

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Σχολή Μηχανικών



Μάιος 2019

1 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε συναρτήσεις με περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές, και θα δούμε τρόπους για να τις παραστήσουμε γραφικά.

Ορισμός 1.1. Έστω D ένα σύνολο διατεταγμένων n -άδων πραγματικών αριθμών $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Μια πραγματική συνάρτηση f είναι ένας κανόνας ο οποίος σε κάθε στοιχείο του D αντιστοιχεί ένα μοναδικό πραγματικό αριθμό

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Το σύνολο D λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης, ενώ το σύνολο όλων των τιμών w που λαμβάνει η συνάρτηση λέγεται **σύνολο τιμών** της f . Το w λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**, και λέμε ότι η f είναι μια συνάρτηση των **ανεξάρτητων μεταβλητών** $x_1, \dots, x_n$.

(Μερικές φορές αναφερόμαστε στα $x_1, \dots, x_n$ ως μεταβλητές εισόδου της συνάρτησης, και στο w ως μεταβλητή εξόδου.)

Συγκεκριμένα, αν η f είναι μια συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, τότε συνήθως συμβολίζουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές με x, y και την εξαρτημένη με z , ενώ αν η f είναι μια συνάρτηση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών, τότε συμβολίζουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές με x, y, z και την εξαρτημένη με w .

Ακολουθώντας τη συνήθη πρακτική, το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών θα είναι το μεγαλύτερο σύνολο για το οποίο ο τύπος της συνάρτησης έχει νόημα.

Παράδειγμα. (α) Η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

έχει πεδίο ορισμού ολόκληρο τον χώρο $\mathbb{R}^3$, και σύνολο τιμών το διάστημα $[0, \infty)$ αφού δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

(β) Η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

έχει πεδίο ορισμού τον χώρο $\mathbb{R}^3$ εκτός από το σημείο $(0, 0, 0)$, και σύνολο τιμών το διάστημα $(0, \infty)$.

(γ) Η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = xy \ln z$$

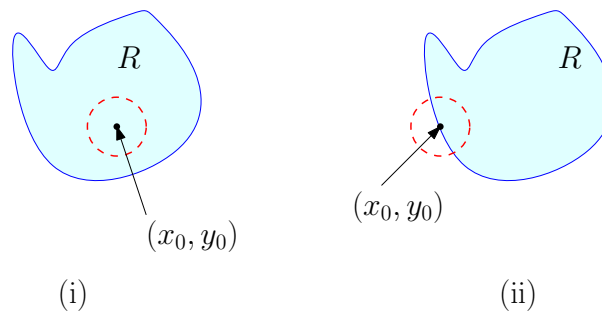
έχει πεδίο ορισμού τον ημίχωρο $z > 0$, και σύνολο τιμών το διάστημα $(-\infty, \infty)$. □

1.1 Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Θα αρχίσουμε με έναν ορισμό:

Ορισμός 1.2. Ένα σημείο (x_0, y_0) σε ένα χωρίο (σύνολο) του xy -επιπέδου θα λέγεται **εσωτερικό σημείο** του R αν είναι κέντρο ενός δίσκου με θετική ακτίνα, ο οποίος περιέχεται εξ' ολοκλήρου μέσα στο R , βλ. Σχήμα 1(i). Ένα σημείο (x_0, y_0) θα λέγεται **συνοριακό σημείο** του R αν είναι κέντρο ενός δίσκου με θετική ακτίνα, ο οποίος περιέχει σημεία που ανήκουν στο R αλλά και σημεία που είναι έξω από το R , βλ. Σχήμα 1(ii).

Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του R λέμε ότι αποτελεί το εσωτερικό του χωρίου R , ενώ το σύνολο όλων των συνοριακών του σημείων λέμε ότι αποτελεί το σύνορο του R . Ένα χωρίο θα λέγεται **ανοικτό** αν αποτελείται αποκλειστικά από εσωτερικά σημεία, ενώ θα λέγεται **κλειστό** αν περιέχει και τα συνοριακά του σημεία.



Σχήμα 1: (i) Εσωτερικό σημείο, (ii) Συνοριακό σημείο.

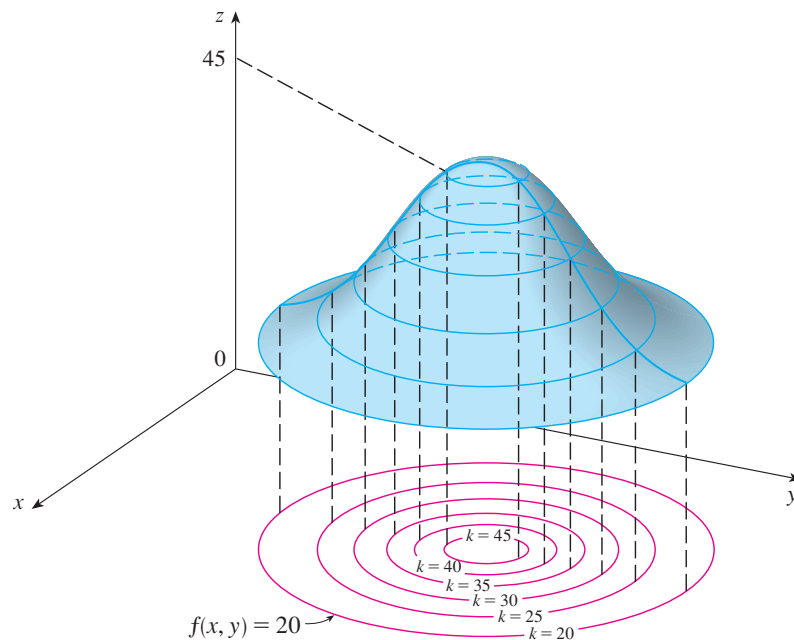
Ορισμός 1.3. Ένα χωρίο του επιπέδου λέγεται **φραγμένο** αν περιέχεται μέσα σ' ένα δίσκο με κάποια σταθερή ακτίνα. Στην αντίθετη περίπτωση θα λέγεται **μη φραγμένο**.

Π.χ., ευθύγραμμα τμήματα, τρίγωνα, πολύγωνα είναι παραδείγματα φραγμένων συνόλων στο επίπεδο. Αντίθετα, ο x -ημιάξονας, το πρώτο τεταρτημόριο ή ολόκληρο το επίπεδο αποτελούν παραδείγματα μη φραγμένων συνόλων.

Γραφική παράσταση, ισοσταθμικές καμπύλες.

Υπάρχουν δύο συνήθεις τρόποι για να απεικονίσουμε γραφικά τις τιμές μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x, y)$. Ο ένας είναι να σχεδιάσουμε την επιφάνεια $z = f(x, y)$ στον τριδιάστατο χώρο, και ο δεύτερος να σχεδιάσουμε στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (και να σημειώσουμε την τιμή σε) καμπύλες πάνω στις οποίες η συνάρτηση παίρνει σταθερές τιμές.

Ορισμός 1.4. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου στα οποία μια συνάρτηση $f(x, y)$ παίρνει μια σταθερή τιμή $f(x, y) = c$ λέγεται **ισοσταθμική καμπύλη** (level curve) της f . Το σύνολο όλων των σημείων του χώρου $(x, y, f(x, y))$, που είναι τέτοια ώστε (x, y) ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , λέγεται **γράφημα** της f . Επίσης, λέμε ότι το γράφημα της f είναι η **επιφάνεια** $z = f(x, y)$.

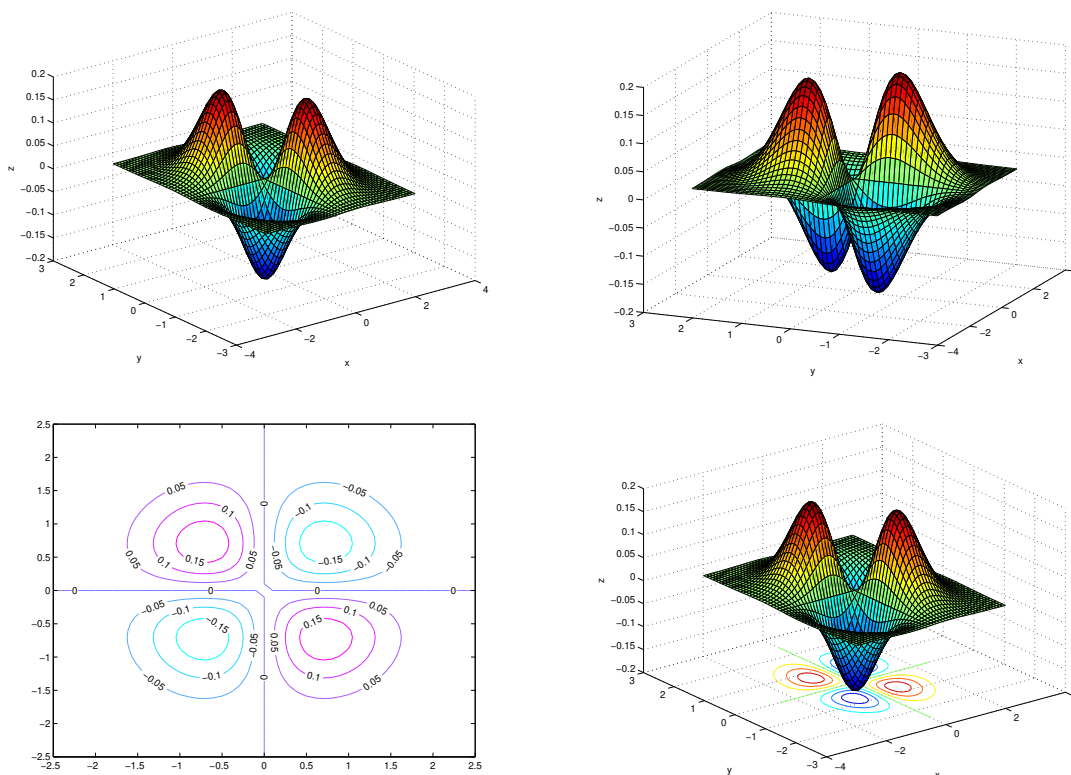


Σχήμα 2: Σχέση της επιφάνειας $z = f(x, y)$ με τις ισοσταθμικές καμπύλες.

Σήμερα είναι αρκετά απλό να σχεδιάσουμε το γράφημα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών με τη βοήθεια προγραμμάτων τριδιάστατων γραφικών. Αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό αφού πολύ συχνά μπορούμε να αντλήσουμε πιο γρήγορα πληροφορίες από το γράφημα μιας συνάρτησης παρά από τον τύπο της. Π.χ., στο Σχήμα 3 σχεδιάζουμε με τη βοήθεια του MATLAB τη γραφική παράσταση και ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης

$$f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}.$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι σε πάρα πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιούνται ισοσταθμικές καμπύλες. Π.χ., στο Σχήμα 4 βλέπουμε ισοϋψείς (δηλαδή ισοσταθμικές καμπύλες που δηλώνουν σταθερό ύψος σε σχέση με την επιφάνεια της θάλασσας) σε ένα τοπογραφικό χάρτη.



Σχήμα 3: Γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$. Πάνω γραμμή: Δύο διαφορετικές όψεις της επιφάνειας $z = -xye^{-x^2-y^2}$. Κάτω αριστερά: Ισοσταθμικές καμπύλες. Κάτω δεξιά: Η επιφάνεια και ισοσταθμικές καμπύλες στο ίδιο σχήμα.

1.2 Συναρτήσεις τριών μεταβλητών

Όπως είδαμε στην περίπτωση του επιπέδου, το σύνολο των σημείων στα οποία μια συνάρτηση $f(x, y)$ παίρνει μια σταθερή τιμή $f(x, y) = c$, σχηματίζει μια καμπύλη στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Τώρα στην περίπτωση του τριδιάστατου χώρου τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών παίρνει μια σταθερή τιμή $f(x, y, z) = c$ απαρτίζουν μια επιφάνεια στο πεδίο ορισμού της f .

Ορισμός 1.5. Το σύνολο των σημείων (x, y, z) του χώρου στα οποία μια συνάρτηση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών παίρνει μια σταθερή τιμή $f(x, y, z) = c$ λέγεται **ισοσταθμική επιφάνεια** (level surface) της f .

