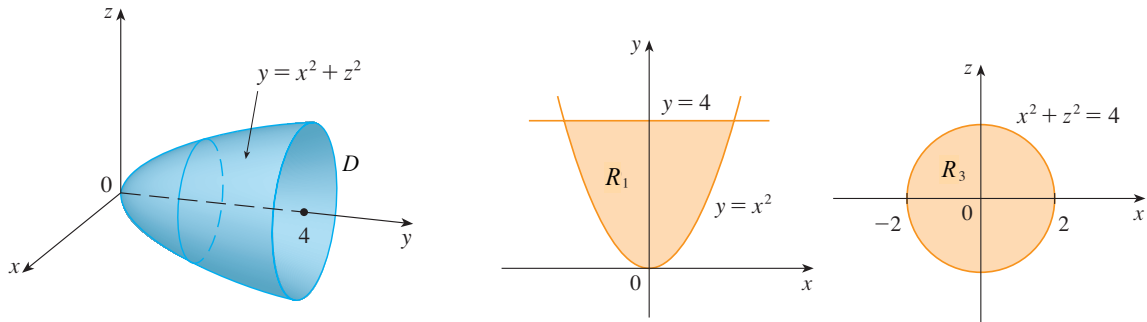
Στην περίπτωση που το D είναι ένα χωρίο τύπου 2, έχουμε

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dV = \iint_R \left(\int_{x=u_1(y, z)}^{x=u_2(y, z)} f(x, y, z) \, dx \right) dA, \quad (11)$$

ενώ αν το D είναι τύπου 3, ισχύει ότι:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{y=u_1(x,z)}^{y=u_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right) dA. \quad (12)$$

Φυσικά σε καθεμία από τις εξισώσεις (11) και (12) υπάρχουν δύο δυνατότητες υπολογισμού του ολοκληρώματος, ανάλογα με το αν η προβολή R είναι χωρίο τύπου I ή II στο αντίστοιχο επίπεδο.



Σχήμα 33: Αριστερά: Το παραβολοειδές χωρίο D του Παραδείγματος 2.3. Κέντρο: Προβολή του D στο xy -επίπεδο. Δεξιά: Προβολή του D στο xz -επίπεδο. (Από Stewart, Calculus: Concepts and Contexts, CRC 2008.)

Παράδειγμα 2.3. Υπολογίστε το $\iiint_D \sqrt{x^2 + z^2} dV$, όπου D είναι το τριδιάστατο χωρίο που ορίζουν το παραβολοειδές $y = x^2 + z^2$ και το επίπεδο $y = 4$, βλ. Σχήμα 33, αριστερά.

Λύση. Ας θεωρήσουμε καταρχήν το D ως ένα χωρίο τύπου 1 που φράσσεται κάτω από την επιφάνεια $z = -\sqrt{y - x^2}$ και πάνω από την επιφάνεια $z = \sqrt{y - x^2}$. Η προβολή R_1 του χωρίου D στο xy -επίπεδο, δηλαδή στο επίπεδο $z = 0$, είναι το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ και την ευθεία $y = 4$, βλ. Σχήμα 33 στο κέντρο. Άρα, μια περιγραφή του D ως χωρίο τύπου 1 είναι:

$$D = \{(x, y, z) : -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, -\sqrt{y - x^2} \leq z \leq \sqrt{y - x^2}\},$$

και έτσι θα πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + z^2} dV = \int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=x^2}^{y=4} \int_{z=-\sqrt{y-x^2}}^{z=\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2} dz dy dx.$$

Η έκφραση αυτή είναι μεν σωστή αλλά ιδιαίτερα δύσκολη στον υπολογισμό της. Για το λόγο αυτό ας θεωρήσουμε το D ως ένα χωρίο τύπου 3. Τότε, προφανώς, η προβολή του D στο xz -επίπεδο είναι ο δίσκος R_3 με κέντρο το σημείο $(0, 0)$ και ακτίνα 2, βλ. Σχήμα 33, δεξιά. Επιπλέον, το αριστερό σύνορο του D είναι η επιφάνεια (παραβολοειδές) $y = x^2 + z^2$ και το

δεξιό σύνορο είναι το επίπεδο $y = 4$. Άρα

$$\begin{aligned}\iiint_D \sqrt{x^2 + z^2} dV &= \iint_{R_3} \left(\int_{y=x^2+z^2}^{y=4} \sqrt{x^2 + z^2} dy \right) dA \\ &= \iint_{R_3} \left[y \right]_{y=x^2+z^2}^{y=4} \sqrt{x^2 + z^2} dA \\ &= \iint_{R_3} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} dA.\end{aligned}$$

Βεβαίως μπορούμε, π.χ., να θεωρήσουμε το R_3 ως χωρίο τύπου I και να γράψουμε το τελευταίο αυτό ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int_{x=-2}^{x=2} \int_{z=-\sqrt{4-x^2}}^{z=\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} dz dx.$$

