

Διανύσματα και η γεωμετρία του χώρου

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών
Σχολή Μηχανικών



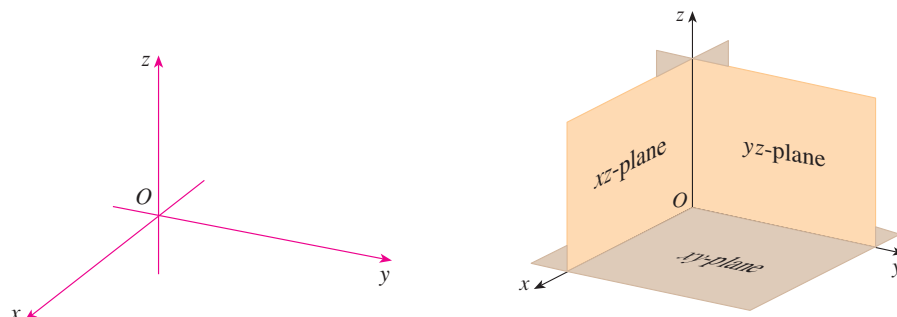
Απρίλιος 2019

1 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις

Όπως έχουμε δει για να εντοπίσουμε ένα σημείο στο επίπεδο θα πρέπει να γνωρίζουμε δύο αριθμούς. Ξεκινάμε ορίζοντας ως άξονες δύο κάθετες ευθείες οι οποίες τέμνονται στο σημείο O . Συνήθως, η μία ευθεία είναι οριζόντια και την αποκαλούμε άξονα των x και η άλλη κατακόρυφη και την αποκαλούμε άξονα των y . Τότε σε κάθε σημείο του επιπέδου P μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό διατεταγμένο ζεύγος αριθμών ως εξής: Από το σημείο P φέρνουμε κάθετες προς τους άξονες των x και y και έστω ότι τους τέμνουν στα σημεία a και b , αντίστοιχα. Υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμός a λέγεται **τετμημένη** του σημείου P , και ο b λέγεται **τεταγμένη** του σημείου P . Λέμε επίσης ότι το σημείο P έχει **συντεταγμένες** (a, b) , και γράφουμε $P(a, b)$.

Εργαζόμενοι αντίστροφα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (a, b) ένα μοναδικό σημείο P του επιπέδου. Για το λόγο αυτό δεν θα κάνουμε στη συνέχεια διάκριση μεταξύ του σημείου P και του ζεύγους (a, b) και θα λέμε συχνά «το σημείο (a, b) ». Τώρα, για να αναπαραστήσουμε σημεία στον χώρο εργαζόμαστε ανάλογα. Ορίζουμε ένα σημείο O στο χώρο ως αρχή των αξόνων και τρεις ευθείες, κάθετες ανά δύο, που ονομάζουμε αξόνες των x , y και z . Συνήθως θεωρούμε ότι οι άξονες των x , y βρίσκονται στο οριζόντιο επίπεδο και ο άξονας των z είναι κατακόρυφος, βλ. Σχήμα 1 (αριστερά). Οι τρεις άξονες συντεταγμένων καθορίζουν τρία επίπεδα συντεταγμένων ως εξής: Το xy επίπεδο είναι το επίπεδο που περιέχει τους άξονες x και y , το yz επίπεδο είναι το επίπεδο που περιέχει τους

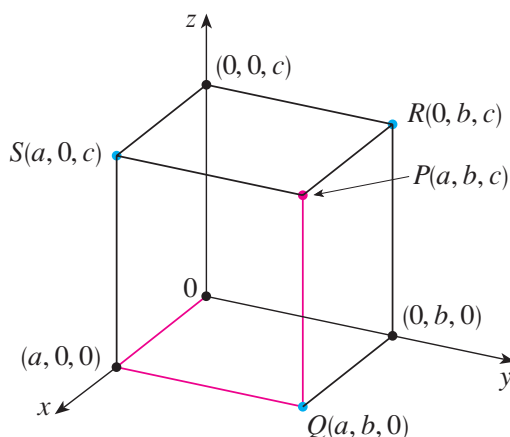
άξονες y και z , και το xz επίπεδο είναι το επίπεδο που περιέχει τους άξονες x και z , βλ. Σχήμα 1 (δεξιά). Τα τρία αυτά επίπεδα χωρίζουν το χώρο σε οκτώ μέρη που λέγονται οκτημόρια.



Σχήμα 1: Άξονες συντεταγμένων (αριστερά) και τα επίπεδα xy , yz και xz (δεξιά).

Επομένως, μπορούμε κάθε σημείο P στο χώρο να το αντιστοιχίσουμε με μια διατεταγμένη τριάδα αριθμών (a, b, c) , που λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου P , βλ. Σχήμα 2. Καταρχήν, από το σημείο P φέρνουμε κάθετη προς το xy επίπεδο που το τέμνει στο σημείο Q . Η τετμημένη του Q είναι a , ενώ η τεταγμένη του είναι b . Η αλγεβρική τιμή του ευθύγραμμου τμήματος PQ είναι c .

Αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες (a, b, c) εντοπίζουμε το σημείο P ως εξής: Ξεκινάμε από την αρχή O και κινούμαστε a μονάδες κατά μήκος του x -άξονα, μετά b μονάδες παράλληλα με τον y -άξονα, και τέλος c μονάδες παράλληλα με τον z -άξονα. Το σημείο Q που προκύπτει ως σημείο τομής της κάθετης από το P προς το xy επίπεδο με το επίπεδο αυτό λέγεται **προβολή του P στο xy επίπεδο** και έχει συντεταγμένες $(a, b, 0)$. Ανάλογα ορίζεται η προβολή του P στο yz επίπεδο, που είναι το σημείο R και έχει συντεταγμένες $(0, b, c)$, και η προβολή του P στο xz επίπεδο, που είναι το σημείο S και έχει συντεταγμένες $(a, 0, c)$.



Σχήμα 2: Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στον τριδιάστατο χώρο.

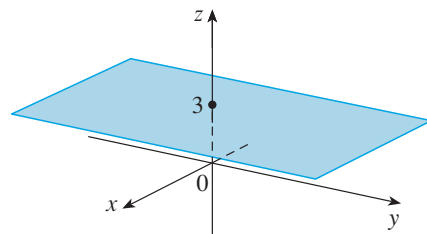
Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^3$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων τριάδων (x, y, z) , όπου $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Όπως γνωρίζουμε από τη γεωμετρία του επιπέδου μια εξίσωση που συνδέει τα x και y περιγράφει μια καμπύλη στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$. Στις τρεις διαστάσεις μια εξίσωση που συνδέει τα x, y και z περιγράφει μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$.