Σημειώστε ότι το γράφημα μιας συνάρτησης τριών ανεξάρτητων μεταβλητών αποτελείται από σημεία $(x, y, z, f(x, y, z))$ που βρίσκονται στο χώρο των τεσσάρων διαστάσεων, ως εκ τούτου δεν μπορούμε να το σχεδιάσουμε αποτελεσματικά αφού μπορούμε να έχουμε εποπτεία μόνο τριών διαστάσεων. Μπορούμε όμως να αντλήσουμε πληροφορίες για τη συμπεριφορά

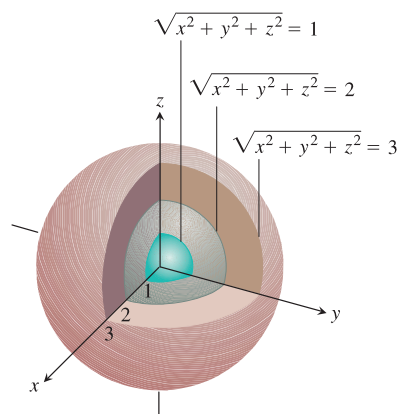


Σχήμα 4: Ισοϋψείς (ισοσταθμικές καμπύλες) σε τοπογραφικό χάρτη.

της συνάρτησης από τις τριδιάστατες ισοσταθμικές επιφάνειες. Π.χ., στο Σχήμα 5 βλέπουμε τις ισοσταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

που είναι σφαίρες με κέντρο το σημείο $(0, 0, 0)$.



Σχήμα 5: Ισοσταθμικές επιφάνειες της $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2 Όριο και συνέχεια σε πολλές διαστάσεις

2.1 Όριο συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Ορισμός 2.1. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f(x, y)$ συγκλίνει στο όριο L καθώς το (x, y) τείνει στο (x_0, y_0) , και γράφουμε

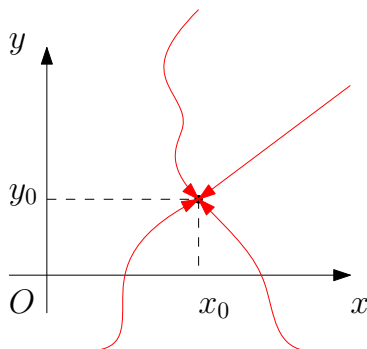
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L,$$

ή

$$f(x, y) \rightarrow L \quad \text{καθώς} \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0),$$

αν οι τιμές της $f(x, y)$ πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο L καθώς τα σημεία (x, y) πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο (x_0, y_0) (με $(x, y) \neq (x_0, y_0)$).

Από τον Ορισμό 2.1 βλέπουμε ότι η απόσταση μεταξύ των $f(x, y)$ και L γίνεται οσοδήποτε μικρή αν η απόσταση μεταξύ των (x, y) και (x_0, y_0) γίνει αρκούντως μικρή (αλλά όχι 0). Παρατηρήστε ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για την απόσταση μεταξύ των (x, y) και (x_0, y_0) και όχι για την διαδρομή που θα ακολουθηθεί καθώς το (x, y) πλησιάζει στο (x_0, y_0) .



Σχήμα 6: Διαφορετικές διαδρομές καθώς το (x, y) τείνει στο (x_0, y_0) .

Έτσι καταλήγουμε στο ακόλουθο κριτήριο που μας βοηθάει να ελέγχουμε πότε δεν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών.

Κριτήριο μη ύπαρξης ορίου: Αν μια συνάρτηση $f(x, y)$ έχει διαφορετικά όρια καθώς το (x, y) τείνει στο (x_0, y_0) από δύο διαφορετικές διαδρομές, τότε το $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 1. Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Αρχικά, ας πλησιάσουμε στο $(0, 0)$ κατά μήκος του x -άξονα ($y = 0$). Τότε

$$f(x, 0) = \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Άρα $f(x, y) \rightarrow 1$ καθώς $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ κατά μήκος του x -άξονα.

Αν πλησιάσουμε τώρα στο $(0, 0)$ κατά μήκος του y -άξονα ($x = 0$), θα έχουμε:

$$f(0, y) = \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1 \text{ για κάθε } y \neq 0.$$

Άρα $f(x, y) \rightarrow -1$ καθώς $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ κατά μήκος του y -άξονα.

Αφού η f έχει διαφορετικά όρια καθώς πλησιάζουμε το $(0, 0)$ κατά μήκος των διαφορετικών αυτών διαδρομών, συμπεραίνουμε ότι το όριο αυτό δεν υπάρχει. $\square$

Παράδειγμα 2. Αν

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$;

Αν $y = 0$, τότε $f(x, 0) = \frac{0}{x^2} = 0$, επομένως $f(x, y) \rightarrow 0$ καθώς $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ κατά μήκος του x -άξονα.

Αν $x = 0$, τότε $f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0$, οπότε $f(x, y) \rightarrow 0$ καθώς $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ κατά μήκος του y -άξονα.

Αν και έχουμε το ίδιο όριο κατά μήκος αυτών των δύο διαδρομών αυτό δεν σημαίνει ότι το ζητούμενο όριο είναι 0. Ας προσεγγίσουμε, π.χ., το $(0, 0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = x$. Τότε για κάθε $x \neq 0$ έχουμε

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}, \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Αφού η f έχει διαφορετικά όρια καθώς πλησιάζουμε το $(0, 0)$ κατά μήκος των διαφορετικών αυτών διαδρομών, συμπεραίνουμε ότι το όριο αυτό δεν υπάρχει. $\square$

Παράδειγμα 3. Αν

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4},$$

υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$;

Ας δοκιμάσουμε να πλησιάσουμε στο $(0, 0)$ κατά μήκος οποιασδήποτε (μη κατακόρυφης) ευθείας $y = mx$, δηλαδή ευθείας με κλίση m . Τότε

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x (mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2} = 0, \text{ καθώς } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Άρα η f έχει το ίδιο όριο (0) καθώς πλησιάζουμε το $(0, 0)$ κατά μήκος οποιασδήποτε (μη κατακόρυφης) ευθείας. Ας δοκιμάσουμε τώρα να πλησιάσουμε το $(0, 0)$ ακολουθώντας την παραβολή $x = y^2$. Τότε έχουμε

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}, \text{ καθώς } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Άρα η f έχει διαφορετικά όρια καθώς πλησιάζουμε το $(0, 0)$ κατά μήκος διαφορετικών διαδρομών, οπότε και πάλι το όριο αυτό δεν υπάρχει. $\square$

Μπορούμε να δούμε ότι, όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για τα όρια συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.1. Αν L, M και λ είναι πραγματικοί αριθμοί και

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M,$$

τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M, \quad (\text{Κανόνας αθροίσματος/διαφοράς})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = L \cdot M, \quad (\text{Κανόνας γινομένου})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (\lambda f(x,y)) = \lambda L, \quad (\text{Αριθμός επί συνάρτηση})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left(\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \right) = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0, \quad (\text{Κανόνας πηλίκου})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = L^n, \quad n \text{ θετικός ακέραιος}, \quad (\text{Ύψωση σε δύναμη})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}, \quad (n\text{-οστή ρίζα}),$$

όπου n θετικός ακέραιος, και $L > 0$ αν n άρτιος.

Τέλος, ιδιότητες όπως το Θεώρημα Σάντουϊτς (ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων) ισχύει και για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Παράδειγμα. Βρείτε (αν υπάρχει) το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}.$$

Αν δοκιμάσουμε να πλησιάσουμε στο $(0, 0)$ κατά μήκος οποιασδήποτε (μη κατακόρυφης) ευθείας $y = mx$, όπως κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα, θα δούμε ότι το όριο είναι 0. Αυτό δεν αποδεικνύει ότι το όριο είναι 0 αλλά υποδεικνύει το μηδέν ως ένα υποψήφιο όριο, αν αυτό υπάρχει.

Ας εξετάσουμε την απόσταση του $f(x, y)$ από το 0:

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2}.$$

Παρατηρήστε ότι αφού $y^2 \geq 0$, έχουμε ότι $x^2 \leq x^2 + y^2$. Άρα

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1, \quad \text{οπότε} \quad 0 \leq \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq 3|y|.$$

Τώρα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Σάντουϊτς, και επειδή

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 3|y| = 0$$

συμπεραίνουμε ότι και η μεσαία συνάρτηση θα συγκλίνει στο 0, δηλαδή

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0.$$

□

2.2 Συνέχεια συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Ορισμός 2.2. Μια συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής στο σημείο (x_0, y_0) αν: (α) Το (x_0, y_0) ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , (β) υπάρχει το όριο της $f(x, y)$ καθώς το (x, y) τείνει στο (x_0, y_0) , και (γ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση είναι **συνεχής**, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αθροίσματα, διαφορές, γινόμενα και πηλίκα συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχή στο πεδίο ορισμού τους. Έτσι προκύπτει ότι πολυωνμικές και ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις. Στο σημείο αυτό να τονίσουμε ότι όταν μιλάμε για πολυωνμικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών ή, απλά, **πολυώνυμα** μιλάμε για αθροίσματα όρων της μορφής $c x^m y^n$, όπου το c είναι σταθερά και m, n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Μια **ρητή** συνάρτηση είναι πηλίκο πολυωνύμων. Π.χ., η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 - 2xy + 7y - 1,$$

είναι πολυώνυμο, ενώ η συνάρτηση

$$g(x, y) = \frac{xy^2 - 3}{x^2 + y^4 + 2},$$

είναι ρητή.

Παράδειγμα. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

είναι συνεχής παντού, εκτός από το σημείο $(0, 0)$.

Πράγματι, αν $(x, y) \neq (0, 0)$ η συνάρτησή μας είναι ρητή, και άρα συνεχής. Για να δούμε τι συμβαίνει στο $(0, 0)$ θα εξετάσουμε καταρχήν αν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$;

Αν $y = 0$, τότε $f(x, 0) = \frac{0}{x^2} = 0$, επομένως $f(x, y) \rightarrow 0$ καθώς $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ κατά μήκος του x -άξονα.

Αν τώρα προσεγγίσουμε το $(0, 0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = x$, τότε για κάθε $x \neq 0$ έχουμε

$$f(x, x) = \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1, \quad \text{για κάθε } x \neq 0.$$

Άρα η f έχει διαφορετικά όρια καθώς πλησιάζουμε το $(0, 0)$ κατά μήκος διαφορετικών διαδρομών, οπότε το όριο αυτό δεν υπάρχει και άρα η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

□

2.3 Συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών

Οι ορισμοί του ορίου και της συνέχειας συναρτήσεων δύο μεταβλητών και όλα τα συμπεράσματα της προηγούμενης παραγράφου επεκτείνονται και στην περίπτωση συναρτήσεων τριών ή και περισσότερων μεταβλητών. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις

$$\ln(x + y + z) \quad \text{ή} \quad \frac{e^x y}{\cos z}$$

είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους. Επίσης, μπορούμε με απ' ευθείας αντικατάσταση να υπολογίσουμε όρια της μορφής

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,-1,0)} \frac{e^x y}{\cos z} = \frac{e^0(-1)}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1.$$

3 Μερικές παράγωγοι

3.1 Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Έστω μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$. Τότε ορίζουμε τη μερική παράγωγο της f ως προς τη μεταβλητή x , στο σημείο (x_0, y_0) , να είναι η συνήθης παράγωγος της $f(x, y_0)$ ως προς x στο σημείο $x = x_0$. Για να ξεχωρίζουμε τις μερικές παραγώγους από τις συνήθεις παραγώγους χρησιμοποιούμε το σύμβολο “ ∂ ” αντί του συνήθους “ d ”. Στον ακόλουθο ορισμό το h είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Ορισμός 3.1. Η μερική παράγωγος της $f(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή x , στο σημείο (x_0, y_0) , είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

εφόσον το όριο αυτό υπάρχει.

Ο ορισμός της μερικής παραγώγου της f ως προς τη μεταβλητή y , στο σημείο (x_0, y_0) , είναι ανάλογος. Σταθεροποιούμε το x να παίρνει την τιμή x_0 , και στη συνέχεια παίρνουμε τη συνήθη παράγωγο της $f(x_0, y)$ ως προς y στο σημείο $y = y_0$.

