

Εισαγωγή στα Διανυσματικά Πεδία

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών
Σχολή Μηχανικών



Μάιος 2019

1 Εισαγωγή στα διανυσματικά πεδία

Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε την έννοια του διανυσματικού πεδίου.

Ορισμός 1.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα **διανυσματικό πεδίο** στον $\mathbb{R}^n$ είναι μια απεικόνιση $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, που αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της, ένα διάνυσμα $F(x)$.

Κατ' αντιστοιχία, σε κάποιες περιπτώσεις θα αναφερόμαστε σε μια απεικόνιση $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ως ένα **βαθμωτό πεδίο**.

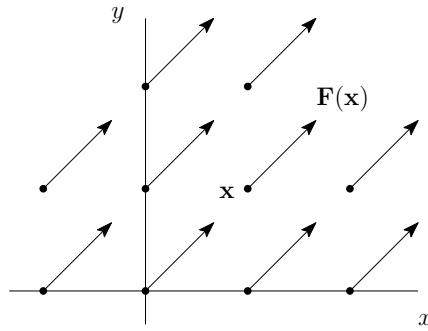
Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με διανυσματικά πεδία στον $\mathbb{R}^2$ και στον $\mathbb{R}^3$. Σχηματικά μπορούμε να φανταζόμαστε ότι ένα διανυσματικό πεδίο επισυνάπτει σε κάθε σημείο ένα βέλος.

Παραδείγματα.

1. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $F(x, y) = i + j$. Άρα η F απεικονίζει κάθε σημείο του επιπέδου στο σταθερό διάνυσμα $i + j$. Στο Σχήμα 1 βλέπουμε μια αναπαράσταση του διανυσματικού πεδίου αυτού.
2. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $F(x, y) = y i - x j$. Για να κατανοήσουμε το διανυσματικό πεδίο αυτό θα πρέπει να σκεφτούμε λίγο παραπάνω. Καταρχήν, παρατηρούμε ότι

$$|F(x, y)| = |y i - x j| = \sqrt{y^2 + x^2} = |r|,$$

όπου r είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου (x, y) , δηλαδή $r = x i + y j$.

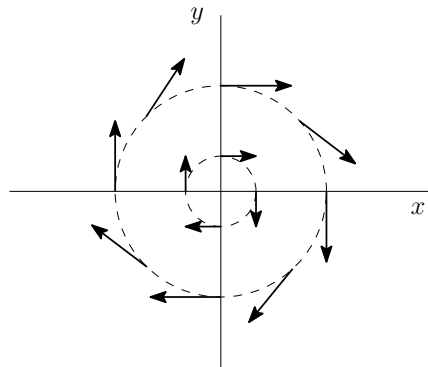


Σχήμα 1: Το σταθερό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Άρα το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ θα έχει σταθερό μέτρο a σε κύκλους με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα a (δηλαδή για $x^2 + y^2 = a^2$). Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(x, y) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}) = xy - yx = 0.$$

Άρα το $\mathbf{F}(x, y)$ είναι πάντα κάθετο προς το διάνυσμα θέσης του σημείου (x, y) . Στο Σχήμα 2 δίνεται μια αναπαράσταση του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$.



Σχήμα 2: Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.

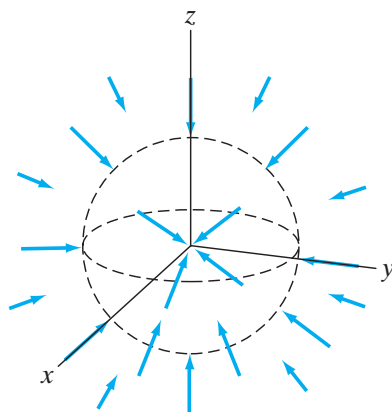
3. Έστω $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r},$$

όπου c είναι μια μηδενική σταθερά. Θεωρούμε το (μοναδιαίο) διάνυσμα $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$. Τότε

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = \frac{c}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{c}{|\mathbf{r}|^2} \mathbf{u}.$$

Άρα το $\mathbf{F}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο του οποίου η διεύθυνση στο σημείο $P(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{OP}$, και το μέτρο του είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το τετράγωνο της απόστασης του P από την αρχή των αξόνων. Παρατηρήστε ακόμη ότι η φορά του $\mathbf{F}$ είναι προς την αρχή των αξόνων όταν το c είναι αρνητικό,



Σχήμα 3: Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}$, για $c < 0$.