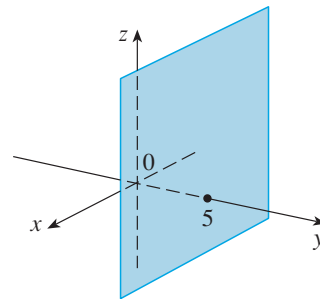
Παράδειγμα. Ποιές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ περιγράφουν οι εξισώσεις:

$$(\alpha) \quad z = 3, \quad (\beta) \quad y = 5;$$

(α) Η εξίσωση $z = 3$ περιγράφει το σύνολο των σημείων του χώρου με συντεταγμένες $(x, y, 3)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Αυτό είναι το οριζόντιο επίπεδο που είναι παράλληλο στο xy επίπεδο και βρίσκεται 3 μονάδες ψηλότερα (βλ. Σχήμα 3α).



(α)



(β)

Σχήμα 3: Τα επίπεδα (α) $z = 3$, (β) $y = 5$ στον τριδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$.

(β) Η εξίσωση $y = 5$ περιγράφει το σύνολο των σημείων του χώρου με συντεταγμένες $(x, 5, z)$, $x, z \in \mathbb{R}$. Αυτό είναι το κατακόρυφο επίπεδο που είναι παράλληλο στο xz επίπεδο και βρίσκεται 5 μονάδες δεξιότερα (βλ. Σχήμα 3β). $\square$

Γενικά, αν k είναι μια σταθερά, τότε η εξίσωση $x = k$ παριστάνει ένα επίπεδο που είναι παράλληλο στο yz επίπεδο, η εξίσωση $y = k$ παριστάνει ένα επίπεδο που είναι παράλληλο στο xz επίπεδο, και η εξίσωση $z = k$ παριστάνει ένα επίπεδο που είναι παράλληλο στο xy επίπεδο. Π.χ., οι έδρες του ορθογώνιου κουτιού του Σχήματος 2 είναι τα τρία επίπεδα συντεταγμένων $x = 0$ (yz επίπεδο), $y = 0$ (xz επίπεδο), $z = 0$ (xy επίπεδο), και τα επίπεδα $x = a$, $y = b$ και $z = c$.

Ο γνωστός μας τύπος για την απόσταση δύο σημείων του επιπέδου γενικεύεται εύκολα και για την περίπτωση δύο σημείων του $\mathbb{R}^3$.

Απόσταση δύο σημείων στον τριδιάστατο χώρο: Η απόσταση $|P_1 P_2|$ μεταξύ των σημείων $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$ είναι

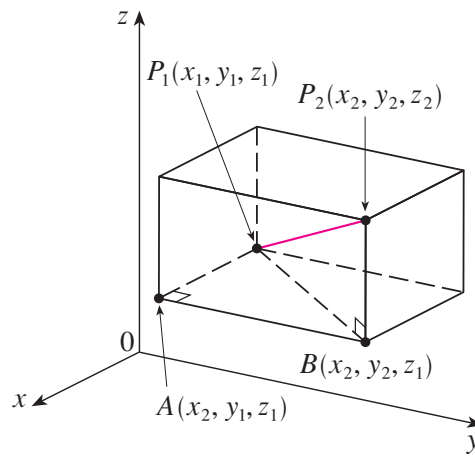
$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

Απόδειξη: Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο κουτί του Σχήματος 4, στο οποίο τα σημεία P_1 και P_2 είναι άκρα μιας διαγωνίου και οι έδρες του είναι παράλληλες στα επίπεδα συντεταγμένων. Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο P_1BP_2 είναι ορθογώνιο, οπότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι:

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2. \quad (2)$$

Επιπλέον, το τρίγωνο P_1AB είναι ορθογώνιο, οπότε και πάλι από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι:

$$|P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2. \quad (3)$$



Σχήμα 4: Απόσταση $|P_1P_2|$ των σημείων $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

Αντικαθιστούμε την (3) στην (2) και έχουμε

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ \Leftrightarrow |P_1P_2| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα. Η απόσταση των σημείων $A(-1, 2, 7)$ και $B(-3, 1, 5)$ είναι:

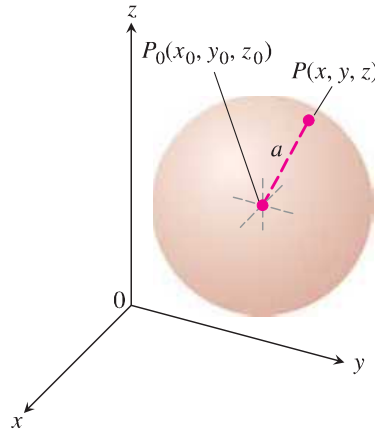
$$|AB| = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (2 - 1)^2 + (7 - 5)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

Παράδειγμα. Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και ακτίνα a .

Από τον ορισμό της η σφαίρα είναι το σύνολο των σημείων $P(x, y, z)$ του χώρου, όπου η απόστασή τους από το $P_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι σταθερή και ίση με a . Άρα το σημείο P θα ανήκει

στη σφαίρα αν και μόνον αν $|PP_0| = a$. Επομένως

$$|PP_0| = a \Leftrightarrow |PP_0|^2 = a^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$



Σχήμα 5: Σφαίρα με κέντρο το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και ακτίνα a .

Εξίσωση σφαίρας: Η εξίσωση της σφαίρας με κέντρο το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και ακτίνα a είναι

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2. \quad (4)$$

Ειδικότερα, αν το κέντρο είναι η αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$, τότε η εξίσωση είναι

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Παράδειγμα. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ παριστάνει σφαίρα, και βρείτε το κέντρο και την ακτίνα της.