Όμως, και πάλι, αυτή η έκφραση είναι αρκετά πολύπλοκη και φαίνεται ότι μας συμφέρει να κάνουμε μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες στο xz -επίπεδο. Δηλαδή, θεωρούμε:

$$x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta.$$

Τότε, προφανώς, $x^2 + z^2 = r^2$, $dA = r dr d\theta$, και έχουμε:

$$\begin{aligned}\iiint_D \sqrt{x^2 + z^2} dV &= \iint_{R_3} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) \sqrt{r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}.\end{aligned}$$

□

2.2 Εφαρμογές τριπλών ολοκληρωμάτων

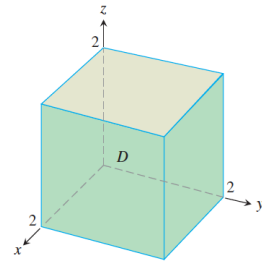
2.2.1 Μέση τιμή μιας συνάρτησης στον χώρο

Ορίζουμε τη μέση τιμή μιας συνάρτησης f σε ένα χωρίο D ως εξής:

$$\text{Μέση τιμή της } f \text{ στο } D = \frac{1}{\text{όγκος του } D} \iiint_D f(x, y, z) dV. \quad (13)$$

Ας δούμε τη φυσική σημασία του ορισμού αυτού μέσω ενός παραδείγματος: Αν η συνάρτηση $f(x, y, z)$ είναι η θερμοκρασία στο σημείο (x, y, z) ενός στερεού σώματος, που καταλαμβάνει το χωρίο D στον χώρο, τότε η μέση τιμή της f στο D εκφράζει τη μέση θερμοκρασία του στερεού σώματος.

Παράδειγμα 2.4. Βρείτε τη μέση τιμή της $f(x, y, z) = xyz$ στο χωρίο D , που είναι ένας κύβος που φράσσεται από τα επίπεδα συντεταγμένων ($x = 0, y = 0, z = 0$) και τα επίπεδα $x = 2, y = 2, z = 2$ στο πρώτο ογδομήριο, βλ. Σχήμα 34.



Σχήμα 34: Το χωρίο D (από THOMAS Απειροστικός Λογισμός, ΠΕΚ 2018).

Λύση. Προφανώς ο όγκος του D είναι ίσος με $(2)(2)(2) = 8$. Η τιμή του ολοκληρώματος της f στον κύβο D είναι:

$$\begin{aligned} \iiint_D xyz \, dV &= \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 xyz \, dx dy dz = \int_0^2 \int_0^2 yz \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=2} dy dz \\ &= \int_0^2 \int_0^2 2yz \, dy dz = \int_0^2 z \left[y^2 \right]_{y=0}^{y=2} dz = \int_0^2 4z \, dz = \left[2z^2 \right]_{z=0}^{z=2} = 8. \end{aligned}$$

Άρα από την (13) έχουμε:

$$\text{Μέση τιμή της } f \text{ στον κύβο } D = \frac{1}{\text{όγκος του } D} \iiint_D f(x, y, z) \, dV = \left(\frac{1}{8} \right) (8) = 1.$$

□

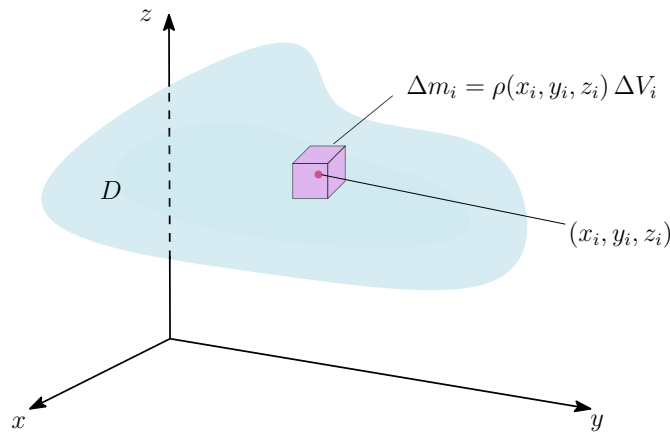
2.2.2 Μάζα και πρώτες ροπές

Έστω $\rho(x, y, z)$ είναι η πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα όγκου) ενός στερεού σώματος που καταλαμβάνει χωρίο D στον χώρο. Τότε η **μάζα** του σώματος D είναι ίση με:

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z) \, dV. \quad (14)$$

Μπορούμε διαισθητικά να καταλάβουμε γιατί ισχύει η (14) αν φανταστούμε ότι χωρίζουμε το D σε n στοιχειώδεις μάζες όπως αυτή του Σχήματος 35. Τότε η μάζα του σώματος είναι το όριο:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_D \rho(x, y, z) \, dV.$$



Σχήμα 35: Διαμέριση του D σε πεπερασμένο πλήθος στοιχειδών μαζών Δm_i .

Επιπλέον, οι **πρώτες ροπές** ως προς τα τρία επίπεδα συντεταγμένων είναι:

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_D x \rho(x, y, z) dV, \\ M_{xz} &= \iiint_D y \rho(x, y, z) dV, \\ M_{xy} &= \iiint_D z \rho(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (15)$$

Τότε το **κέντρο μάζας** βρίσκεται στο σημείο $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, όπου

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}. \quad (16)$$

Όταν η πυκνότητα είναι σταθερή, τότε το κέντρο μάζας ενός στερεού σώματος λέγεται **κεντροειδές** (centroid) του σώματος.