Ορισμός 3.2. Η μερική παράγωγος της $f(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή y , στο σημείο (x_0, y_0) , είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

εφόσον το όριο αυτό υπάρχει.

Άλλα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για την μερική παράγωγο είναι:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \quad f_x(x_0, y_0).$$

Παράδειγμα 1. Υπολογίστε τις τιμές των $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ στο σημείο $(-3, 1)$ αν

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y - 3.$$

Λύση. Για να βρούμε την $\frac{\partial f}{\partial x}$ σταθεροποιούμε το y και παραγωγίζουμε ως προς x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2xy + y - 3) = 2x - 2y,$$

άρα

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-3, 1) = 2(-3) - 2(1) = -8.$$

Για να βρούμε την $\frac{\partial f}{\partial y}$ σταθεροποιούμε το x και παραγωγίζουμε ως προς y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 2xy + y - 3) = -2x + 1,$$

άρα

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-3, 1) = -2(-3) + 1 = 7.$$

□

Παράδειγμα 2. Βρείτε τη μερική παράγωγο $\partial f / \partial x$ (ως συνάρτηση) της $f(x, y) = x \cos(xy)$.

Λύση. Θεωρούμε το y ως σταθερά, οπότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x \cos(xy)) = \frac{\partial}{\partial x} (x) \cos(xy) + x \frac{\partial}{\partial x} \cos(xy) \\ &= 1 \cdot \cos(xy) + x (-\sin(xy)) \frac{\partial}{\partial x} (xy) \\ &= \cos(xy) - xy \sin(xy). \end{aligned}$$

□

Στο επόμενο παράδειγμα θα δώσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία της μερικής παραγώγου.

Παράδειγμα 3. Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2.$$

Ας υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο $\partial f / \partial x(1, 1)$ και στη συνέχεια θα δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία.

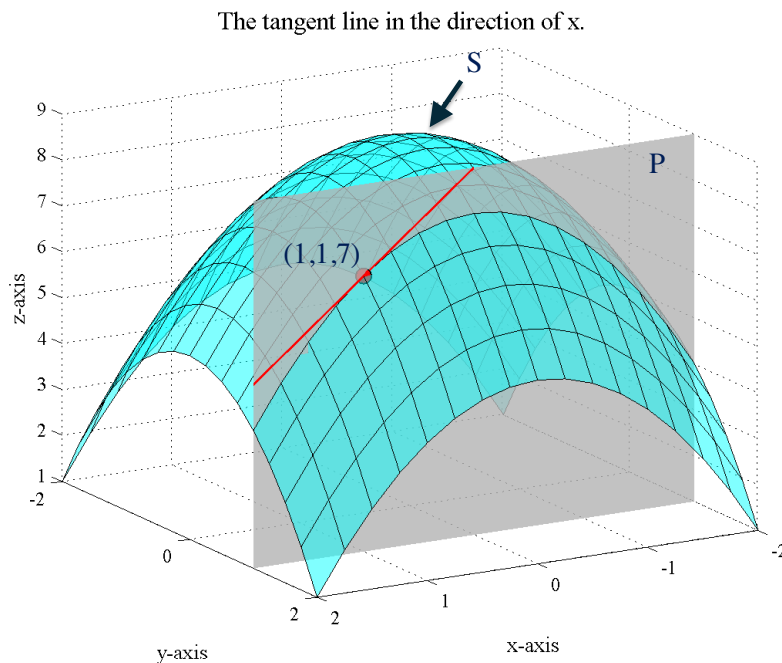
Για να βρούμε την $\frac{\partial f}{\partial x}$ σταθεροποιούμε το y και παραγωγίζουμε ως προς x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (9 - x^2 - y^2) = -2x,$$

άρα

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -2(1) = -2.$$

Όπως έχουμε δει η εξίσωση $z = 9 - x^2 - y^2$ παριστάνει μια επιφάνεια S που είναι το γράφημα της f , βλ. Σχήμα 7. Π.χ., επειδή $f(1, 1) = 7$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο $(1, 1, 7)$ είναι σημείο της επιφάνειας S .



Σχήμα 7: Η επιφάνεια $z = 9 - x^2 - y^2$.

Όταν σταθεροποιούμε το $y = 1$, ουσιαστικά παίρνουμε την τομή της επιφάνειας S με το επίπεδο $P : y = 1$. Η τομή αυτή είναι μια καμπύλη (στην περίπτωση μας παραβολή) στο xz -επίπεδο. Τότε η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -2$ παριστάνει την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης αυτής στο xz -επίπεδο, στο σημείο $(1, 1, 7)$ (στο Σχήμα 7 η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι η κόκκινη ευθεία). □

3.2 Συναρτήσεις με περισσότερες από δύο μεταβλητές

Φυσικά, μπορούμε να ορίσουμε μερικές παραγώγους και για συναρτήσεις με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Για παράδειγμα, αν $f(x, y, z)$ είναι μια συνάρτηση τριών μεταβλητών,

τότε η μερική της παράγωγος ως προς x ορίζεται ως:

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h},$$

και, πρακτικά, την υπολογίζουμε σταθεροποιώντας τα y και z και παραγωγίζοντας την $f(x, y, z)$ ως προς x .

Γενικότερα, αν η u είναι μια συνάρτηση n μεταβλητών, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, τότε η μερική της παράγωγος ως προς την i -οστή μεταβλητή x_i είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}.$$

Άλλοι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = D_i f.$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους f_x , f_y και f_z της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = e^{xy} \ln z.$$

Λύση. Καταρχήν, για να βρούμε την f_x , σταθεροποιούμε τα y, z και παραγωγίζουμε ως προς x , οπότε έχουμε

$$f_x = ye^{xy} \ln z.$$

Εργαζόμενοι ανάλογα βρίσκουμε ότι

$$f_y = xe^{xy} \ln z \quad \text{και} \quad f_z = \frac{e^{xy}}{z}.$$

□

3.3 Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Αν η f είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών τότε και οι μερικές της παράγωγοι f_x και f_y είναι και αυτές συναρτήσεις δύο μεταβλητών, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε τις μερικές τους παραγώγους $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ και $(f_y)_y$, που ονομάζονται μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f . Αν $z = f(x, y)$ χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$\begin{aligned} (f_x)_x &= f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \\ (f_x)_y &= f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \\ (f_y)_x &= f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \\ (f_y)_y &= f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι με το σύμβολο f_{xy} (ή $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$) εννοούμε ότι πρώτα παραγωγίζουμε ως προς x και στη συνέχεια ως προς y , ενώ για τον υπολογισμό του f_{yx} η σειρά είναι αντίστροφη.

Παράδειγμα. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Λύση. Καταρχήν

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \quad \text{και} \quad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3, & f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2, \\ f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2, & f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4. \end{aligned}$$

□

Παρατηρήστε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι $f_{xy} = f_{yx}$. Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι απλά μια σύμπτωση όπως υποδεικνύει και το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1 (Θεώρημα Clairaut). Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y)$, καθώς και οι μερικές της παράγωγοι f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} , ορίζονται σε ένα ανοικτό χωρίο D που περιέχει το σημείο (x_0, y_0) , και είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) , τότε

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Μπορούμε να ορίσουμε και υψηλότερης τάξης μερικές παραγώγους. Π.χ.

$$\begin{aligned} f_{xyx} &= (f_{xy})_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \\ \text{ή} \quad f_{xyy} &= (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε την f_{xyz} αν

$$f(x, y, z) = \sin(x + 2yz).$$

Λύση.

$$\begin{aligned} f_x &= \cos(x + 2yz), \\ f_{xx} &= -\sin(x + 2yz), \\ f_{xxy} &= -2z \cos(x + 2yz), \\ f_{xyz} &= -2 \cos(x + 2yz) + 4yz \sin(x + 2yz). \end{aligned}$$

□

3.4 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ), ή αλλιώς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, είναι διαφορικές εξισώσεις οι οποίες περιέχουν άγνωστες συνάρτησεις πολλών μεταβλητών καθώς και τις μερικές τους παραγώγους. Για παράδειγμα, η ΜΔΕ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

λέγεται **εξίσωση του Laplace**, συναντάται συχνά σε εφαρμογές μετάδοσης θερμότητας, ροής ρευστών, κ.ά., και οι λύσεις της ονομάζονται αρμονικές συναρτήσεις.

Παράδειγμα. Δείξτε ότι η συνάρτηση $u(x, y) = e^x \sin y$ είναι λύση της εξίσωσης Laplace. Λύση.

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \sin y & u_y &= e^x \cos y \\ u_{xx} &= e^x \sin y & u_{yy} &= -e^x \sin y. \end{aligned}$$

Άρα

$$u_{xx} + u_{yy} = e^x \sin y + (-e^x \sin y) = 0,$$

οπότε η u ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace. □

Η λεγόμενη **κυματική εξίσωση**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2)$$

περιγράφει την κίνηση μιας κυματομορφής, π.χ. ενός θαλάσσιου κύματος, ενός ηχητικού κύματος ή ενός κύματος που «ταξιδεύει» κατά μήκος μιας παλλόμενης χορδής.

Παράδειγμα. Δείξτε ότι η συνάρτηση $u(x, t) = \sin(x - at)$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης.

Λύση.

$$\begin{aligned} u_x &= \cos(x - at) & u_{xx} &= -\sin(x - at) \\ u_t &= -a \cos(x - at) & u_{tt} &= -a^2 \sin(x - at). \end{aligned}$$

Άρα

$$u_{tt} = -a^2 \sin(x - at) = a^2 u_{xx},$$

οπότε η u ικανοποιεί την κυματική εξίσωση. □

3.5 Μερικές παράγωγοι και συνέχεια

Όπως ήδη γνωρίζουμε αν μια συνάρτηση μιας μεταβλητής είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε ότι μια συνάρτηση

δύο μεταβλητών είναι δυνατόν να έχει μερικές παραγώγους σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της αλλά να μην είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα. Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι η $f(x, y)$ δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Ας εξετάσουμε το όριο της $f(x, y)$ καθώς το (x, y) τείνει στο $(0, 0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = x$. Επειδή $f(x, y) = 0$ κατά μήκος της ευθείας $y = x$ (εκτός από την αρχή των αξόνων) έχουμε ότι $f(x, y)|_{y=x} \rightarrow 0$, ενώ, προφανώς $f(0, 0) = 1$. Άρα η $f(x, y)$ δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

Ας υπολογίσουμε τώρα την $f_x(0, 0)$. Για το σκοπό αυτό σταθεροποιούμε το $y = 0$. Τότε $f(x, 0) = 1$, οπότε $f_x = 0$ για κάθε x , άρα και $f_x(0, 0) = 0$. Ανάλογα, για να υπολογίσουμε την $f_y(0, 0)$ σταθεροποιούμε το $x = 0$. Τότε $f(0, y) = 1$, οπότε $f_y = 0$ για κάθε y , άρα και $f_y(0, 0) = 0$. Τελικά συμπεραίνουμε ότι

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

□

Το παράδειγμα αυτό υποδεικνύει ότι χρειαζόμαστε μια ισχυρότερη έννοια παραγωγισιμότητας για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών από την απλή ύπαρξη των μερικών παραγώγων, ώστε να εξασφαλίζει τη συνέχεια της συνάρτησης. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πώς ορίζουμε την παραγωγισιμότητα για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

3.6 Παραγωγισιμότητα

Θα ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας την ακόλουθη ιδιότητα για συναρτήσεις μιας μεταβλητής: Αν $y = f(x)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $x = x_0$, τότε η μεταβολή της τιμής της f από το x_0 στο $x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, δίνεται από μια εξίσωση της μορφής

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon\Delta x,$$

όπου το $\varepsilon \rightarrow 0$ καθώς το $\Delta x \rightarrow 0$.