Λύση: Για να φέρουμε την εξίσωση αυτή στη μορφή (4) κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνου και έχουμε:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + (z^2 + 2z + 1) - 1 + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 &= 4 + 9 + 1 - 6 \\ \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 &= 8. \end{aligned}$$

Άρα αν συγκρίνουμε την εξίσωση αυτή με την (4) βλέπουμε ότι πράγματι παριστάνει σφαίρα με κέντρο το σημείο $(-2, 3, -1)$ και ακτίνα $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. □

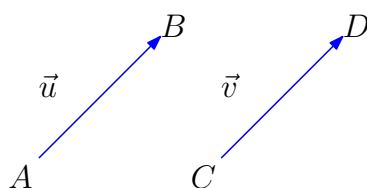
2 Διανύσματα

Ο όρος **διάνυσμα** (vector) χρησιμοποιείται για να δηλώσει μια ποσότητα η οποία για να οριστεί πλήρως πρέπει να γνωρίζουμε το μέτρο της, και την κατεύθυνσή της (διεύθυνση και φορά). Παραδείγματα διανυσματικών ποσοτήτων είναι η δύναμη, η μετατόπιση, η ταχύτητα του ανέμου, κ.ά. Αντίθετα, ποσότητες (όπως π.χ., το εμβαδόν, το μήκος, η θερμοκρασία) που περιγράφονται πλήρως αν γνωρίζουμε το μέγεθός τους ονομάζονται **βαθμωτές** (scalar). Πολλές φορές αναπαριστούμε ένα διάνυσμα ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου το ένα άκρο ονομάζεται αρχή του διανύσματος (ή σημείο εφαρμογής) και το άλλο άκρο πέρας του διανύσματος. Ένα διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$ και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινά από το A και καταλήγει στο B . Άλλοι τρόποι που χρησιμοποιούνται για το συμβολισμό των διανυσμάτων περιλαμβάνουν έντονα γράμματα του ελληνικού ή λατινικού αλφαβήτου (π.χ. $\mathbf{a}$) ή μικρά γράμματα με ένα βέλος (π.χ. $\vec{a}$).

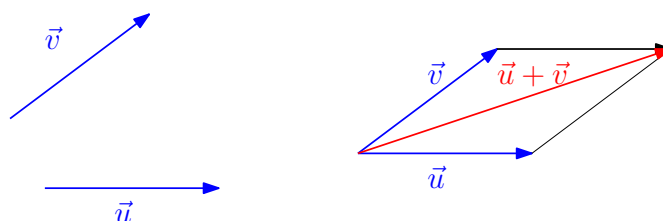
Έστω $\overrightarrow{AB}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Τότε

- ονομάζουμε **φορέα** του $\overrightarrow{AB}$ την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα.
- Αν δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς λέγονται **συγγραμμικά** ή **παράλληλα** και τότε λέμε ότι έχουν ίδια διεύθυνση. Τα συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ λέγονται **ομόρροπα** όταν έχουν την ίδια φορά, και **αντίρροπα** όταν έχουν αντίθετη φορά. Αν δύο διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση και είναι ομόρροπα τότε λέμε ότι έχουν **ίδια κατεύθυνση**, ενώ αν έχουν ίδια διεύθυνση και είναι αντίρροπα τότε λέμε ότι έχουν **αντίθετη κατεύθυνση**.
- **Μέτρο** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$. Αν ένα διάνυσμα έχει μέτρο 1 θα το λέμε **μοναδιαίο**.
- Θα λέμε **μηδενικό** το διάνυσμα στο οποίο η αρχή και το πέρας συμπίπτουν και θα το συμβολίζουμε με $\mathbf{0}$.
- Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι **ίσα**, και θα γράφουμε $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ έχουν ίσα μέτρα και ίδια κατεύθυνση, βλ. Σχήμα 6.
- Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι **αντίθετα**, και θα γράφουμε $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$, αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ έχουν ίσα μέτρα και αντίθετη κατεύθυνση.

Έστω $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Ορίζουμε ως **άθροισμα των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$** και συμβολίζουμε με $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, το διάνυσμα που κατασκευάζεται ως εξής: Μεταφέρουμε τα διανύσματα $\mathbf{u}$



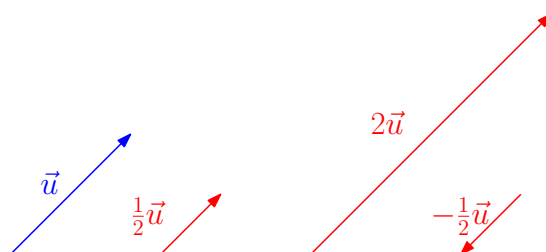
Σχήμα 6: Ίσα διανύσματα $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.



Σχήμα 7: Ο κανόνας του παραλληλογράμμου για το άθροισμα των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.

και $\mathbf{v}$ έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή, και κατασκευάζουμε ένα παραλληλόγραμμο όπως βλέπουμε στο Σχήμα 7. Τότε το $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ είναι το διάνυσμα που βρίσκεται κατά μήκος της διαγωνίου του παραλληλογράμμου με αρχή την κοινή αρχή των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.

Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{u}$ είναι ένα διάνυσμα, τότε ορίζουμε το **βαθμωτό γινόμενο** $\lambda \mathbf{u}$ να είναι το διάνυσμα με μέτρο $\lambda |\mathbf{u}|$, και κατεύθυνση ίδια με του $\mathbf{u}$ αν $\lambda > 0$, ενώ αντίθετη στην κατεύθυνση του $\mathbf{u}$ αν $\lambda < 0$.



Σχήμα 8: Βαθμωτά γινόμενα του $\mathbf{u}$.

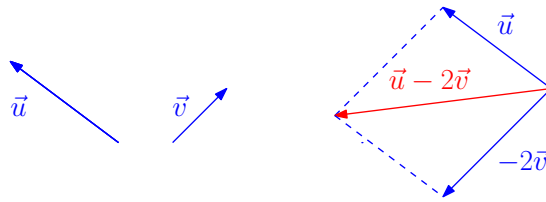
Ορίζουμε ως διαφορά των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ το διάνυσμα

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 9 βλέπουμε τα διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και τον τρόπο υπολογισμού του διανύσματος $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

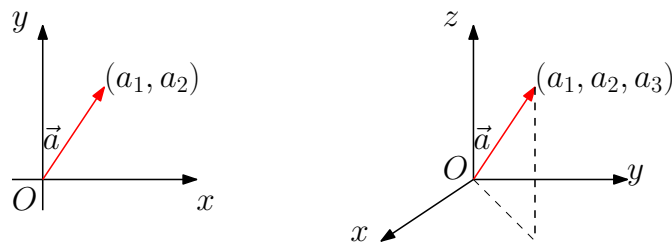
2.1 Συνιστώσες διανύσματος

Πολλές φορές μπορούμε να απλοποιήσουμε προβλήματα τα οποία αφορούν διανύσματα με την εισαγωγή ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων. Αν τοποθετήσουμε την αρχή



Σχήμα 9: Τα διανύσματα u , v και $u - 2v$.

