

Διανυσματικές συναρτήσεις

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών
Σχολή Μηχανικών



Απρίλιος 2019

1 Διανυσματικές συναρτήσεις

Μια διανυσματική συνάρτηση είναι απλώς μια συνάρτηση που το πεδίο ορισμού της είναι ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών ενώ το σύνολο τιμών της είναι ένα σύνολο διανυσμάτων. Συγκεκριμένα, εμείς θα ασχοληθούμε κυρίως με διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{r}$ που οι τιμές της είναι διανύσματα στον τριδιάστατο χώρο. Δηλαδή σε κάθε αριθμό t που ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\mathbf{r}$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό διάνυσμα, που το συμβολίζουμε $\mathbf{r}(t)$. Αν $(f(t), g(t), h(t))$ είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{r}(t)$, τότε οι f, g, h είναι πραγματικές συναρτήσεις που τις ονομάζουμε **συνιστώσες συναρτήσεις** της $\mathbf{r}$, και γράφουμε

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}.$$

Παράδειγμα. Αν

$$\mathbf{r}(t) = (t^3, \ln(1-t), \sqrt{t}),$$

τότε οι συνιστώσες συναρτήσεις είναι

$$f(t) = t^3, \quad g(t) = \ln(1-t), \quad h(t) = \sqrt{t}.$$

Το πεδίο ορισμού της $\mathbf{r}$ θα αποτελείται από τους αριθμούς $t \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η $\mathbf{r}(t)$ έχει νόημα. Οι εκφράσεις $t^3, \ln(1-t), \sqrt{t}$ ορίζονται όταν $1-t > 0$ και $t \geq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της $\mathbf{r}$ είναι το διάστημα $[0, 1)$. □

Το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}$ ορίζεται παίρνοντας τα όρια των συνιστωσών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα,

Αν $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, τότε

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right), \quad (1)$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα όρια των συνιστωσών συναρτήσεων.

Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t)$, αν

$$\mathbf{r}(t) = (1+t)^3 \mathbf{i} + t e^{-t} \mathbf{j} + \frac{\sin t}{t} \mathbf{k}.$$

Σύμφωνα με την (1) έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) &= \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^3 \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} t e^{-t} \right] \mathbf{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right] \mathbf{k} \\ &= 1 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 1 \mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

□

Μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}$ είναι συνεχής στο a αν

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a).$$

Άρα, ουσιαστικά, η $\mathbf{r}$ είναι συνεχής στο a αν και μόνον αν οι συνιστώσες συναρτήσεις f, g και h είναι συνεχείς στο a .

Όπως θα δούμε στη συνέχεια υπάρχει μια στενή σχέση μεταξύ των συνεχών διανυσματικών συναρτήσεων και καμπυλών στο χώρο.

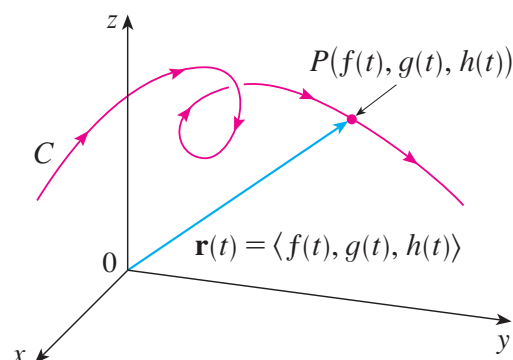
Έστω ότι οι f, g, h είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I . Τότε το σύνολο C όλων των σημείων (x, y, z) του χώρου, για τα οποία

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad (2)$$

όπου $t \in I$, περιγράφει μια **καμπύλη στο χώρο**.

Οι εξισώσεις στην (2) λέγονται **παραμετρικές συναρτήσεις της καμπύλης** C , και το t παράμετρος.

Μπορούμε να φανταστούμε την καμπύλη C ως την τροχιά που διαγράφει ένα κινούμενο σωματίδιο του οποίου η θέση σε κάθε χρονική στιγμή t είναι $(f(t), g(t), h(t))$. Αν θεωρήσουμε τώρα τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, τότε το $\mathbf{r}(t)$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου $P(f(t), g(t), h(t))$ της καμπύλης C , βλ. Σχήμα 1. Επομένως, κάθε συνεχής διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}$ ορίζει μια καμπύλη C στο χώρο η οποία διαγράφεται από το πέρας του κινούμενου διανύσματος θέσης $\mathbf{r}(t)$.