Για συναρτήσεις δύο μεταβλητών μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2. Έστω ότι οι πρώτες μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $f(x, y)$ ορίζονται σ' ένα ανοικτό χωρίο R που περιέχει το σημείο (x_0, y_0) και είναι συνεχείς στο σημείο αυτό. Τότε η μεταβολή των τιμών της συνάρτησης μεταξύ του σημείου (x_0, y_0) και ενός άλλου σημείου του R , $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, που τη συμβολίζουμε με

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

όπου καθένα από τα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τείνουν στο 0, καθώς και το Δx και το $\Delta y \rightarrow 0$.

Ορισμός 3.3. Μια συνάρτηση $z = f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0) αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ και η μεταβολή Δz ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

όπου καθένα από τα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τείνουν στο 0, καθώς και το Δx και το $\Delta y \rightarrow 0$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, θα λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη**, και ότι το γράφημα της είναι μια **λεία ή ομαλή επιφάνεια**.

Από τον Ορισμό 3.3 και το Θεώρημα 3.2 προκύπτει το πόρισμα:

Πόρισμα 3.1. Αν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y μιας συνάρτησης $f(x, y)$ είναι συνεχείς σε ένα ανοικτό χωρίο R , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο R .

Τέλος, αν η $z = f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0) , έχουμε από τον Ορισμό 3.3 ότι $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \rightarrow 0$, καθώς το Δx και το $\Delta y \rightarrow 0$. Από αυτό προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0) , οπότε ισχύει το θεώρημα:

Θεώρημα 3.3. Αν η $z = f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0) , τότε είναι και συνεχής στο (x_0, y_0) .

4 Ο κανόνας της αλυσίδας

Όπως έχουμε δει για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, ο κανόνας της αλυσίδας μας λέει ότι αν η $w = f(x)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x , και η $x = g(t)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του t , τότε η w είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του t και η παράγωγός της dw/dt δίνεται από τον τύπο

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Για συναρτήσεις δύο, ή περισσότερων μεταβλητών, ο κανόνας της αλυσίδας έχει διάφορες μορφές που εξαρτώνται από το πλήθος των μεταβλητών που εμφανίζονται. Θα δούμε στη συνέχεια κάποιες από τις μορφές αυτές.

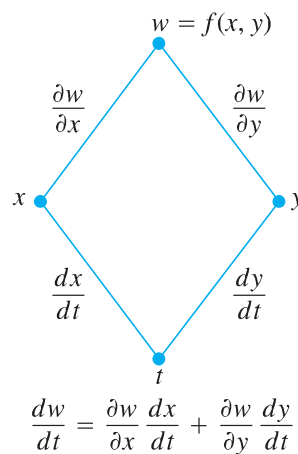
Θεώρημα 4.1. Αν $w = f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη και $x = x(t)$, $y = y(t)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του t , τότε η σύνθετη συνάρτηση $w = f(x(t), y(t))$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του t και έχουμε:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Συχνά γράφουμε $\frac{\partial w}{\partial x}$ αντί για $\frac{\partial f}{\partial x}$, και $\frac{\partial w}{\partial y}$ αντί για $\frac{\partial f}{\partial y}$, οπότε ο κανόνας της αλυσίδας παίρνει τη μορφή

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Το ακόλουθο διάγραμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μνημονικός κανόνας για τον κανόνα της αλυσίδας. Το w είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, τα x, y είναι ενδιάμεσες μεταβλητές, και το t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. Για να βρούμε την $\frac{dw}{dt}$ ξεκινάμε από το w και κινούμεθα προς το t ακολουθώντας κάθε κλάδο και πολλαπλασιάζοντας τις παραγώγους που συναντάμε. Στη συνέχεια προσθέτουμε τα γινόμενα.



Παράδειγμα. Βρείτε με τον κανόνα της αλυσίδας την παράγωγο της $w = xy$ ως προς t κατά μήκος της διαδρομής $x = \cos t, y = \sin t$. Τι τιμή έχει η παράγωγος στο $t = \pi/2$;
Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} = y(-\sin t) + x \cos t \\ &= \sin t(-\sin t) + \cos t \cos t = \cos 2t. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{dw}{dt} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \cos \pi = -1.$$

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αντικαταστήσουμε άμεσα τα $x = \cos t, y = \sin t$ στην w και να υπολογίσουμε την παράγωγό της ως προς t . Ας το κάνουμε για επαλήθευση:

$$w = xy = \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{dt} = w'(t) = \frac{1}{2} (\cos 2t)(2t)' = \cos 2t.$$

□

Ανάλογα, έχουμε τον κανόνα της αλυσίδας για συναρτήσεις τριών μεταβλητών.

Θεώρημα 4.2. Αν $w = f(x, y, z)$ είναι παραγωγίσιμη και $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του t , τότε η w είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του t και έχουμε:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Παράδειγμα. Βρείτε με τον κανόνα της αλυσίδας την παράγωγο της $w = xy + z$ ως προς t κατά μήκος της διαδρομής $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$. Τι τιμή έχει η παράγωγος στο $t = 0$; Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} = y(-\sin t) + x \cos t + 1 \cdot 1 \\ &= \sin t(-\sin t) + \cos t \cos t + 1 = \cos 2t + 1. \end{aligned}$$

Άρα

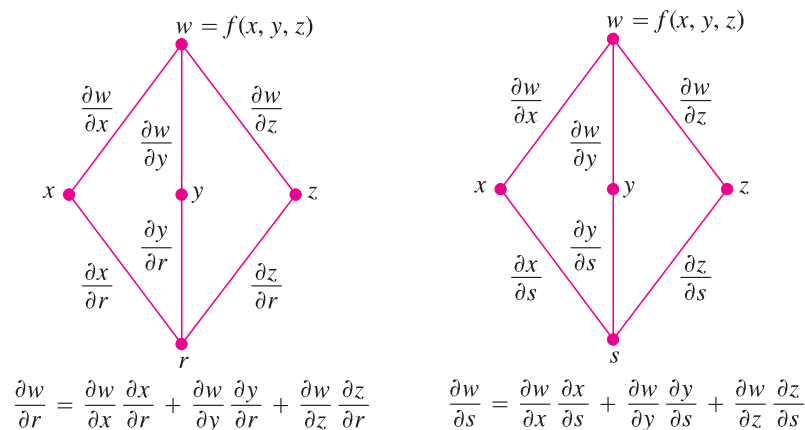
$$\frac{dw}{dt}(0) = \cos(0) + 1 = 2.$$

□

Θεώρημα 4.3 (Κανόνας αλυσίδας για συναρτήσεις δύο ανεξάρτητων μεταβλητών με τρεις ενδιάμεσες μεταβλητές). Έστω $w = f(x, y, z)$ και $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$, $z = k(r, s)$. Αν είναι όλες παραγωγίσιμες, τότε η w έχει μερικές παραγώγους ως προς r και s , που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}, \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}. \end{aligned}$$

Το ακόλουθο διάγραμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μνημονικός κανόνας για αυτή την περίπτωση.



Παράδειγμα. Βρείτε με τον κανόνα της αλυσίδας τις μερικές παραγώγους της $w = x + 2y + z^2$ ως προς r, s , αν $x = r/s, y = r^2 + \ln s, z = 2r$.

Λύση.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = 1 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot 2r + 2z \cdot 2 \\ &= \frac{1}{s} + 4r + 4(2r) = \frac{1}{s} + 12r.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = 1 \cdot \left(-\frac{r}{s^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{s}\right) + 2z \cdot 0 \\ &= \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}.\end{aligned}$$

□

5 Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης

Έστω ότι μια εξίσωση της μορφής $F(x, y) = 0$ ορίζει με πεπλεγμένο τρόπο το y ως μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x (δηλαδή $y = f(x)$ και $F(x, f(x)) = 0$). Αν η F είναι παραγωγίσιμη ως μια συνάρτηση δύο μεταβλητών τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0,$$

οπότε, αν $F_y \neq 0$, έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Παράδειγμα. Βρείτε την $\frac{dy}{dx}$ αν $y^2 - x^2 - \sin xy = 0$.

Λύση. Έστω $F(x, y) = y^2 - x^2 - \sin xy = 0$. Τότε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x - y \cos xy}{2y - x \cos xy} = \frac{2x + y \cos xy}{2y - x \cos xy}.$$

□

Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται και σε συναρτήσεις τριών μεταβλητών.

Έστω ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ ορίζει με πεπλεγμένο τρόπο τη z ως συνάρτηση των x, y (π.χ. $z = f(x, y)$). Τότε για κάθε (x, y) στο πεδίο ορισμού της f έχουμε $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Αν η F και η f είναι παραγωγίσιμες, τότε παράγωγιζουμε με τον κανόνα της αλυσίδας ως προς x και έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Ανάλογα,

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Συνεπώς

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}. \quad (3)$$

Προϋποθέσεις για να ισχύουν τα παραπάνω δίνονται από το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης. Αν οι μερικές παράγωγοι F_x, F_y, F_z είναι συνεχείς σ' ένα ανοικτό χωρίο R που περιέχει το σημείο (x_0, y_0, z_0) και για κάποια σταθερά c , $F(x, y, z) = c$ και $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, τότε η εξίσωση $F(x, y, z) = c$ ορίζει την z με πεπλεγμένο τρόπο ως μια παραγωγίσιμη συνάρτηση των x και y κοντά στο σημείο (x_0, y_0, z_0) και οι μερικές παράγωγοι του z δίνονται από τις (3).

Παράδειγμα. Υπολογίστε τις $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ στο σημείο $(0, 0, 0)$, αν

$$x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos y = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$F_x = 3x^2 + zye^{xz}, \quad F_y = e^{xz} - z \sin y, \quad F_z = 2z + xye^{xz} + \cos y.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + zye^{xz}}{2z + xye^{xz} + \cos y}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{e^{xz} - z \sin y}{2z + xye^{xz} + \cos y}. \end{aligned}$$

Στο σημείο $(0, 0, 0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{0}{1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1} = -1.$$

□

6 Κατά κατεύθυνση παράγωγος και κλίση

Έστω $f(x, y)$ μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα χωρίο R του xy -επιπέδου, $P_0(x_0, y_0)$ ένα σημείο στο R , και $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ ένα **μοναδιαίο** διάνυσμα ($|\mathbf{u}| = 1$). Υπενθυμίζουμε ότι τότε οι εξισώσεις

$$x = x_0 + u_1h, \quad y = y_0 + u_2h, \quad h \in \mathbb{R},$$

είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το P_0 και είναι παράλληλη στο $\mathbf{u}$.

Ορισμός 6.1. Ορίζουμε ως παράγωγο της f στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, τον αριθμό

$$\left(\frac{df}{dh}\right)_{\mathbf{u}, P_0} = D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

αν το όριο αυτό υπάρχει.

Για να υπολογίσουμε την κατευθυνόμενη παράγωγο στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{u}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Έστω $x = x_0 + u_1h$, $y = y_0 + u_2h$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dh}\right)_{\mathbf{u}, P_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \frac{\partial x}{\partial h} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \frac{\partial y}{\partial h} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} u_2 \\ &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \mathbf{j}\right] \cdot [u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Ορισμός 6.2. Ορίζουμε ως διάνυσμα κλίσης της f , και συμβολίζουμε με $\text{grad } f$ ή ∇f , στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ το διάνυσμα

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j},$$

όπου οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y υπολογίζονται στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$.

Βάσει του ορισμού αυτού, και λόγω της (4), έχουμε ότι η κατευθυνόμενη παράγωγος στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{u}$ δίνεται από τον τύπο

$$\left(\frac{df}{dh}\right)_{\mathbf{u}, P_0} = D_{\mathbf{u}}f(P_0) = (\nabla f)_{P_0} \cdot \mathbf{u}. \quad (5)$$

Δηλαδή αρκεί να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο της κλίσης (grad) της f με το διάνυσμα $\mathbf{u}$.