ενός διανύσματος a στην αρχή ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων, τότε το πέρας του διανύσματος a θα έχει συντεταγμένες τις μορφής (a_1, a_2) αν είμαστε στις δύο διαστάσεις ή της μορφής (a_1, a_2, a_3) αν είμαστε στις τρεις διαστάσεις, βλ. Σχήμα 10.

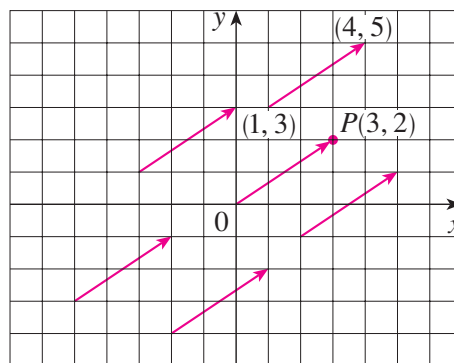


Σχήμα 10: Τα διανύσματα $a = (a_1, a_2)$ (δεξιά), και $a = (a_1, a_2, a_3)$ (αριστερά).

Οι συντεταγμένες αυτές λέγονται **συνιστώσες του διανύσματος** και γράφουμε

$$a = (a_1, a_2) \quad \text{ή} \quad a = (a_1, a_2, a_3).$$

Για παράδειγμα, όλα τα διανύσματα του Σχήματος 11 είναι ίσα με το διάνυσμα $\overrightarrow{OP} = (3, 2)$, που έχει ως πέρας το σημείο $P(3, 2)$. Μπορούμε να θεωρήσουμε όλα αυτά τα διανύσματα ως αναπαράστασεις του αλγεβρικού διανύσματος $a = (3, 2)$. Η συγκεκριμένη αναπαράσταση $\overrightarrow{OP}$ από την αρχή των αξόνων μέχρι το σημείο $P(3, 2)$ λέγεται **διάνυσμα θέσης** του σημείου P . Ανάλογα ισχύουν και για διανύσματα στις τρεις διαστάσεις.



Σχήμα 11: Διάφορες αναπαράστασεις του διανύσματος $a = (3, 2)$.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι αν γνωρίζουμε τα σημεία $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$, τότε το διάνυσμα $\mathbf{a}$ που αναπαριστά το $\overrightarrow{AB}$ είναι

$$\mathbf{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Επίσης, το μέτρο του διδιάστατου διανύσματος $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ είναι

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

ενώ το μέτρο του τριδιάστατου διανύσματος $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ είναι

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Αν έχουμε δύο διδιάστατα διανύσματα $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, και λ είναι ένας αριθμός, τότε

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2),$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2).$$

Ανάλογα για τριδιάστατα διανύσματα έχουμε

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

$$(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3),$$

$$\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

Όλα τα παραπάνω μπορούν να γενικευθούν και για περισσότερες διαστάσεις. Γενικά, ένα διάνυσμα στις n διαστάσεις είναι μια διατεταγμένη n -άδα αριθμών

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

όπου τα $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί και λέγονται συνιστώσες του $\mathbf{a}$. Τότε η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζονται ακριβώς όπως και στις περιπτώσεις $n = 2$ και $n = 3$.

Ιδιότητες διανυσμάτων: Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι διανύσματα και λ, μ είναι αριθμοί, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

$$1. \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$2. \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

$$3. \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

$$4. \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

$$5. \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$$

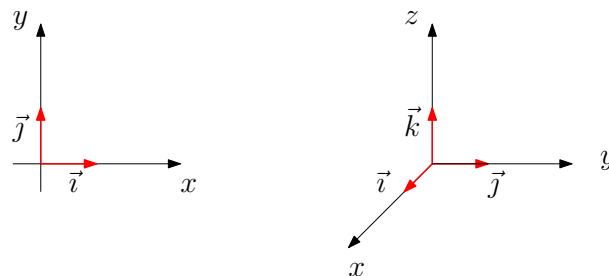
$$6. (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$$

$$7. (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$$

$$8. 1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Στις τρεις διαστάσεις τα ακόλουθα τρία διανύσματα, που ονομάζονται μοναδιαία διανύσματα βάσης, έχουν ιδιαίτερη σημασία:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$



Σχήμα 12: Μοναδιαία διανύσματα βάσης στις δύο και τρεις διαστάσεις.

Όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 12 (δεξιά) τα διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ έχουν μέτρο 1, και κατεύθυνση αυτή των θετικών x , y , z ημιαξόνων, αντίστοιχα. Ανάλογα, στις δύο διαστάσεις ορίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{i} = (1, 0)$ και $\mathbf{j} = (0, 1)$, βλ. Σχήμα 12 (αριστερά).

Τώρα, αν $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα στις τρεις διαστάσεις έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) \\ &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Άρα είδαμε ότι μπορούμε κάθε διάνυσμα στις τρεις διαστάσεις να το εκφράσουμε με τη βοήθεια των τριών διανυσμάτων $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Π.χ.

$$\mathbf{a} = (-1, 2, 4) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

2.2 Εσωτερικό γινόμενο

Μέχρι τώρα είδαμε πώς προσθέτουμε δύο διανύσματα και πώς πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό επί ένα διάνυσμα. Το ερώτημα που προκύπτει φυσιολογικά είναι αν μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο διανύσματα έτσι ώστε το αποτέλεσμα να είναι μια χρήσιμη ποσότητα. Στη

συνέχεια θα δούμε πώς θα ορίσουμε το λεγόμενο εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, ενώ στην επόμενη παράγραφο θα ορίσουμε το λεγόμενο εξωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 2.1. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ δύο διανύσματα. Τότε ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, και συμβολίζουμε $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, τον αριθμό που ορίζεται ως

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Ανάλογα για διδιάστατα διανύσματα έχουμε

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Παράδειγμα.

$$(2, 4) \cdot (3, -1) = 2(3) + 4(-1) = 2.$$

$$(-1, 3, 2) \cdot (2, -2, 5) = (-1)2 + 3(-2) + 2(5) = 2.$$

□

Για το εσωτερικό γινόμενο ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες. Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ τρία διανύσματα και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

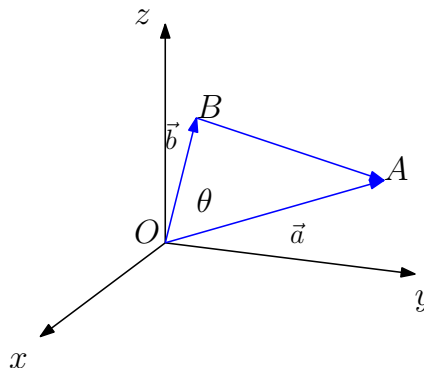
Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύονται εύκολα με τη βοήθεια του Ορισμού 2.1. Για παράδειγμα για τις 1 και 3 έχουμε:

$$1. \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2.$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) = a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3 \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

□

Για το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ μπορούμε να δώσουμε και την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία. Έστω θ η κυρτή γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), βλ. Σχήμα 13. Παρατηρήστε ότι αν τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι παράλληλα, τότε $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$.