και από την αρχή των αξόνων προς τα έξω όταν το c είναι θετικό. Στο Σχήμα 3 δίνεται μια αναπαράσταση του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ για $c < 0$. $\square$

Ορισμός 1.2. Ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ θα λέμε ότι είναι **πεδίο κλίσεων (gradient field)** αν το $\mathbf{F}$ είναι η κλίση κάποιας (παραγωγίσιμης) συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Δηλαδή

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}), \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in A.$$

Τότε λέμε ότι η f είναι ένα (βαθμωτό) δυναμικό (potential function) για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$.

Έχουμε ήδη δει ότι η κλίση οποιασδήποτε συνάρτησης $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχώς παραγωγίσιμη είναι ορθογώνια προς τις ισοσταθμικές επιφάνειες της f . Επομένως, αν το $\mathbf{F}$ είναι ένα πεδίο κλίσεων στον $\mathbb{R}^n$, το διάνυσμα $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ θα πρέπει να είναι κάθετο στην ισοσταθμική επιφάνεια του βαθμωτού δυναμικού της $\mathbf{F}$ που περιέχει το σημείο $\mathbf{x}$. Αν η f είναι μια τέτοια συνάρτηση δυναμικού, θα λέμε ότι η ισοσταθμική επιφάνεια $f(\mathbf{x}) = c$ είναι μια **ισοδυναμική επιφάνεια** του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$.

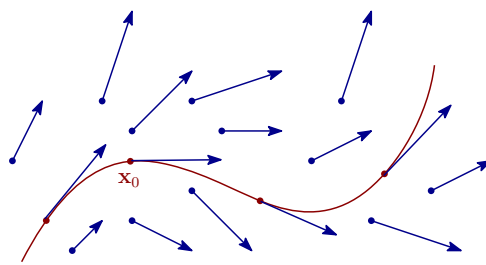
Ορισμός 1.3. Αν $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο, μια **γραμμή ροής** του $\mathbf{F}$ είναι μια καμπύλη $\mathbf{r}(t)$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).$$

Δηλαδή το $\mathbf{F}$ καθορίζει το πεδίο ταχυτήτων της καμπύλης $\mathbf{r}(t)$.

Γεωμετρικά, για να βρούμε μια γραμμή ροής ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ που περνάει από ένα σημείο $\mathbf{x}_0$, χαράζουμε μια καμπύλη μέσα από το διανυσματικό πεδίο έτσι ώστε το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης να συμπίπτει με το διανυσματικό πεδίο, βλ. Σχήμα 4.

Παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε και πάλι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{F}(x, y) = y \mathbf{i} - x \mathbf{j}$. Η διαίσθησή μας λέει ότι μια γραμμή ροής θα πρέπει να είναι κυκλική, όπως φαίνεται



Σχήμα 4: Γραμμή ροής ενός διανυσματικού πεδίου στο επίπεδο.