Παράδειγμα. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y) = xe^y + \cos(xy)$ στο σημείο $(2, 0)$ στην κατεύθυνση του $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

Λύση. Παρατηρήστε ότι

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5,$$

οπότε το $\mathbf{v}$ δεν είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Για το λόγο αυτό, κατασκευάζουμε το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$, στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}$, διαιρώντας το $\mathbf{v}$ δια το μέτρο του:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

Επίσης

$$\begin{aligned}f_x &= e^y - y \sin(xy) &\Rightarrow & f_x(2, 0) = e^0 - 0 \cdot \sin 0 = 1, \\f_y &= xe^y - x \sin(xy) &\Rightarrow & f_y(2, 0) = 2 \cdot e^0 - 2 \cdot \sin 0 = 2.\end{aligned}$$

Άρα η κλίση της f στο σημείο $(2, 0)$ ισούται με:

$$\nabla f_{(2,0)} = f_x(2, 0) \mathbf{i} + f_y(2, 0) \mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Τότε από την (5) έχουμε ότι η παράγωγος της f στο σημείο $(2, 0)$ στην κατεύθυνση του $\mathbf{u}$ είναι

$$D_{\mathbf{u}}f(2, 0) = (\nabla f)_{(2,0)} \cdot \mathbf{u} = (1, 2) \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1.$$

□

Παρατήρηση: Αφού η κατευθυνόμενη παράγωγος της f εκφράζεται ως εσωτερικό γινόμενο έχουμε

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| \underbrace{|\mathbf{u}|}_{=1} \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta,$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το $\mathbf{u}$ με την ∇f .

Από την παρατήρηση αυτή προκύπτουν οι εξής ιδιότητες:

1. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τη γρηγορότερη αύξηση όταν $\cos \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$, επομένως όταν το διάνυσμα $\mathbf{u}$ είναι στην κατεύθυνση του ∇f . Τότε

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos \theta = |\nabla f|.$$

2. Ανάλογα, η f παρουσιάζει τη γρηγορότερη μείωση όταν $\cos \theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi$, επομένως όταν το διάνυσμα $\mathbf{u}$ είναι στην κατεύθυνση του $-\nabla f$. Τότε $D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos \pi = -|\nabla f|$.

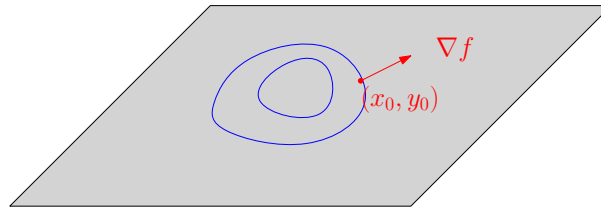
3. Οποιαδήποτε κατεύθυνση $\mathbf{u}$ που είναι ορθογώνια σε μια κλίση $\nabla f \neq 0$ είναι μια κατεύθυνση κατά την οποία δεν υπάρχει μεταβολή στην f , αφού τότε $\theta = \pi/2$ και άρα $D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(\pi/2) = 0$.

Έστω τώρα ότι η $f(x, y)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση που έχει σταθερή τιμή κατά μήκος της λείας καμπύλης $\mathbf{r} = g(t) \mathbf{i} + h(t) \mathbf{j}$, δηλαδή $f(g(t), h(t)) = c$ (επομένως η καμπύλη

είναι μια ισοσταθμική καμπύλη της συνάρτησης). Τότε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) &= \frac{d}{dt}(c) \\ \xRightarrow{\text{Καν. αλυσ.}} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{dg}{dt} \mathbf{i} + \frac{dh}{dt} \mathbf{j} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Άρα το ∇f είναι ορθογώνιο στο εφαπτόμενο διάνυσμα $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, και άρα είναι κάθετο στην ισοσταθμική καμπύλη, βλ. Σχήμα 8.



Σχήμα 8: Η κλίση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης δύο μεταβλητών είναι κάθετη στην ισοσταθμική καμπύλη της συνάρτησης που διέρχεται από το σημείο αυτό.

Η παρατήρηση αυτή μας επιτρέπει να βρούμε την εξίσωση μιας εφαπτόμενης σε ένα σημείο μίας ισοσταθμικής καμπύλης, αφού θα είναι κάθετη στην κλίση στο σημείο αυτό. Είναι εύκολο να δούμε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ έχει εξίσωση

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Στην περίπτωσή μας το διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι η κλίση της f , $\nabla f_{(x_0, y_0)}$, οπότε η **εξίσωση της εφαπτόμενης σε ένα σημείο $P_0(x_0, y_0)$ μιας ισοσταθμικής καμπύλης της f είναι:**

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \quad (6)$$

Παράδειγμα. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην έλλειψη

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

στο σημείο $(-2, 1)$.

Λύση. Έστω $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$. Τότε η δεδομένη έλλειψη είναι η ισοσταθμική καμπύλη $f(x, y) = 2$. Εδώ

$$\nabla f_{(-2,1)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \right)_{(-2,1)} = \left(\frac{x}{2} \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} \right)_{(-2,1)} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Άρα από την (6) έχουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στην έλλειψη στο σημείο $(-2, 1)$ είναι

$$(-1)(x - (-2)) + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y = -4.$$

□

Αν γνωρίζουμε τις κλίσεις δύο συναρτήσεων f και g , και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε μπορούμε να αποδείξουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad \nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g & 2. \quad \nabla(\lambda f) = \lambda \nabla f \\ 3. \quad \nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f & 4. \quad \nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2} \end{array}$$

7 Εφαπτόμενο επίπεδο

Αν $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ είναι μια λεία καμπύλη στην ισοσταθμική επιφάνεια $f(x, y, z) = c$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , τότε $f(g(t), h(t), k(t)) = c$. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη και έχουμε:

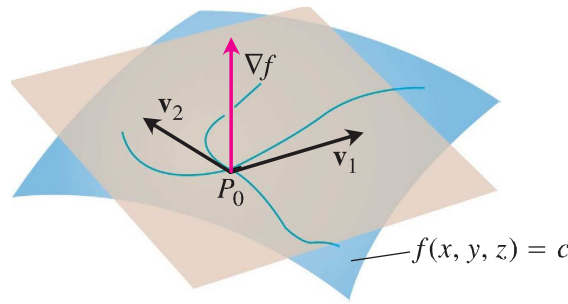
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(g(t), h(t), k(t)) &= \frac{d}{dt}(c) \\ \xrightarrow{\text{Καν. αλυσ.}} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dk}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{dg}{dt} \mathbf{i} + \frac{dh}{dt} \mathbf{j} + \frac{dk}{dt} \mathbf{k} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, σε κάθε σημείο της καμπύλης το διάνυσμα κλίσης ∇f είναι ορθογώνιο στο εφαπτόμενο διάνυσμα (διάνυσμα ταχύτητας) της καμπύλης.

Τώρα ας εστιάσουμε την προσοχή μας στις καμπύλες που διέρχονται από ένα σημείο P_0 της επιφάνειας, βλ. Σχήμα 9. Όλα τα διανύσματα της ταχύτητας στο σημείο P_0 είναι ορθογώνια στην κλίση ∇f , επομένως οι εφαπτόμενες ευθείες ανήκουν στο επίπεδο που διέρχεται από το P_0 και είναι κάθετο στην ∇f . Με τον τρόπο αυτό ορίζουμε το λεγόμενο εφαπτόμενο επίπεδο.

Ορισμός 7.1. Το **εφαπτόμενο επίπεδο** (*tangent plane*) στο σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ της ισοσταθμικής επιφάνειας $f(x, y, z) = c$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f είναι το επίπεδο που διέρχεται από το P_0 και είναι κάθετο στην $\nabla f|_{P_0}$. Επομένως, η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι:

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0. \quad (7)$$



Σχήμα 9: Η κλίση ∇f είναι κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας οποιασδήποτε λείας καμπύλης, της ισοσταθμικής επιφάνειας, που διέρχεται από το σημείο P_0 . Τα διανύσματα της ταχύτητας ανήκουν όλα σε ένα επίπεδο που το ονομάζουμε εφαπτόμενο επίπεδο.

Η ευθεία που είναι κάθετη στην επιφάνεια $f(x, y, z) = c$ στο σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = x_0 + f_x(P_0)t, \quad y = y_0 + f_y(P_0)t, \quad z = z_0 + f_z(P_0)t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Παράδειγμα. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο και την κάθετη ευθεία στην επιφάνεια $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ στο σημείο $P_0(1, 2, 4)$.

Λύση. Το διάνυσμα κλίσης στο σημείο $P_0(1, 2, 4)$ είναι:

$$\nabla f|_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right)_{P_0} = \left(2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 1 \mathbf{k} \right)_{(1,2,4)} = 2 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Άρα από την (7) έχουμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ στο σημείο $P_0(1, 2, 4)$ είναι:

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + 1(z - 4) = 0 \Rightarrow 2x + 4y + z = 14.$$

Η ευθεία που είναι κάθετη στην επιφάνεια στο σημείο $(1, 2, 4)$ δίνεται από την (8):

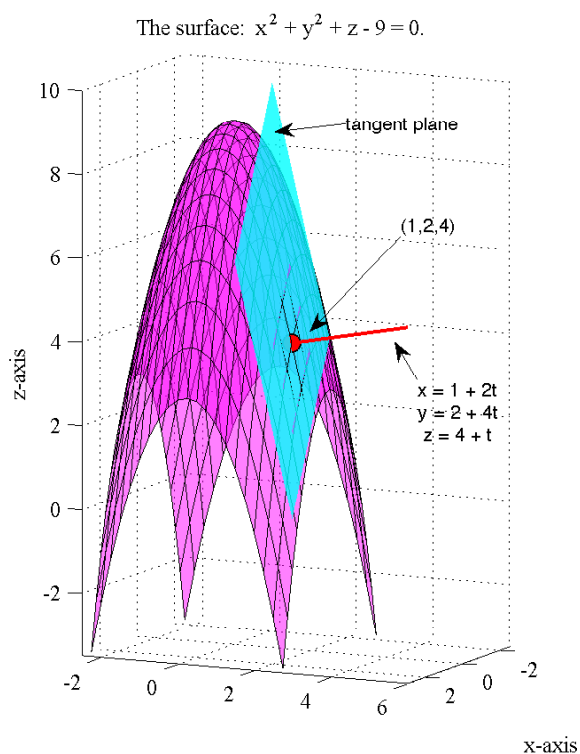
$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = 4 + t,$$

βλ. Σχήμα 10. □

Έστω τώρα μια λεία επιφάνεια $z = f(x, y)$. Για να βρούμε το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια στο σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ με $z_0 = f(x_0, y_0)$ εργαζόμαστε ως εξής:

$$z = f(x, y) \Leftrightarrow \underbrace{f(x, y) - z}_{=F(x,y,z)} = 0 \Leftrightarrow F(x, y, z) = 0.$$

Άρα μπορούμε να δούμε την επιφάνεια $z = f(x, y)$ ως την επιφάνεια μηδενικής στάθμης της συνάρτησης $F(x, y, z)$ (δηλ. $F(x, y, z) = 0$).



Σχήμα 10: Η επιφάνεια $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$, το εφαπτόμενο επίπεδο και η κάθετη ευθεία στο σημείο $P_0(1, 2, 4)$.

Υπολογίζουμε το διάνυσμα κλίσης της F , $\nabla F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$.

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) - z) = f_x, \quad F_y = \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y) - z) = f_y, \quad F_z = \frac{\partial}{\partial z}(f(x, y) - z) = -1.$$

Επομένως

$$\nabla F = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $z = f(x, y)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ δίνεται από την (7), και είναι:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \quad (9)$$

Παράδειγμα. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $z = x \cos y - ye^x$ στο σημείο $O(0, 0, 0)$.