Σχήμα 13: Η γωνία θ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

Τότε ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.1. Αν θ είναι η κυρτή γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, τότε

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta.$$

Απόδειξη: Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB του Σχήματος 13 έχουμε

$$|BA|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB| \cos \theta. \quad (5)$$

Όμως $|OA| = |\mathbf{a}|$, $|OB| = |\mathbf{b}|$, και $|BA| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, οπότε η (5) γίνεται

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta. \quad (6)$$

Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς η (6) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \\ \Leftrightarrow -2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= -2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα. Αν τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ έχουν μέτρα 4 και 6, αντίστοιχα, και σχηματίζουν γωνία $\pi/3$, υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Λύση. Από την Πρόταση 2.1 έχουμε

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$



Πόρισμα 2.1. Αν θ είναι η κυρτή γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, τότε

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Δύο διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ λέγονται **ορθογώνια** αν η γωνία που σχηματίζουν είναι $\theta = \pi/2$. Τότε από την Πρόταση 2.1 έχουμε

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Αντίστροφα, αν $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, τότε $\cos \theta = 0$, επομένως $\theta = \pi/2$. Το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ είναι ορθογώνιο προς κάθε διάνυσμα. Συνεπώς:

Δύο διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι **ορθογώνια** αν και μόνον αν $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Γωνίες κατεύθυνσης και συνημίτονα κατεύθυνσης.

Οι **γωνίες κατεύθυνσης** α, β, γ ενός μη μηδενικού διανύσματος $\mathbf{v} = (a, b, c)$ ορίζονται ως εξής:

- α είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\mathbf{v}$ με το θετικό x -ημιάξονα ($0 \leq \alpha \leq \pi$),
- β είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\mathbf{v}$ με το θετικό y -ημιάξονα ($0 \leq \beta \leq \pi$),
- γ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\mathbf{v}$ με το θετικό z -ημιάξονα ($0 \leq \gamma \leq \pi$),

βλ. Σχήμα 14.

Τα συνημίτονα των γωνιών κατεύθυνσης $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, λέγονται **συνημίτονα κατεύθυνσης** του διανύσματος $\mathbf{v}$. Εύκολα βλέπουμε από το Πόρισμα 2.1 ότι

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{i}|} = \frac{a}{|\mathbf{v}|}.$$

Ανάλογα, έχουμε ότι

$$\cos \beta = \frac{b}{|\mathbf{v}|} \quad \text{και} \quad \cos \gamma = \frac{c}{|\mathbf{v}|}.$$

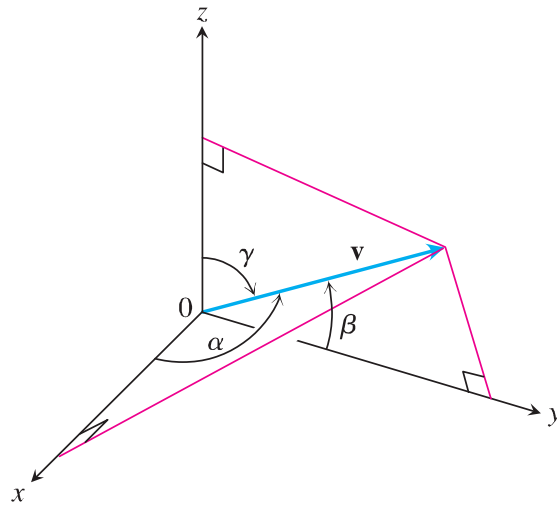
Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

και

$$\frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

η οποία μας λέει ότι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\mathbf{v}$ είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}$. (Η απόδειξη των σχέσεων αυτών αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.)

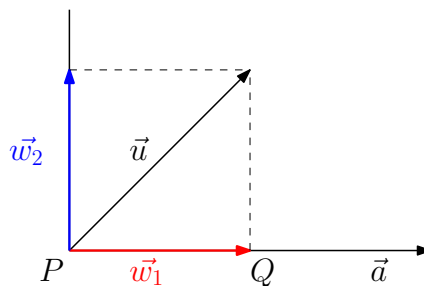


Σχήμα 14: Γωνίες κατεύθυνσης του διανύσματος v .

Ορθογώνιες προβολές.

Πολλές φορές θέλουμε να αναλύσουμε ένα διάνυσμα u ως ένα άθροισμα δύο διανυσμάτων, ενός που είναι παράλληλο μ' ένα συγκεκριμένο μη μηδενικό διάνυσμα a και ενός που είναι κάθετο στο a . Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής: Τοποθετούμε τα u και a έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή το σημείο P , βλ. Σχήμα 15. Στη συνέχεια φέρνουμε κάθετη από το πέρας του u προς τον φορέα του a που τον τέμνει στο σημείο Q και κατασκευάζουμε το διάνυσμα $w_1 = \overrightarrow{PQ}$. Κατόπιν, ορίζουμε $w_2 = u - w_1$. Τότε το w_1 είναι παράλληλο στο a , ενώ το w_2 είναι κάθετο στο a , και

$$w_1 + w_2 = w_1 + (u - w_1) = u.$$



Σχήμα 15: Ορθογώνιες προβολές.

Το w_1 ονομάζεται **ορθογώνια προβολή** του u στο a και συμβολίζεται με $\text{proj}_a u$, ενώ το w_2 ονομάζεται **κάθετη συνιστώσα** του u στο a . Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι

$$\text{proj}_a u = \frac{u \cdot a}{|a|^2} a. \quad (7)$$

2.3 Εξωτερικό γινόμενο

Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε ένα γινόμενο διανυσμάτων που μας δίνει τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε ένα διάνυσμα στον τριδιάστατο χώρο το οποίο να είναι κάθετο σε δύο δοθέντα διανύσματα.