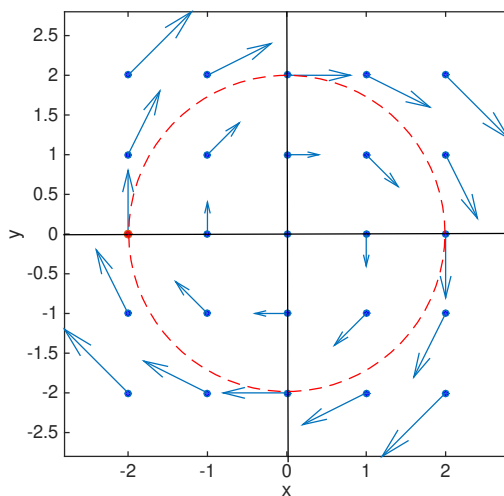
με τη διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 5. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την ακόλουθη καμπύλη (κύκλος με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα a)

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ με } \mathbf{r}(t) = (a \sin t, a \cos t), \quad \text{για } a \text{ σταθερο,}$$

τότε έχουμε ότι

$$\mathbf{r}'(t) = a \cos t \mathbf{i} - a \sin t \mathbf{j} = \mathbf{F}(a \sin t, a \cos t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).$$

Άρα οι κύκλοι αυτοί είναι πράγματι καμπύλες ροής.



Σχήμα 5: Γραμμή ροής του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}(x, y) = y \mathbf{i} - x \mathbf{j}$.

Η εύρεση όλων των καμπυλών ροής του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}(x, y) = y \mathbf{i} - x \mathbf{j}$ είναι πιο απαιτητικό πρόβλημα. Αν $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ είναι μια καμπύλη ροής, τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 1.3 θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \Leftrightarrow x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} = y(t) \mathbf{i} - x(t) \mathbf{j},$$

οπότε εξισώνοντας τις αντίστοιχες συνιστώσες θα έχουμε ότι

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}.$$

Αυτό είναι ένα σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Προκύπτει ότι όλες οι λύσεις του είναι της μορφής

$$\mathbf{r}(t) = (A \cos t + B \sin t, -A \sin t + B \cos t),$$

όπου A, B είναι αυθαίρετες σταθερές. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι οι καμπύλες αυτές διαγράφουν κύκλους όταν τουλάχιστον ένα από τα A και B δεν είναι μηδέν. $\square$

2 Κλίση, απόκλιση, στροβιλισμός

Στην παράγραφο αυτή θα θεωρήσουμε κάποιες «πράξεις παραγωγίσης» πάνω σε διανυσματικά και βαθμωτά πεδία. Συγκεκριμένα, θα δούμε:

1. Την κλίση (gradient), που μετατρέπει ένα βαθμωτό πεδίο σε διανυσματικό,
2. την απόκλιση (divergence), που μετατρέπει ένα διανυσματικό πεδίο σε βαθμωτό, και
3. τον στροβιλισμό (curl), που μετατρέπει ένα διανυσματικό πεδίο σε ένα άλλο διανυσματικό πεδίο.

2.1 Ο τελεστής «ανάδελτα» (∇) και η κλίση

Ο τελεστής «ανάδελτα» συμβολίζεται με το σύμβολο ∇ και στον $\mathbb{R}^3$ ορίζεται ως εξής:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1)$$

Οι «κενές» μερικές παράγωγοι είναι οι συνιστώσες ενός διανύσματος που αναμένει ένα κατάλληλο βαθμωτό ή διανυσματικό πεδίο για να δράσει. Π.χ., αν $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση (βαθμωτό πεδίο) η κλίση της f μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα του «πολλαπλασιασμού» κάθε συνιστώσας του ∇ με την f . Στην πραγματικότητα υπολογίζουμε την κατάλληλη μερική παράγωγο της f :

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

2.2 Η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου

Όπως είδαμε πριν η κλίση ενός βαθμωτού πεδίου είναι ένα διανυσματικό πεδίο. Η απόκλιση επιφέρει το αντίστροφο αποτέλεσμα: Μετατρέπει ένα διανυσματικό πεδίο σε ένα βαθμωτό πεδίο.

Ορισμός 2.1. Έστω $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένα (παραγωγίσιμο) διανυσματικό πεδίο. Τότε η **απόκλιση** του $\mathbf{F}$, που συμβολίζεται με $\operatorname{div} \mathbf{F}$ ή $\nabla \cdot \mathbf{F}$, είναι το βαθμωτό πεδίο

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

όπου F_1, F_2, F_3 είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$.