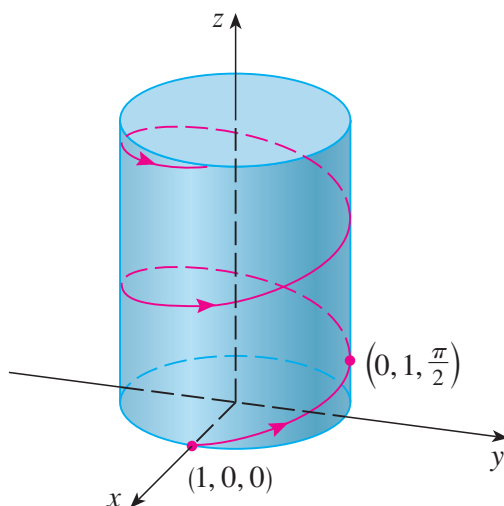
Σχήμα 1: Η καμπύλη C διαγράφεται από το πέρας του κινούμενου διανύσματος θέσης $\mathbf{r}(t)$.

Παράδειγμα. Σχεδιάστε την καμπύλη που περιγράφεται από τη διανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις αυτής της καμπύλης είναι:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \geq 0.$$



Σχήμα 2: Η καμπύλη $C : x = \cos t, y = \sin t, z = t, t \geq 0$, περιγράφει μια κυκλική έλικα.

Εφόσον $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, η καμπύλη αυτή θα πρέπει να ανήκει σε έναν κύλινδρο, βλ. Σχήμα 2. Ξεκινάει από το σημείο $(1, 0, 0)$ για $t = 0$, και περιελίσσεται γύρω από τον κύλινδρο προς τα πάνω καθώς το $z = t$ αυξάνει. Η καμπύλη που προκύπτει λέγεται **κυκλική έλικα**. □

Παρατηρήσεις:

1. Εντελώς ανάλογα μπορούμε να αναπαραστήσουμε και τις καμπύλες του επιπέδου με διανυσματικό συμβολισμό. Π.χ., αν θεωρήσουμε την καμπύλη του επιπέδου που ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = t^2 - 2t, \quad y = t + 1,$$

τότε μπορούμε να την περιγράψουμε και μέσω της διανυσματικής συνάρτησης

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t, t + 1) = (t^2 - 2t) \mathbf{i} + (t + 1) \mathbf{j},$$

όπου, εδώ, $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$.

2. Πρέπει να τονίσουμε ότι η παραμετρική αναπαράσταση μιας καμπύλης στο επίπεδο ή στο χώρο **δεν είναι μοναδική**. Π.χ. οι εξισώσεις

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi),$$

περιγράφουν ένα κύκλο στο επίπεδο με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα 1. Όμως και οι εξισώσεις

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t \in [0, 2\pi),$$

περιγράφουν τον ίδιο κύκλο.

2 Παράγωγος και ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης

Η παράγωγος μιας διανυσματικής συνάρτησης ορίζεται, κατ' αναλογία με την παράγωγο μιας πραγματικής συνάρτησης, ως εξής:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}, \quad (3)$$

αν το όριο αυτό υπάρχει.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μια βολική μέθοδο υπολογισμού της παραγώγου μιας διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}$. Αρκεί να παραγωγίσουμε κάθε συνιστώσα συνάρτηση της $\mathbf{r}$.

Θεώρημα 2.1. Αν $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j} + h(t) \mathbf{k}$, όπου οι f, g, h είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\mathbf{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t)) = f'(t) \mathbf{i} + g'(t) \mathbf{j} + h'(t) \mathbf{k}.$$

Αν η καμπύλη C στο χώρο περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I,$$

και οι f, g, h είναι συνεχώς παραγωγίσιμες στο I , τότε το διάνυσμα

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (f'(t), g'(t), h'(t))$$

είναι **εφαπτόμενο της καμπύλης C** στο σημείο $(f(t), g(t), h(t))$ και εκφράζει το **διάνυσμα της ταχύτητας** ενός σωματιδίου που κινείται πάνω στην καμπύλη C .

Πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε και το **μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα**, που ορίζεται ως:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}. \quad (4)$$

Παράδειγμα. Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας και τις παραμετρικές εξισώσεις της εφαπτομένης της κυκλικής έλικας

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \geq 0,$$

στο σημείο $P(-1, 0, \pi)$.