Ορισμός 2.2. Αν τα $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ είναι διανύσματα στον τριδιάστατο χώρο, τότε ονομάζουμε **εξωτερικό γινόμενο** των $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, και συμβολίζουμε με $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, το διάνυσμα με συνιστώσες:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1), \quad (8)$$

ή, χρησιμοποιώντας συμβολισμό οριζουσών,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Γενικά είναι ευκολότερο αντί να θυμόμαστε τους τύπους (8) και (9) να χρησιμοποιούμε την έκφραση

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Αν και η πρώτη γραμμή της ορίζουσας στο δεξί μέλος της (10) αποτελείται από διανύσματα αν αναπτύξουμε (κατά τα συνήθη) την ορίζουσα αυτή ως προς την πρώτη γραμμή παίρνουμε τον τύπο (9).

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.1. Αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στον τριδιάστατο χώρο, τότε

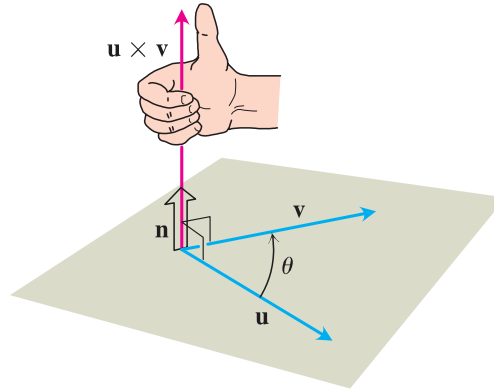
$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= 0, & (\text{το } \mathbf{u} \times \mathbf{v} \text{ είναι ορθογώνιο στο } \mathbf{u}.) \\ (\beta) \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= 0, & (\text{το } \mathbf{u} \times \mathbf{v} \text{ είναι ορθογώνιο στο } \mathbf{v}.) \\ (\gamma) \quad |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2, & (\text{ταυτότητα του Lagrange.}) \end{aligned}$$

Αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα, τότε μπορεί να αποδειχτεί ότι $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta) \mathbf{n}, \quad (11)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), και $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{u}$ και στο $\mathbf{v}$ και η κατεύθυνσή του δίνεται

από το λεγόμενο «κανόνα του δεξιού χεριού», βλ. Σχήμα 16. Συγκεκριμένα, έστω ότι το u περιστρέφεται κατά μήκος της γωνίας θ μέχρι να συμπίψει με το v . Αν βάλουμε τα δάχτυλα του δεξιού χεριού να δείχνουν προς την κατεύθυνση της περιστροφής, τότε ο αντίχειρας υποδεικνύει την κατεύθυνση του n , και επομένως και του $u \times v$.



Σχήμα 16: Εξωτερικό γινόμενο $u \times v$ των διανυσμάτων u και v .

Για παράδειγμα, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned} i \times j &= k & , & & j \times i &= -k \\ j \times k &= i & , & & k \times j &= -i \\ k \times i &= j & , & & i \times k &= -j. \end{aligned}$$

Επίσης, δύο διανύσματα a και b θα είναι παράλληλα αν η γωνία που σχηματίζουν είναι $\theta = 0$ ή π . Συνεπώς, από την (11) έχουμε:

Δύο διανύσματα a και b είναι **παράλληλα** αν και μόνον αν $a \times b = 0$.

Οι κυριότερες ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου συνοψίζονται στο επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 2.2. Αν u, v, w είναι διανύσματα στον τριδιάστατο χώρο και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

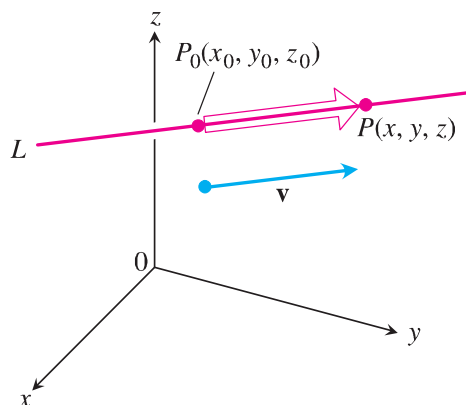
1. $u \times v = -v \times u$.
2. $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v) = u \times (\lambda v)$.
3. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.
4. $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$.
5. $u \times 0 = 0 \times u = 0$.
6. $u \times u = 0$.

3 Εξισώσεις ευθείας και επιπέδου στον τριδιάστατο χώρο

3.1 Εξίσωση ευθείας στον τριδιάστατο χώρο

Μια ευθεία στο διδιάστατο χώρο (xy -επίπεδο) καθορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε ένα σημείο της και την κλίση της, ή αν γνωρίζουμε δύο σημεία της. Τώρα, στον τριδιάστατο χώρο, έστω L η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $v = (a, b, c)$, βλ. Σχήμα 17. Τότε η ευθεία L αποτελείται από τα σημεία $P(x, y, z)$ για τα οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{P_0P}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα v . Τότε όμως υπάρχει ένα βαθμωτό t τέτοιο ώστε

$$\overrightarrow{P_0P} = t v.$$



Σχήμα 17: Η ευθεία L που διέρχεται από το $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα v .

Χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες των διανυσμάτων η εξίσωση αυτή γράφεται στη μορφή

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

Άρα τα σημεία της ευθείας L που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $v = (a, b, c)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

που ονομάζονται **παραμετρικές εξισώσεις** της ευθείας L . Για κάθε τιμή της παραμέτρου t βρίσκουμε ένα σημείο $P(x, y, z)$ της ευθείας L .

Τώρα, αν $r(t)$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου $P(x, y, z)$ της ευθείας και r_0 είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου $P_0(x_0, y_0, z_0)$, τότε από τις εξισώσεις (12) καταλήγουμε στη λεγόμενη διανυσματική μορφή της ευθείας:

Η διανυσματική εξίσωση της ευθείας L που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v} = (a, b, c)$ είναι

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

όπου $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου $P(x, y, z)$ της ευθείας L και $\mathbf{r}_0$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

3.2 Εξίσωση επιπέδου στον τριδιάστατο χώρο

Ένα επίπεδο καθορίζεται στον τριδιάστατο χώρο αν γνωρίζουμε ένα σημείο του και ένα διάνυσμα που να είναι κάθετο προς το επίπεδο.