Παράδειγμα. Έστω $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}$. Τότε

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = 3xy.$$

□

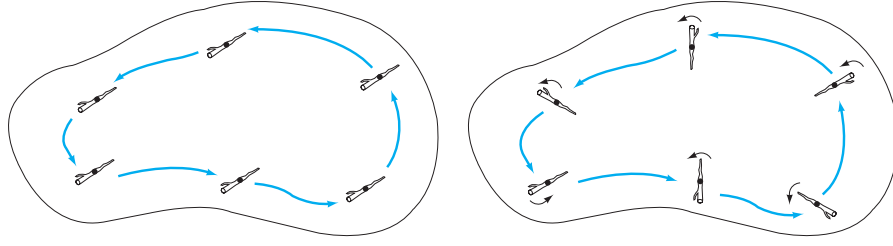
Αν φανταστούμε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ ως το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, τότε διαισθητικά, η τιμή της $\operatorname{div} \mathbf{F}$ αντιστοιχεί στο ρυθμό της διαστολής, ανά μονάδα όγκου, του ρευστού. Π.χ., αν $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, τότε $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$, που σημαίνει ότι το ρευστό διαστέλλεται με ρυθμό 3 κυβικών μονάδων ανά μονάδα όγκου και μονάδα χρόνου. Αυτό μοιάζει λογικό, γιατί σε αυτή την περίπτωση το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι ακτινικό, και καθώς το ρευστό κινείται προς τα έξω, ακολουθώντας τις γραμμές ροής, διαστέλλεται. Για ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ για το οποίο ισχύει ότι $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ παντού, λέμε ότι είναι **ασυμπίεστο**.

2.3 Ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου

Ορισμός 2.2. Έστω $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένα (παραγωγίσιμο) διανυσματικό πεδίο. Τότε ο **στροβιλισμός** του $\mathbf{F}$, που συμβολίζεται με $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ ή $\nabla \times \mathbf{F}$, είναι το βαθμωτό πεδίο

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Αν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ αναπαριστά τη ροή ενός ρευστού, τότε η φυσική σημασία του ότι $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ είναι πως το υγρό είναι *αστρόβιλο*, δηλαδή δεν εμφανίζει δίνες. Για να αιτιολογήσουμε αυστηρά τον ισχυρισμό αυτό χρειαζόμαστε το θεώρημα του Stokes (το οποίο θα δούμε αργότερα). Διαισθητικά όμως μπορούμε να το σκεφτούμε ως εξής: Έστω ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ αναπαριστά το πεδίο ταχυτήτων σε μια λίμνη. Ρίχνουμε ένα μικρό κλαρί μέσα στη λίμνη και το παρατηρούμε. Έστω ότι το κλαδάκι παρασύρεται από το ρεύμα και ταξιδεύει κατά μήκος ενός μεγάλου κύκλου. Ο στροβιλισμός δεν είναι σε θέση να μας δώσει πληροφορία για την κίνηση αυτή. Αυτό που μετράει ο στροβιλισμός είναι πόσο γρήγορα και



Σχήμα 6: Ένα κλαδάκι σε μια λίμνη κινείται σύμφωνα με το πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{F}$. Στα αριστερά, το κλαράκι δεν περιστρέφεται καθώς κινείται, επομένως $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Στα δεξιά, περιστρέφεται επομένως $\text{curl } \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$.

με τι κατεύθυνση το κλαράκι περιστρέφεται καθώς κινείται, βλ. Σχήμα 6. Γενικώς, θα λέμε ότι το $\mathbf{F}$ είναι αστρόβιλο αν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ παντού.

Ορισμός 2.3. Έστω A ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Μια πραγματική (βαθμωτή) συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει όλες τις μερικές παραγώγους μέχρι και τάξης k και, επιπλέον, είναι συνεχείς στο A , θα λέμε ότι είναι κλάσης C^k ή ότι είναι k -φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, και θα γράφουμε $f \in C^k(A)$.