Λύση: Το σημείο $P(-1, 0, \pi)$ αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $t = \pi$. Εδώ

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = ((\cos t)', (\sin t)', t') = (-\sin t, \cos t, 1),$$

οπότε το διάνυσμα της ταχύτητας στο σημείο $P(-1, 0, \pi)$ είναι:

$$\mathbf{v} = (-\sin \pi, \cos \pi, 1) = (0, -1, 1).$$

Τώρα η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο P είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P(-1, 0, \pi)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{v}$. Άρα οι παραμετρικές εξισώσεις της εφαπτομένης της κυκλικής έλικας στο σημείο P είναι:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 0 \cdot t, \quad y = 0 + (-1) \cdot t, \quad z = \pi + 1 \cdot t, \quad t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad x &= -1, \quad y = -t, \quad z = \pi + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.1. Έστω $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ δύο παραγωγίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις, $\lambda \in \mathbb{R}$, και f μια

πραγματική συνάρτηση. Τότε

1. $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$
2. $\frac{d}{dt} [\lambda \mathbf{u}(t)] = \lambda \mathbf{u}'(t)$
3. $\frac{d}{dt} [f(t) \mathbf{u}(t)] = f'(t) \mathbf{u}(t) + f(t) \mathbf{u}'(t)$
4. $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$
5. $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$
6. $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(f(t))] = f'(t) \mathbf{u}'(f(t))$

□

Τέλος, το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$ ορίζεται με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων των συνιστωσών συναρτήσεων f, g, h :

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t) dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t) dt \right) \mathbf{k}. \quad (5)$$

Επιπλέον, μπορούμε να επεκτείνουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού για συνεχείς διανυσματικές συναρτήσεις:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{R}(t) \Big|_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a),$$

όπου $\mathbf{R}$ είναι μια αντιπαράγωγος της $\mathbf{r}$, δηλαδή $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Ακόμη, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\int \mathbf{r}(t) dt$ για το αόριστο ολοκλήρωμα (όλες τις αντιπαραγωγούς της $\mathbf{r}$).

Παράδειγμα. Αν $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$, τότε

$$\begin{aligned} \int \mathbf{r}(t) dt &= \left(\int 2 \cos t dt \right) \mathbf{i} + \left(\int \sin t dt \right) \mathbf{j} + \left(\int 2t dt \right) \mathbf{k} \\ &= 2 \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k} + \mathbf{C}, \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{C}$ είναι μια διανυσματική σταθερά ολοκλήρωσης.

Επιπλέον,

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t) dt = [2 \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}]_0^{\pi/2} = 2 \mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4} \mathbf{k}.$$

□

Ασκήσεις

1. Βρείτε το πεδίο ορισμού των διανυσματικών συναρτήσεων:

(i) $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{4-t^2}, e^{-3t}, \ln(t+1))$,

(ii) $\mathbf{r}(t) = \frac{t-2}{t+2} \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \ln(9-t^2) \mathbf{k}$.

2. Βρείτε μια διανυσματική εξίσωση, και παραμετρικές εξισώσεις, για το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $P(1, 0, 1)$ και $Q(2, 3, 1)$.

3. Όταν δύο αντικείμενα κινούνται κατά μήκος δύο διαφορετικών καμπυλών του χώρου πολλές φορές είναι σημαντικό να γνωρίζουμε αν αυτά θα συγκρουστούν. (Π.χ. θα πετύχει ένα βλήμα έναν κινούμενο στόχο; Θα συγκρουστούν δύο αεροπλάνα;) Οι καμπύλες μπορεί να τέμνονται αλλά, επιπλέον, θα πρέπει να γνωρίζουμε αν τα δύο αντικείμενα βρίσκονται στην ίδια θέση την ίδια χρονική στιγμή.

Έστω λοιπόν ότι δύο σωματίδια κινούνται κατά μήκος των καμπυλών του χώρου που ορίζονται από τις διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{r}_1(t) = (t, t^2, t^3)$ και $\mathbf{r}_2(t) = (1+2t, 1+6t, 1+14t)$. Τα σωματίδια αυτά θα συγκρουστούν ή όχι; Οι πορείες τους τέμνονται ή όχι;

4. Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας και τις παραμετρικές εξισώσεις της εφαπτομένης της καμπύλης

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + 3t \mathbf{j} + 2 \sin 2t \mathbf{k}, \quad t \geq 0,$$

στο σημείο $P(1, 0, 0)$.

5. Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της εφαπτομένης της καμπύλης, που ορίζεται με τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = t, \quad y = e^{-t}, \quad z = 2t - t^2,$$

στο σημείο $P(0, 1, 0)$.

6. Αν

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, \quad t \geq 0,$$

βρείτε τα $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ και $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.

7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 (16t^3 \mathbf{i} - 9t^2 \mathbf{j} + 25t^4 \mathbf{k}) dt$$

8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 (1e^t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + \ln t \mathbf{k}) dt$$

Σημείωση: Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό. Κάποια από τα σχήματα του κεφαλαίου αυτού έχουν παρθεί από τα βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics.
- J. Stewart, Calculus: Concepts and Contexts.
- G.B. Thomas, R.L. Finney, M.D. Weir, Calculus and Analytic Geometry.