Λύση.

$$f_x(0, 0) = (\cos y - ye^x)_{(0,0)} = 1 - 0 \cdot 1 = 1,$$

$$f_y(0, 0) = (-x \sin y - e^x)_{(0,0)} = 0 - 1 = -1.$$

Άρα η εξίσωση του ζητούμενου επιπέδου είναι:

$$1 \cdot (x - 0) + (-1) \cdot (y - 0) - (z - 0) = 0 \Leftrightarrow x - y - z = 0.$$

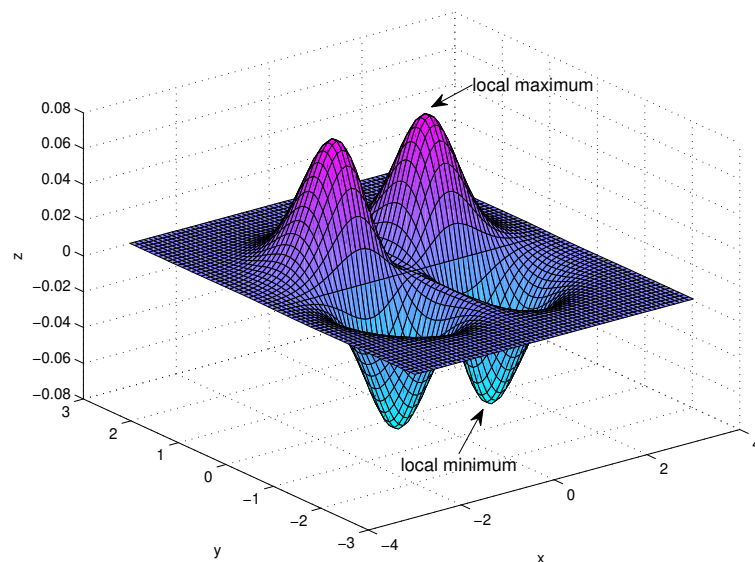
□

8 Ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Υπενθυμίζουμε ότι όταν αναζητούμε τοπικά ακρότατα παραγωγίσιμων συναρτήσεων μιας μεταβλητής, εξετάζουμε, ως υποψήφια, σημεία στα οποία το γράφημα της συνάρτησης έχει εφαπτόμενη ευθεία που είναι οριζόντια. Τέτοια σημεία είναι υποψήφια σημεία τοπικού μεγίστου, τοπικού ελαχίστου ή σημεία καμπής. Για μια συνάρτηση $f(x, y)$ δύο μεταβλητών, αναζητούμε σημεία στα οποία η επιφάνεια $z = f(x, y)$ έχει οριζόντιο εφαπτόμενο επίπεδο.

Ορισμός 8.1. Έστω $f(x, y)$ μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σ' ένα χωρίο R που περιέχει το σημείο (a, b) . Τότε

1. Η τιμή $f(a, b)$ είναι **τοπικό μέγιστο** της f αν $f(a, b) \geq f(x, y)$ για κάθε σημείο (x, y) του πεδίου ορισμού της f , που ανήκει σ' έναν ανοικτό δίσκο με κέντρο το σημείο (a, b) .
2. Η τιμή $f(a, b)$ είναι **τοπικό ελάχιστο** της f αν $f(a, b) \leq f(x, y)$ για κάθε σημείο (x, y) του πεδίου ορισμού της f , που ανήκει σ' έναν ανοικτό δίσκο με κέντρο το σημείο (a, b) .



Σχήμα 11: Τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα.

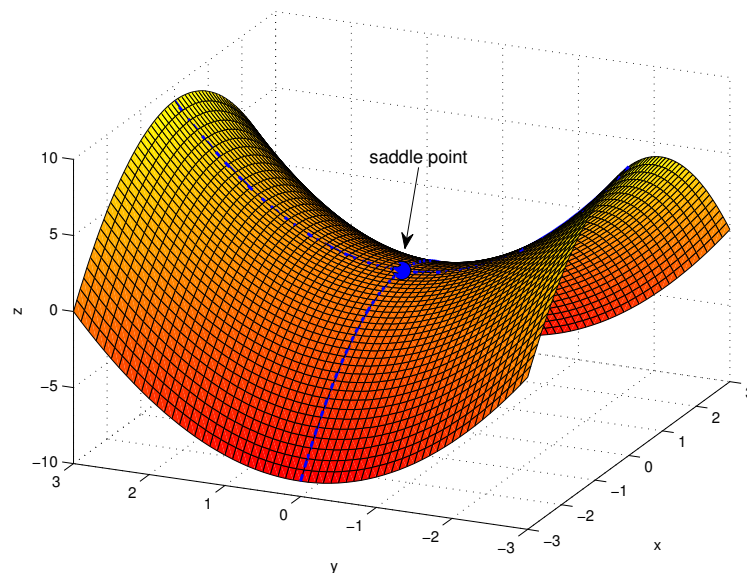
Θεώρημα 8.1. Αν η $f(x, y)$ έχει ένα τοπικό μέγιστο ή ένα τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο (a, b) του πεδίου ορισμού της, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Ορισμός 8.2. Ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης $f(x, y)$ στο οποίο και η f_x και η f_y είναι μηδέν ή στο οποίο τουλάχιστον μια από τις f_x και f_y δεν υπάρχει λέγεται **κρίσιμο σημείο** της f .

Άρα από το Θεώρημα 8.1 έχουμε ότι μια συνάρτηση μπορεί να παρουσιάσει τοπικά ακρότατα μόνο σε κρίσιμα σημεία ή σε συνοριακά σημεία. Αυτό δεν σημαίνει ότι σε κάθε κρίσιμο σημείο η f θα παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. (Θυμηθείτε ότι και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής μπορεί να έχουμε σημείο καμπής.) Στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών σε ένα κρίσιμο σημείο η συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει σαγματικό σημείο.

Ορισμός 8.3. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x, y)$ θα λέμε ότι έχει **σαγματικό σημείο** (saddle point) στο κρίσιμο σημείο (a, b) αν σε κάθε ανοικτό δίσκο με κέντρο το σημείο (a, b) υπάρχουν σημεία (x, y) (που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f) ώστε $f(x, y) > f(a, b)$ και σημεία (x, y) τέτοια ώστε $f(x, y) < f(a, b)$. Το αντίστοιχο σημείο $(a, b, f(a, b))$ της επιφάνειας $z = f(x, y)$ λέγεται **σαγματικό σημείο** της επιφάνειας. (Βλ. Σχήμα 12.)



Σχήμα 12: Σαγματικό σημείο.

Θεώρημα 8.2. Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y)$, καθώς και οι πρώτες και δεύτερες μερικές της παράγωγοι είναι συνεχείς σ' ένα δίσκο με κέντρο το (a, b) , και έστω ότι

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0.$$

Τότε

1. Αν $f_{xx} < 0$ και $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ στο (a, b) , τότε η f έχει **τοπικό μέγιστο** στο (a, b) .
2. Αν $f_{xx} > 0$ και $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ στο (a, b) , τότε η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο (a, b) .
3. Αν $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ στο (a, b) , τότε η f έχει **σαγματικό σημείο** στο (a, b) .

Το κριτήριο αυτό δεν οδηγεί σε κάποιο συμπέρασμα αν $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ στο (a, b) . Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να καταφύγουμε σε άλλες μεθόδους για να καθορίσουμε τη συμπεριφορά της f στο (a, b) .

Η παράσταση $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ ονομάζεται διακρίνουσα ή Εσσιανή ορίζουσα της f , και είναι ευκολότερο να τη θυμόμαστε στη μορφή

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

Παράδειγμα. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4.$$

Λύση. Το πεδίο ορισμού της f είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$, άρα δεν υπάρχουν συνοριακά σημεία. Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης είναι τα (x, y) για τα οποία $f_x = f_y = 0$.

$$\left. \begin{matrix} f_x = y - 2x - 2 = 0 \\ f_y = x - 2y - 2 = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} -2x + y = 2 \\ x - 2y = 2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x = y = -2.$$

Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(-2, -2)$. Επίσης

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 1,$$

οπότε η Εσσιανή ορίζουσα είναι

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - 1^2 = 3 > 0.$$

Επομένως έχουμε ότι

$$f_{xx} = -2 < 0 \quad \text{και} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0,$$

άρα η f παρουσιάζει στο $(-2, -2)$ τοπικό μέγιστο που είναι ίσο με $f(-2, -2) = 8$. $\square$

Παράδειγμα. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy.$$

Λύση. Το πεδίο ορισμού της f είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$, άρα δεν υπάρχουν συνοριακά σημεία.

Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης είναι τα (x, y) για τα οποία $f_x = f_y = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f_x = -6x + 6y = 0 \\ f_y = 6y - 6y^2 + 6x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ 12y - 6y^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ ή } x = y = 2.$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι $(0, 0)$ και $(2, 2)$. Επίσης

$$f_{xx} = -6, \quad f_{yy} = 6 - 12y, \quad f_{xy} = 6,$$

οπότε η Εσσιανή ορίζουσα είναι

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-6)(6 - 12y) - 36 = 72(y - 1).$$

Επομένως στο σημείο $(0, 0)$:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -72 < 0,$$

άρα η f παρουσιάζει στο $(0, 0)$ σαγματικό σημείο που είναι ίσο με $f(0, 0) = 0$.

Στο σημείο $(2, 2)$:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 72 > 0 \quad \text{και} \quad f_{xx} = -6 < 0,$$

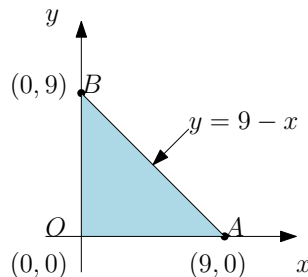
άρα η f παρουσιάζει στο $(2, 2)$ τοπικό μέγιστο που είναι ίσο με $f(2, 2) = 8$. $\square$

Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε πώς να υπολογίζουμε ολικά μέγιστα ή ελάχιστα σε κλειστά, φραγμένα χωρία.

Παράδειγμα. Βρείτε το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2,$$

στο τριγωνικό χωρίο



Λύση. Αναζητούμε κρίσιμα σημεία.

(α) Εσωτερικά σημεία:

$$\left. \begin{array}{l} f_x = 2 - 2x = 0 \\ f_y = 2 - 2y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Στο σημείο $(1, 1)$, $f(1, 1) = 4$.

(β) Συνοριακά σημεία:

- Στο ευθ. τμήμα OA ($y = 0$) έχουμε:

$$f(x, y) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 9.$$

Σημεία πιθανών ακροτάτων είναι τα άκρα $x = 0$, $x = 9$, και τα x για τα οποία $f'(x, 0) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Άρα εξετάζουμε τα σημεία $(0, 0)$, $(9, 0)$ και $(1, 0)$.

$$f(0, 0) = 2, \quad f(9, 0) = -61, \quad f(1, 0) = 3.$$

- Στο ευθ. τμήμα OB ($x = 0$) έχουμε:

$$f(x, y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2, \quad 0 \leq y \leq 9.$$

Σημεία πιθανών ακροτάτων είναι τα άκρα $y = 0$, $y = 9$, και τα y για τα οποία $f'(0, y) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 1$. Άρα εξετάζουμε τα σημεία $(0, 0)$, $(0, 9)$ και $(0, 1)$.

$$f(0, 0) = 2, \quad f(0, 9) = -61, \quad f(0, 1) = 3.$$

- Στο ευθ. τμήμα AB ($y = 9 - x$) έχουμε:

$$f(x, y) = f(x, 9 - x) = -61 + 18x - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 9.$$

Έχουμε ήδη εξετάσει τις τιμές στα άκρα $x = 0$ και $x = 9$, οπότε αναζητούμε τα x για τα οποία $f'(x, 9 - x) = 0 \Leftrightarrow 18 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 9/2$.

$$f(9/2, 9/2) = -\frac{41}{2}.$$

Έτσι κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών

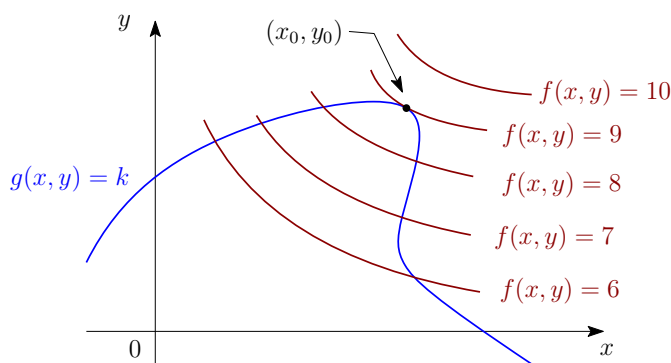
(x, y)	$(1, 1)$	$(0, 0)$	$(9, 0)$	$(1, 0)$	$(0, 9)$	$(0, 1)$	$(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$
$f(x, y)$	4	2	-61	3	-61	3	$-\frac{41}{2}$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση λαμβάνει ολικό μέγιστο στο σημείο $(1, 1)$ που είναι ίσο με 4, και ολικό ελάχιστο στα σημεία $(9, 0)$ και $(0, 9)$ που είναι ίσο με -61 . □

9 Ακρότατα υπό συνθήκη – Πολλαπλασιαστές Lagrange

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με μια αποτελεσματική μέθοδο για τον υπολογισμό ακροτάτων μιας συνάρτησης $f(x, y, z)$ όταν τα (x, y, z) ικανοποιούν μια συνθήκη της μορφής $g(x, y, z) = k$. Είναι απλούστερο να παρουσιάσουμε καταρχήν τη βασική γεωμετρική ιδέα της μεθόδου για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης $f(x, y)$ υπό τη συνθήκη $g(x, y) = k$. Με άλλα λόγια, θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα της $f(x, y)$ όταν το σημείο (x, y) βρίσκεται πάνω στην *ισοσταθμική καμπύλη* $g(x, y) = k$. Για παράδειγμα, έστω ότι στο Σχήμα 13 απεικονίζονται η ισοσταθμική καμπύλη $g(x, y) = k$ (με τη μπλε γραμμή), και διάφορες ισοσταθμικές καμπύλες της f της μορφής $f(x, y) = c$, για $c = 6, 7, 8, 9, 10$ (με κόκκινες γραμμές).