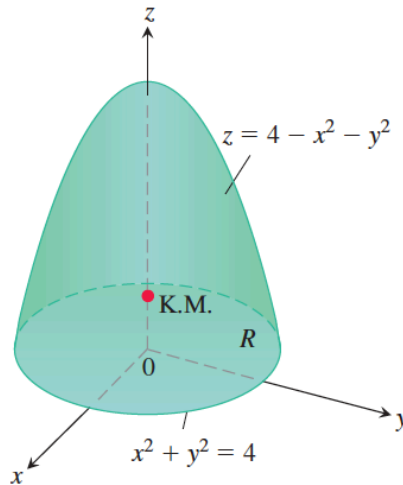
Σε διδιάστατα αντικείμενα R όπως, π.χ., μια λεπτή επίπεδη πλάκα, υπολογίζουμε τις πρώτες ροπές ως προς τους άξονες συντεταγμένων x και y , ξεχνώντας ουσιαστικά τη μεταβλητή z . Επομένως, η μάζα και οι πρώτες ροπές για διδιάστατα αντικείμενα είναι

$$m = \iint_R \rho(x, y) dA, \quad M_y = \iint_R x \rho(x, y) dA, \quad M_x = \iint_R y \rho(x, y) dA,$$

και το κέντρο μάζας βρίσκεται στο σημείο $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m})$.

Παράδειγμα 2.5. Βρείτε το κέντρο μάζας ενός στερεού σώματος D σταθερής πυκνότητας ρ που φράσσεται κάτω από τον δίσκο $R : x^2 + y^2 \leq 4$ και πάνω από το παραβολοειδές $z = 4 - x^2 - y^2$, βλ. Σχήμα 36.

Λύση. Λόγω της συμμετρίας του D ως προς τον z -άξονα είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι



Σχήμα 36: Το χωρίο D του Παραδείγματος 2.5 (από THOMAS Απειροστικός Λογισμός, ΠΕΚ 2018).

$\bar{x} = \bar{y} = 0$. Για να βρούμε το $\bar{z}$ θεωρούμε το D ως χωρίο τύπου 1 και εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_D z \rho \, dV = \iint_R \rho \left(\int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z \, dz \right) dA = \iint_R \rho \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} dA \\ &= \frac{\rho}{2} \iint_R (4 - x^2 - y^2)^2 dA. \end{aligned}$$

Είναι ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος αυτού. Επομένως, θέτουμε $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (άρα $x^2 + y^2 = r^2$), και υπενθυμίζουμε ότι $dA = r \, dr \, d\theta$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \frac{\rho}{2} \iint_R (4 - x^2 - y^2)^2 dA = \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)^2 r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[-\frac{1}{6}(4 - r^2)^3 \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{16\rho}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi\rho}{3}. \end{aligned}$$

Εντελώς ανάλογα υπολογίζουμε ότι:

$$m = \iiint_D \rho \, dV = 8\pi\rho.$$

Άρα $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{32\pi\rho/3}{8\pi\rho} = \frac{4}{3}$, και έτσι το κέντρο μάζας του σώματος (κεντροειδές, αφού η πυκνότητα είναι σταθερή) βρίσκεται στο σημείο με συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{4}{3})$. $\square$

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα τριπλά ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \quad \int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz \, dy \, dx \, dz. \quad (\text{Απάντηση: } 1.)$$

$$(\beta) \quad \int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y \, dx \, dz \, dy. \quad (\text{Απάντηση: } \frac{1}{3}(e^3 - 1).)$$

2. Υπολογίστε το $\iiint_D 2x \, dV$, όπου

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, 0 \leq z \leq y\}.$$

(Απάντηση: 4.)

3. Υπολογίστε το $\iiint_D 6xy \, dV$, όπου D είναι το χωρίο που φράσσεται από πάνω από το επίπεδο $z = 1 + x + y$ και από κάτω από το χωρίο του xy -επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x}$ και τις ευθείες $y = 0$ και $x = 1$. (Απάντηση: 65/28.)

4. Υπολογίστε το $\iiint_D x \, dV$, όπου D είναι το χωρίο που φράσσεται από το παραβολοειδές $x = 4y^2 + 4z^2$ και το επίπεδο $x = 4$. (Απάντηση: 16π/3.)

5. Βρείτε τη μάζα και το κέντρο μάζας του κύβου $D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$, όταν η πυκνότητα δίνεται από τη συνάρτηση $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. (Απάντηση: $a^5, (7a/12, 7a/12, 7a/12)$.)

Σημείωση: Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό. Κάποια από τα σχήματα του κεφαλαίου αυτού έχουν παρθεί από τα βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- E. Kreyszig, *Ανώτερα Μαθηματικά για Μηχανικούς*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2018.
- J. E. Marsden, A. J. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015.

- J. Stewart, *Calculus: Concepts and Contexts*, 6th edition, Brooks/Cole, 2008.
- J. Hass, C. Heil, M.D. Weir, *Thomas Απειροστικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2018.