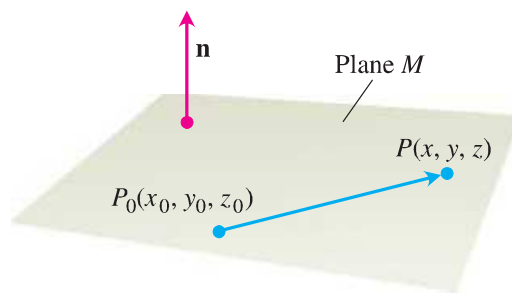
Θεωρήστε το επίπεδο M που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, βλ. Σχήμα 18. Τότε το M είναι το σύνολο όλων των σημείων $P(x, y, z)$ για τα οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{P_0P}$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{n}$ ή, ισοδύναμα,

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$



Σχήμα 18: Επίπεδο που διέρχεται από το $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{n}$.

Άρα το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, έχει

παραμετρική εξίσωση:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0, \quad (14)$$

και εξίσωση σε μορφή συνιστωσών:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (15)$$

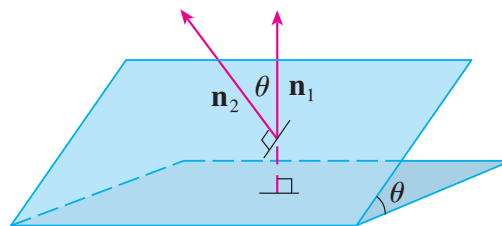
Η εξίσωση (15) μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (16)$$

όπου $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Αντίστροφα, μπορεί να αποδειχθεί ότι αν τα a, b, c δεν είναι όλα μηδέν, τότε η εξίσωση (16) παριστάνει ένα επίπεδο με κάθετο διάνυσμα το (a, b, c) .

Δύο επίπεδα είναι **παράλληλα** αν τα κάθετα διανύσματα τους είναι παράλληλα. Π.χ., τα επίπεδα $x - 2y + 3z - 4 = 0$ και $2x - 4y + 6z + 7 = 0$ είναι παράλληλα γιατί τα κάθετα διανύσματα τους $\mathbf{n}_1 = (1, -2, 3)$ και $\mathbf{n}_2 = (2, -4, 6)$ είναι παράλληλα μιας και $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$. Αν δύο επίπεδα δεν είναι παράλληλα, τότε η τομή τους είναι μια ευθεία γραμμή και η γωνία που σχηματίζουν τα δύο επίπεδα ορίζουμε να είναι η οξεία γωνία που σχηματίζουν τα κάθετα διανύσματα, βλ. Σχήμα 19.



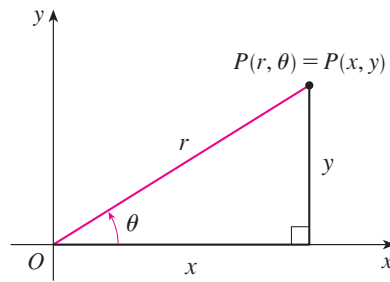
Σχήμα 19: Γωνία θ δύο επιπέδων.

4 Κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες

Στη γεωμετρία του επιπέδου είδαμε ότι πολλές φορές είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε πολικές αντί για ένα καρτεσιανές συντεταγμένες. Στο Σχήμα 20 υπενθυμίζουμε τη σχέση καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων. Αν ένα σημείο P στο επίπεδο έχει καρτεσιανές συ-

ντεταγμένες (x, y) και πολικές συντεταγμένες (r, θ) , τότε

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, \\ r^2 &= x^2 + y^2, & \tan \theta &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

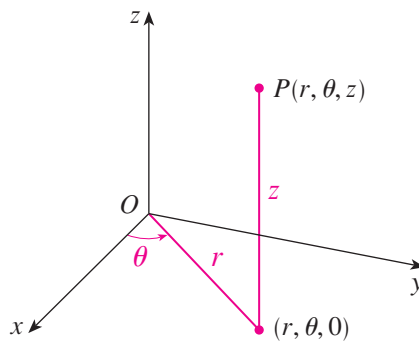


Σχήμα 20: Πολικές συντεταγμένες.

Στις τρεις διαστάσεις χρησιμοποιούμε δύο συστήματα συντεταγμένων που μοιάζουν με τις πολικές συντεταγμένες και μας διευκολύνουν να περιγράψουμε επιφάνειες και στερεά που εμφανίζονται συχνά στην πράξη.

4.1 Κυλινδρικές συντεταγμένες

Στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων ένα σημείο P στον τριδιάστατο χώρο αναπαρίσταται με μια διατεταγμένη τριάδα (r, θ, z) , όπου r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες της προβολής του σημείου P στο xy -επίπεδο, και z είναι η προσημασμένη απόσταση του σημείου P από το xy -επίπεδο, βλ. Σχήμα 21.



Σχήμα 21: Κυλινδρικές συντεταγμένες.

Για να μετατρέψουμε κυλινδρικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

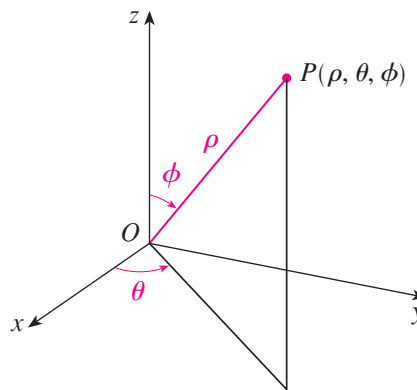
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z. \quad (17)$$

Αντίστροφα, μετατρέπουμε καρτεσιανές σε κυλινδρικές συντεταγμένες με τις σχέσεις

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z. \quad (18)$$

4.2 Σφαιρικές συντεταγμένες

Οι σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, ϕ) ενός σημείου P στον τριδιάστατο χώρο απεικονίζονται στο Σχήμα 22, όπου $\rho \geq 0$ είναι η απόσταση του σημείου P από την αρχή των αξόνων O , θ είναι η ίδια γωνία με αυτή που ορίζουμε στις κυλινδρικές συντεταγμένες, και ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει ο θετικός z -ημιάξονας με το ευθύγραμμο τμήμα OP , $0 \leq \phi \leq \pi$.



Σχήμα 22: Σφαιρικές συντεταγμένες.

Η σχέση σφαιρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων απεικονίζεται στο Σχήμα 23. Για να μετατρέψουμε σφαιρικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

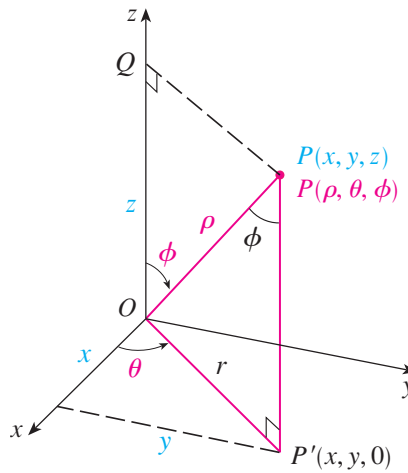
$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi. \quad (19)$$

Επίσης, από τον τύπο για την απόσταση δύο σημείων έχουμε άμεσα ότι

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

5 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Αν $\mathbf{a} = (4, 0, 3)$ και $\mathbf{b} = (-2, 3, 1)$, υπολογίστε τα εξής: $|\mathbf{a}|$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.