Σχήμα 13: Η ισοσταθμική καμπύλη $g(x, y) = k$ και διάφορες ισοσταθμικές καμπύλες της f .

Τότε για να υπολογίσουμε το μέγιστο της $f(x, y)$ υπό τη συνθήκη $g(x, y) = k$, αρκεί να βρούμε τη μεγαλύτερη τιμή του c για την οποία η καμπύλη $f(x, y) = c$ τέμνει την $g(x, y) = k$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα του Σχήματος 13 φαίνεται ότι αυτό συμβαίνει όταν οι δύο αυτές καμπύλες εφάπτονται (οπότε στο σημείο επαφής (x_0, y_0) θα έχουν κοινή εφαπτομένη). Άρα οι κάθετες ευθείες στο σημείο (x_0, y_0) θα ταυτίζονται, επομένως τα διανύσματα κλίσης $\nabla f(x_0, y_0)$ και $\nabla g(x_0, y_0)$ θα είναι παράλληλα. Συνεπώς θα υπάρχει ένας αριθμός λ τέτοιος ώστε $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

Το αντίστοιχο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοσθεί και και στο πρόβλημα εύρεσης τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών $f(x, y, z)$ υπό τη συνθήκη $g(x, y, z) = k$. Στην περίπτωση αυτή αντί να θεωρήσουμε ισοσταθμικές καμπύλες (όπως αυτές του Σχήματος 13) θεωρούμε τις *ισοσταθμικές επιφάνειες* $f(x, y, z) = c$ και αναμένουμε ότι αν, για παράδειγμα, η μέγιστη τιμή της f είναι $f(x_0, y_0, z_0) = c$, τότε η ισοσταθμική επιφάνεια $f(x, y, z) = c$ θα εφάπτεται στην ισοσταθμική επιφάνεια $g(x, y, z) = k$, οπότε και πάλι τα αντίστοιχα διανύσματα κλίσης θα είναι παράλληλα.

Το διαισθητικό αυτό επιχείρημα μπορεί να διατυπωθεί ακριβέστερα μέσω του ακόλουθου

θεωρήματος:

Θεώρημα 9.1 (Ορθογώνιας κλίσης). Έστω $f(x, y, z)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα χωρίο στο εσωτερικό του οποίου περιέχεται μια λεία καμπύλη C με διανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}.$$

Αν το $P_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι ένα σημείο της καμπύλης C όπου η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σε σχέση με τις τιμές της στην C , τότε το διάνυσμα κλίσης $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ είναι ορθογώνιο στην C στο σημείο P_0 .

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το διάνυσμα κλίσης $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{r}'(t) = x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} + z'(t) \mathbf{k}$ (διάνυσμα της ταχύτητας) της καμπύλης στο σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Έστω ότι t_0 είναι η τιμή της παραμέτρου t η οποία αντιστοιχεί στο σημείο P_0 . Τότε $\mathbf{r}(t_0) = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$. Έστω $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ η σύνθετη συνάρτηση που εκφράζει τις τιμές που παίρνει η f για (x, y, z) πάνω στην καμπύλη C . Εφόσον η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο (x_0, y_0, z_0) , προκύπτει ότι η h παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο t_0 , άρα $h'(t_0) = 0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$0 = h'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \frac{dy}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \frac{dz}{dt}(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0).$$

□

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα για συναρτήσεις δύο μεταβλητών διατυπώνεται στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 9.1. Στα σημεία μιας λείας καμπύλης $\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j}$, όπου μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x, y)$ εμφανίζει τοπικά ακρότατα σε σχέση με τις τιμές της στην καμπύλη, ισχύει $\nabla f \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

Τώρα είμαστε σε θέση να περιγράψουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για την εύρεση τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης $f(x, y, z)$ υπό τη συνθήκη $g(x, y, z) = k$.

Μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange

Έστω ότι οι $f(x, y, z)$ και $g(x, y, z)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και ότι $\nabla g \neq \mathbf{0}$ στην επιφάνεια $g(x, y, z) = k$.

(α) Για να βρούμε τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα της f υπό τη συνθήκη $g(x, y, z) = k$ (αν υπάρχουν) βρίσκουμε τις τιμές των x, y, z και λ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{και} \quad g(x, y, z) = k. \quad (10)$$

(β) Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία (x, y, z) που βρήκαμε στο βήμα (α). Η μεγαλύτερη από τις τιμές αυτές είναι η μέγιστη και η μικρότερη είναι η ελάχιστη.

Παρατηρήσεις:

1. Αν γράψουμε τη διανυσματική εξίσωση $\nabla f = \lambda \nabla g$ ως προς τις συνιστώσες της, τότε οι εξισώσεις (10) γράφονται ως εξής:

$$f_x = \lambda g_x, \quad f_y = \lambda g_y, \quad f_z = \lambda g_z, \quad g(x, y, z) = k.$$

Αυτό είναι ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους, τα x, y, z και λ . (Σημειώνουμε ότι δεν υπάρχουν γενικοί κανόνες για την επίλυση αυτού του συστήματος.)

2. Για συναρτήσεις δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x, y , η μέθοδος είναι εντελώς ανάλογη, αλλά χωρίς τη μεταβλητή z .

3. Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί κατά την εφαρμογή αυτής της μεθόδου. Είναι πιθανόν να μην υπάρχουν ακρότατα.

Παράδειγμα. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση

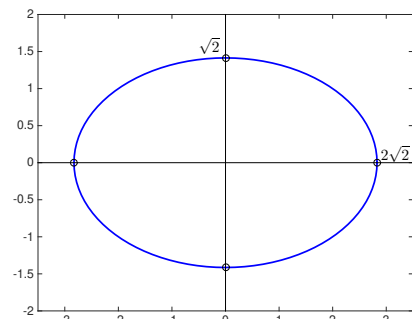
$$f(x, y) = xy$$

πάνω στην έλλειψη

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Λύση. Αναζητούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = xy$ υπό τη συνθήκη

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$



Για το σκοπό αυτό κατασκευάζουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \mathbf{i} + x \mathbf{j} = \lambda \left(\frac{x}{4} \mathbf{i} + y \mathbf{j} \right) \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases},$$

ισοδύναμα,

$$y = \frac{\lambda}{4} x \quad (11)$$

$$x = \lambda y \quad (12)$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1. \quad (13)$$

Αντικαθιστούμε την (12) στην (11) και βρίσκουμε:

$$y = \frac{\lambda^2}{4} y \Leftrightarrow y(\lambda^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } \lambda = \pm 2.$$

Περίπτωση 1: Αν το $y = 0$, τότε από την (12) έχουμε ότι $x = 0$, άρα καταλήγουμε στο σημείο $(0, 0)$. Όμως το σημείο $(0, 0)$ δεν ικανοποιεί την (13), δηλαδή δεν ανήκει στην έλλειψη. Άρα αναγκαστικά $y \neq 0$.

Περίπτωση 2: Αν $\lambda = \pm 2 \xrightarrow{(12)} x = \pm 2y$. Αντικαθιστούμε στην (13) και έχουμε:

$$\frac{4y^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1.$$

Έτσι καταλήγουμε στα σημεία: $(2, 1)$, $(2, -1)$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$, και κατασκευάζουμε τον πίνακα:

(x, y)	$(2, 1)$	$(2, -1)$	$(-2, 1)$	$(-2, -1)$
$f(x, y)$	2	-2	-2	2

Άρα οι τιμές των ακροτάτων είναι $xy = 2$ και $xy = -2$.

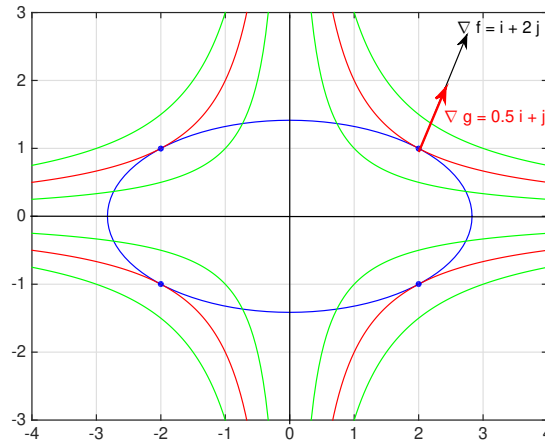
Γεωμετρική ερμηνεία: Οι ισοσταθμικές καμπύλες της $f(x, y) = xy$ είναι οι υπερβολές $xy = c$, βλ. Σχήμα 14. Ψάχνουμε τα ακρότατα της $f(x, y) = xy$ δεδομένου ότι το σημείο (x, y) ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$. Άρα αναζητούμε τις υπερβολές που τέμνουν την έλλειψη και απέχουν τη μέγιστη απόσταση από την αρχή. Αυτές είναι οι υπερβολές που εφάπτονται στην έλλειψη (και σημειώνονται με κόκκινο χρώμα στο Σχήμα 14).

Στα σημεία επαφής το διάνυσμα κλίσης της f είναι παράλληλο προς το διάνυσμα κλίσης της g . Πράγματι,

$$\nabla f(x, y) = y \mathbf{i} + x \mathbf{j} \quad \text{και} \quad \nabla g(x, y) = \frac{x}{4} \mathbf{i} + y \mathbf{j},$$

άρα, για παράδειγμα, στο σημείο $(2, 1)$ έχουμε ότι:

$$\nabla f(2, 1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \text{και} \quad \nabla g(2, 1) = \frac{1}{2} \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \nabla f = 2\nabla g,$$



Σχήμα 14: Η συνάρτηση $f(x, y) = xy$ υπό τη συνθήκη $g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ εμφανίζει ακρότατα στα τέσσερα σημεία στα οποία οι ισοσταθμικές καμπύλες της f (που σημειώνονται με κόκκινο χρώμα) εφάπτονται στην έλλειψη. Στα σημεία αυτά το ∇f είναι πολλαπλάσιο του ∇g όπως, π.χ., φαίνεται στο σχήμα για το σημείο $(2, 1)$.

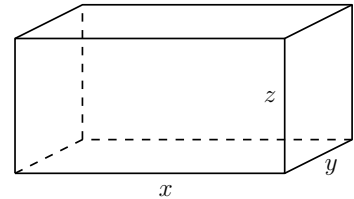
όπως βλέπουμε στο Σχήμα 14).

Ανάλογα στο σημείο $(2, -1)$ έχουμε ότι:

$$\nabla f(2, -1) = -i + 2j \quad \text{και} \quad \nabla g(2, -1) = \frac{1}{2}i - j, \quad \nabla f = -2\nabla g.$$

□

Παράδειγμα. Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο κουτί, χωρίς καπάκι, από χαρτόνι εμβαδού 12 m^2 . Βρείτε τον μέγιστο όγκο του κουτιού.