Μια διανυσματική συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ θα λέμε ότι είναι κλάσης C^k αν και μόνον αν όλες οι συνιστώσες συναρτήσεις είναι κλάσης C^k .

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 2.1. Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ βαθμωτό πεδίο κλάσης C^2 . Τότε

$$\text{curl}(\text{grad } f) = \mathbf{0}.$$

Δηλαδή, τα πεδία κλίσεων είναι αστρόβιλα.

Απόδειξη. Γράφουμε ξανά το ζητούμενο χρησιμοποιώντας τον τελεστή ανάδελα:

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη γνωρίζουμε ότι οι μικτές μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι ανεξάρτητες της σειράς παραγωγίσιμης, δηλαδή, π.χ., $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$. Άρα όλες οι συνιστώσες του $\nabla \times (\nabla f)$ είναι ίσες με μηδέν. $\square$

Θεώρημα 2.2. Έστω $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο κλάσης C^2 . Τότε

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{F}) = 0.$$

Δηλαδή, το $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ είναι ένα ασυμπίεστο διανυσματικό πεδίο.

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γραφεί και στη μορφή $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Τέλος, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.4. Ο τελεστής Laplace που δρα πάνω σε συναρτήσεις f , συμβολίζεται με το σύμβολο Δ ή με το ∇^2 , και ορίζεται ως εξής:

$$\Delta f = \nabla^2 f := \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Αν $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ είναι ένα C^2 διανυσματικό πεδίο, τότε ορίζουμε το $\nabla^2 \mathbf{F}$ με βάση τις συνιστώσες του:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 F_1 \mathbf{i} + \nabla^2 F_2 \mathbf{j} + \nabla^2 F_3 \mathbf{k}.$$

Σημειώνουμε ότι, όπως θα δείτε και σε άλλα μαθήματα, ο τελεστής Laplace παίζει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στη μαθηματική διατύπωση πολλών φυσικών νόμων.

3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Υπολογίστε την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$.

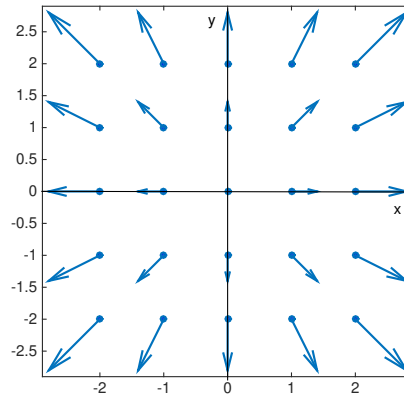
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) = 2.$$

Στο Σχήμα 7 απεικονίζεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$. Παρατηρούμε ότι σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ το βέλος που έχει αρχή στο σημείο αυτό είναι μεγαλύτερο από το βέλος που έχει πέρας στο σημείο αυτό. Άρα υπάρχει μεγαλύτερη ροή από το σημείο προς τα έξω, επομένως το $\mathbf{F}$ «αποκλίνει» σε κάθε σημείο.

Παράδειγμα 2. Υπολογίστε τον στροβιλισμό του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F} = (3x^2z + y^2) \mathbf{i} + 2xy \mathbf{j} + (x^3 - 2z) \mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2z + y^2 & 2xy & x^3 - 2z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 2z) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy) \right) \mathbf{i} \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial z}(3x^2z + y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 2z) \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2z + y^2) \right) \mathbf{k} \\ &= (0 - 0) \mathbf{i} + (3x^2 - 3x^2) \mathbf{j} + (2y - 2y) \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$



Σχήμα 7: Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$.

Άρα το $\mathbf{F}$ είναι αστρόβιλο.