Λύση. Ο όγκος του κουτιού είναι προφανώς ίσος με xyz . Επίσης, η επιφάνεια του κουτιού είναι ίση με $xy + 2xz + 2yz$. Αρα αναζητούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $V(x, y, z) = xyz$ υπό τη συνθήκη

$$g(x, y) = xy + 2xz + 2yz = 12.$$

Για το σκοπό αυτό κατασκευάζουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \nabla V = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k} = \lambda [(y + 2z) \mathbf{i} + (x + 2z) \mathbf{j} + (2x + 2z) \mathbf{k}] \\ xy + 2xz + 2yz = 12 \end{cases},$$

ισοδύναμα,

$$yz = \lambda(y + 2z) \quad (14)$$

$$xz = \lambda(x + 2z) \quad (15)$$

$$xy = \lambda(2x + 2y) \quad (16)$$

$$xy + 2xz + 2yz = 12. \quad (17)$$

Αν $\lambda = 0$, τότε $yz = xz = xy = 0$, οπότε από την (16) έχουμε $0 = 12$, άτοπο. Άρα $\lambda \neq 0$. Τώρα, αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (14) με x , της (15) με y , και της (16) με z , βρίσκουμε

$$xyz = \lambda(xy + 2xz) \quad (18)$$

$$xyz = \lambda(xy + 2yz) \quad (19)$$

$$xyz = \lambda(2xz + 2yz). \quad (20)$$

Από τις (18) και (19), επειδή $\lambda \neq 0$, έχουμε:

$$xy + 2xz = xy + 2yz \Leftrightarrow xz = yz \Leftrightarrow (x - y)z = 0.$$

Όμως πρέπει $z \neq 0$ (αλλιώς θα είχαμε $V = 0$), άρα αναγκαστικά $x = y$. Επιπλέον, από τις (19) και (20) έχουμε

$$xy = 2xz \stackrel{x=y}{\Leftrightarrow} x^2 = 2xz \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x = 2z.$$

Άρα $x = y = 2z$, οπότε αντικαθιστούμε στην (17) και βρίσκουμε:

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12 \Leftrightarrow z = \pm 1.$$

Το « $-$ » απορρίπτεται διότι πρέπει $z > 0$. Άρα η V παρουσιάζει μέγιστο στο $(2, 2, 1)$ που είναι ίσο με $V(2, 2, 1) = 4 \text{ m}^3$. □

9.1 Πολλαπλασιαστές Lagrange με δύο συνθήκες*

Πολλές φορές αναζητούμε ακρότατα μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x, y, z)$ υπό δύο συνθήκες της μορφής:

$$g_1(x, y, z) = k_1 \quad \text{και} \quad g_2(x, y, z) = k_2,$$

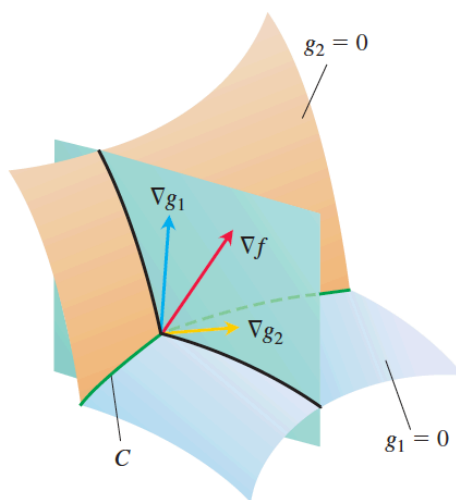
όπου g_1, g_2 είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με ∇g_1 μη παράλληλο στο ∇g_2 . Για την εύρεση των τοπικών ακροτάτων της f υπό τις συνθήκες αυτές εισάγουμε δύο πολλαπλασιαστές

*Εκτός εξεταστέας ύλης

Lagrange. Συγκεκριμένα, αναζητούμε τις τιμές των x, y, z, λ, μ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις:

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2, \quad g_1(x, y, z) = k_1 \quad \text{και} \quad g_2(x, y, z) = k_2. \quad (21)$$

Η γεωμετρική ερμηνεία των εξισώσεων (21) είναι η ακόλουθη: Οι επιφάνειες $g_1(x, y, z) = k_1$ και $g_2(x, y, z) = k_2$ τέμνονται (συνήθως) σε μια λεία καμπύλη, που ας την συμβολίσουμε με C (βλ. Σχήμα 15).



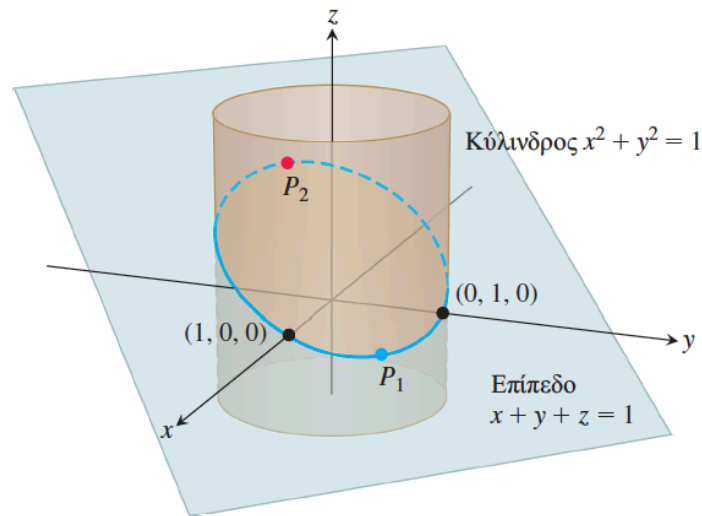
Σχήμα 15: Τα διανύσματα κλίσης ∇g_1 και ∇g_2 βρίσκονται σε ένα επίπεδο κάθετο στην καμπύλη C .

Άρα αναζητούμε τα τοπικά ακρότατα της f κατά μήκος της καμπύλης C . Στα σημεία αυτά το διάνυσμα κλίσης της f , ∇f , σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1, θα είναι κάθετο στη C . Αλλά τα ∇g_1 και ∇g_2 θα είναι επίσης κάθετα στη C στα σημεία αυτά, μιας και η καμπύλη C ανήκει στις επιφάνειες $g_1(x, y, z) = k_1$ και $g_2(x, y, z) = k_2$. Άρα το ∇f ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα ∇g_1 και ∇g_2 , επομένως θα υπάρχουν λ και μ τέτοια ώστε $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$. Αφού τα σημεία που ψάχνουμε ανήκουν επιπλέον και στις δύο επιφάνειες, οι συντεταγμένες τους θα πρέπει να ικανοποιούν και τις εξισώσεις $g_1(x, y, z) = k_1$ και $g_2(x, y, z) = k_2$, που συμπληρώνουν τις (21).

Παράδειγμα. Το επίπεδο $x + y + z = 1$ τέμνει τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ σε μια έλλειψη. Βρείτε τα σημεία της έλλειψης που απέχουν την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση από την αρχή.

Λύση. Αναζητούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (που εκφράζει το τετράγωνο της απόστασης του σημείου (x, y, z) από την αρχή $(0, 0, 0)$) υπό τις συνθήκες

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1 \quad \text{και} \quad g_2(x, y, z) = x + y + z = 1.$$



Σχήμα 16: Αναζητούμε τα πλησιέστερα και τα πλέον απομακρυσμένα σημεία από την αρχή πάνω στην έλλειψη, που προκύπτει από την τομή του κυλίνδρου με το επίπεδο.

Για το σκοπό αυτό κατασκευάζουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1(x, y, z) = 1 \\ g_2(x, y, z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k} = \lambda (2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j}) + \mu (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

ισοδύναμα,

$$2x = 2\lambda x + \mu \quad (22)$$

$$2y = 2\lambda y + \mu \quad (23)$$

$$2z = \mu \quad (24)$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (25)$$

$$x + y + z = 1. \quad (26)$$

Αντικαθιστούμε την (24) στις (22),(23) και έχουμε:

$$\begin{aligned} 2x = 2\lambda x + 2z &\Leftrightarrow (1 - \lambda)x = z \\ 2y = 2\lambda y + 2z &\Leftrightarrow (1 - \lambda)y = z \end{aligned} \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ και } z = 0 \text{ ή } \lambda \neq 1 : x = y = \frac{z}{1 - \lambda}.$$

Αν $z = 0$, τότε από τις (25) και (26) καταλήγουμε στα σημεία $(1, 0, 0)$ και $(0, 1, 0)$.

Αν $x = y = \frac{z}{1 - \lambda}$, πάλι από τις (25) και (26) βρίσκουμε:

$$2x^2 = 1 \text{ και } z = 1 - 2x \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, z = 1 \mp \sqrt{2}.$$

Έτσι καταλήγουμε στα σημεία $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right)$ και $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$.

Τέλος, κατασκευάζουμε τον πίνακα

(x, y)	$(1, 0, 0)$	$(0, 1, 0)$	P_1	P_2
$f(x, y)$	1	1	$4 - 2\sqrt{2} \approx 1.17$	$4 + 2\sqrt{2}$

Άρα, τα πλησιέστερα στην αρχή σημεία της έλλειψης είναι τα $(1, 0, 0)$ και $(0, 1, 0)$, ενώ το σημείο της έλλειψης που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή είναι το P_2 , βλ. και Σχήμα 16. □

Ασκήσεις

1. Βρείτε τα ακόλουθα όρια, αν υπάρχουν, ή δείξτε ότι το όριο δεν υπάρχει:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^4 + 3y^4} \\ (\beta) & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2} \\ (\gamma) & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ (\delta) & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} \end{array}$$

2. Βρείτε τις πρώτες μερικές παραγώγους των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & f(x, y) = \frac{x - y}{x + y} \\ (\beta) & f(x, y) = y \ln x \\ (\gamma) & f(x, \theta, t) = xe^{-t} \sin \theta \\ (\delta) & f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3yz \end{array}$$

3. Υπολογίστε τις f_{xxy}, f_{yyy} για τη συνάρτηση

$$f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2.$$

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση $u(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ είναι μια λύση της τριδιάστατης εξίσωσης του Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

5. Δείξτε ότι η συνάρτηση $u(x, t) = e^{-4k^2t} \sin kx$ είναι μια λύση της εξίσωσης της θερμότητας $u_t = 4u_{xx}$.

6. Αν f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις μιας μεταβλητής, τότε δείξτε ότι η συνάρτηση

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at),$$

είναι μια λύση της κυματικής εξίσωσης $u_{tt} = a^2u_{xx}$.

7. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο και την κάθετη ευθεία στην επιφάνεια $z = x \cos y - ye^x$ στο σημείο $(0, 0, 0)$.

8. Αν $z = x^2y + 3xy^4$, όπου $x = \sin 2t$ και $y = \cos t$, υπολογίστε την παράγωγο dz/dt στο $t = 0$.

9. Αν $R = \ln(u^2 + v^2 + w^2)$, $u = x + 2y$, $v = 2x - y$, $w = 2xy$, υπολογίστε με τον κανόνα της αλυσίδας τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial R}{\partial x}$ και $\frac{\partial R}{\partial y}$ για $x = y = 1$.
10. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ στο σημείο $(2, -1)$ στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.
11. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$ στο σημείο $(3, 4)$ στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.
12. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης

$$f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4.$$

13. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης

$$f(x, y) = xy - 2x - y.$$

14. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης

$$f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy.$$

15. Βρείτε το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$, στο κλειστό ορθογώνιο $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.
16. Βρείτε το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$, στο κλειστό τριγωνικό χωρίο που ορίζουν οι ευθείες $x = 0$, $y = 2$, και $y = 2x$ στο πρώτο τεταρτημόριο.
17. Βρείτε το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$, στο ορθογώνιο χωρίο $0 \leq x \leq 5$, $-3 \leq y \leq 0$.
18. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2$ πάνω στην έλλειψη $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
19. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $x^2 + y^2$ υπό τη συνθήκη $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$.
20. Βρείτε τα πλησιέστερα στην αρχή σημεία της επιφάνειας $z^2 = xy + 4$.

Σημείωση: Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό. Κάποια από τα σχήματα του κεφαλαίου αυτού έχουν παρθεί από τα βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- E. Kreyszig, *Ανώτερα Μαθηματικά για Μηχανικούς*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2018.
- J. E. Marsden, A. J. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015.
- J. Stewart, *Calculus: Concepts and Contexts*, 6th edition, Brooks/Cole, 2008.
- J. Hass, C. Heil, M.D. Weir, *Thomas Απειροστικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2018.