Παράδειγμα 3. Υπολογίστε την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F} = (xz - e^{2x} \cos z) \mathbf{i} - yz \mathbf{j} + e^{2x}(\sin y + 2 \sin z) \mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(xz - e^{2x} \cos z) + \frac{\partial}{\partial y}(-yz) + \frac{\partial}{\partial z}(e^{2x}(\sin y + 2 \sin z)) \\ &= z - 2e^{2x} \cos z - z + 2e^{2x} \cos z = 0. \end{aligned}$$

Άρα το $\mathbf{F}$ είναι ασυμπίεστο. Αφήνεται ως άσκηση να αποδείξετε ότι $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, με $\mathbf{G}(x, y, z) = (e^{2x} \cos y) \mathbf{i} + (e^{2x} \sin z) \mathbf{j} + (xyz) \mathbf{k}$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 είναι απολύτως αναμενόμενο ότι το $\mathbf{F}$ είναι ασυμπίεστο.

Παράδειγμα 4. Υπολογίστε την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F} = x^2 y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = 3xy.$$

Άρα το $\mathbf{F}$ δεν μπορεί να είναι στροβιλισμός κάποιου άλλου διανυσματικού πεδίου, διότι αν ήταν, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2, θα είχε μηδενική απόκλιση.

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε την απόκλιση των ακόλουθων διανυσματικών πεδίων:

$$(\alpha) \quad \mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j}$$

$$(\beta) \quad \mathbf{F} = y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$$

$$(\gamma) \quad \mathbf{F} = (x + y) \mathbf{i} + (y + z) \mathbf{j} + (x + z) \mathbf{k}$$

$$(\delta) \quad \mathbf{F} = z \cos(e^{y^2}) \mathbf{i} + x\sqrt{z^2 + 1} \mathbf{j} + e^{2y} \sin 3x \mathbf{k}$$

2. Υπολογίστε τον στροβιλισμό των ακόλουθων διανυσματικών πεδίων:

$$(\alpha) \quad \mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} - xe^y \mathbf{j} + 2xyz \mathbf{k}$$

$$(\beta) \quad \mathbf{F} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

$$(\gamma) \quad \mathbf{F} = (x + yz) \mathbf{i} + (y + xz) \mathbf{j} + (z + xy) \mathbf{k}$$

$$(\delta) \quad \mathbf{F} = (\cos yz - x) \mathbf{i} + (\cos xz - y) \mathbf{j} + (\cos xy - z) \mathbf{k}$$

3. Αποδείξτε ότι αν $f(x, y, z) = x^2 \sin y + y^2 \cos z$, τότε $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$.

4. Αποδείξτε ότι αν $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz \mathbf{i} - e^z \cos x \mathbf{j} + xy^2 z^3 \mathbf{k}$, τότε $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

5. Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες. (Υποθέστε ότι οι συναρτήσεις και τα διανυσματικά πεδία είναι κατάλληλα παραγωγίσιμες.)

$$(\alpha) \quad \nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

$$(\beta) \quad \nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$$

$$(\gamma) \quad \nabla \cdot (f \mathbf{F}) = f \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$$

$$(\delta) \quad \nabla \times (f \mathbf{F}) = f \nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$$

$$(\epsilon) \quad \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$$

6. Αποδείξτε ότι αν f και g είναι C^2 συναρτήσεις, τότε

$$\Delta(fg) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \nabla f \cdot \nabla g.$$

Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι:

$$\nabla \cdot (f \nabla g - g \nabla f) = f \Delta g - g \Delta f.$$

Σημείωση: Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό. Κάποια από τα σχήματα του κεφαλαίου αυτού έχουν παρθεί από τα βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- S. J. Colley, *Vector Calculus*, 4th edition, Pearson, 2012.
- E. Kreyszig, *Ανώτερα Μαθηματικά για Μηχανικούς*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2018.
- J. E. Marsden, A. J. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015.
- J. Stewart, *Calculus: Concepts and Contexts*, 6th edition, Brooks/Cole, 2008.
- J. Hass, C. Heil, M.D. Weir, *Thomas Απειροστικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2018.