Σχήμα 23: Σχέση σφαιρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 |a| &= \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \\
 a + b &= (4, 0, 3) + (-2, 3, 1) = (4 - 2, 0 + 3, 3 + 1) = (2, 3, 4) \\
 2b &= 2(-2, 3, 1) = (2(-2), 2(3), 2(1)) = (-4, 6, 2) \\
 a - 3b &= (4, 0, 3) - 3(-2, 3, 1) = (4, 0, 3) - (-6, 9, 3) = (10, -9, 0).
 \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2. Αν $a = i + 2j - k$ και $b = 3i - 5k$, εκφράστε το διάνυσμα $2a + 3b$ ως προς τα i, j, k .

Λύση. Από τις ιδιότητες των διανυσμάτων έχουμε:

$$\begin{aligned}
 2a + 3b &= 2(i + 2j - k) + 3(3i - 5k) = 2i + 4j - 2k + 9i - 15k \\
 &= 11i + 4j - 17k.
 \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3. Αν το διάνυσμα a έχει μέτρο 2, το διάνυσμα b έχει μέτρο 5, και τα δύο αυτά διανύσματα σχηματίζουν γωνία $\pi/3$ υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $a \cdot b$.

Λύση. Από την Πρόταση 2.1 έχουμε

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta = 2 \cdot 5 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

□

Παράδειγμα 4. Δείξτε ότι τα διανύσματα $2i + 2j - k$ και $5i - 4j + 2k$ είναι ορθογώνια.

Λύση.

$$\begin{aligned}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) &= (2, 2, -1) \cdot (5, -4, 2) \\ &= 2 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 = 10 - 8 - 2 = 0.\end{aligned}$$

Αφού τα διανύσματα αυτά έχουν εσωτερικό γινόμενο 0, συμπεραίνουμε ότι είναι ορθογώνια.

□

Παράδειγμα 5. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{a} = (2, 2, -1)$ και $\mathbf{b} = (5, -3, 2)$.

Λύση. Από το Πόρισμα 2.1 έχουμε ότι αν θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, τότε $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}| &= \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38} \\ \text{και } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= 2 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = 10 - 6 - 2 = 2.\end{aligned}$$

Άρα

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}} \Leftrightarrow \theta = \arccos \left(\frac{2}{3\sqrt{38}} \right) \approx 1.46 \text{ ή } 84^\circ.$$

□

Παράδειγμα 6. Βρείτε την ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\mathbf{b} = (1, 1, 2)$ στο διάνυσμα $\mathbf{a} = (-2, 3, 1)$.

Λύση. Από την (7) έχουμε ότι

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}.$$

Επειδή

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}|^2 &= (-2)^2 + 3^2 + 1^2 = 14 \\ \text{και } \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} &= (1, 1, 2) \cdot (-2, 3, 1) = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 3,\end{aligned}$$

προκύπτει ότι

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} = \frac{3}{14} (-2, 3, 1) = \left(-\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14} \right).$$

□

Παράδειγμα 7. Υπολογίστε το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\mathbf{a} = (4, 0, 3)$ και $\mathbf{b} = (-2, 3, 1)$.

Λύση.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) \mathbf{i} - (4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)) \mathbf{j} + (4 \cdot 3 - 0 \cdot (-2)) \mathbf{k} \\ &= -9 \mathbf{i} - 10 \mathbf{j} + 12 \mathbf{k}.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 8. Βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα τρία σημεία $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$, $R(1, -1, 1)$.

Λύση. Το διάνυσμα $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ είναι κάθετο τόσο στο διάνυσμα $\overrightarrow{PQ}$ όσο και στο $\overrightarrow{PR}$, άρα είναι κάθετο και στο επίπεδο που ορίζουν τα τρία σημεία P, Q, R .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (-2 - 1, 5 - 4, -1 - 6) = (-3, 1, -7), \\ \overrightarrow{PR} &= (1 - 1, -1 - 4, 1 - 6) = (0, -5, -5), \\ \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-5 - 35)\mathbf{i} - (15 - 0)\mathbf{j} + (15 - 0)\mathbf{k} \\ &= -40\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 15\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Άρα το διάνυσμα $(-40, -15, 15)$ είναι κάθετο προς το δοσμένο επίπεδο. Φυσικά, οποιοδήποτε βαθμωτό πολλαπλάσιο του διανύσματος αυτού είναι επίσης κάθετο προς το επίπεδο αυτό.

□

Παράδειγμα 9. Βρείτε τη διανυσματική και τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(5, 1, 3)$ και είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Στη συνέχεια βρείτε και άλλα δύο σημεία της ευθείας αυτής.

Λύση. Εδώ το διάνυσμα θέσης του σημείου $(5, 1, 3)$ είναι $\mathbf{r}_0 = (5, 1, 3) = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ και έστω $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Επομένως, η διανυσματική εξίσωση της ευθείας δίνεται από την (13),

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \mathbf{r} &= (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \\ \Leftrightarrow \mathbf{r} &= (5 + t)\mathbf{i} + (1 + 4t)\mathbf{j} + (3 - 2t)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας είναι

$$x = 5 + t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 3 - 2t.$$

Για να βρούμε άλλα σημεία της ευθείας δίνουμε τιμές στην παράμετρο t , π.χ. για $t = 1$ έχουμε $x = 6, y = 5, z = 1$, άρα το σημείο $(6, 5, 1)$ ανήκει στην ευθεία. Ανάλογα, για $t = -1$, βρίσκουμε το σημείο $(4, -3, 5)$. □

Παράδειγμα 10. Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(2, 4, -3)$ και $B(3, -1, 1)$. Σε ποιο σημείο η ευθεία τέμνει το xy -επίπεδο.

Λύση. Εδώ δεν μας δίνεται ένα διάνυσμα που να είναι παράλληλο προς την ευθεία, αλλά αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο προς την ευθεία. Έχουμε

$$\mathbf{v} = (3 - 2, -1 - 4, 1 - (-3)) = (1, -5, 4).$$

Αν θεωρήσουμε ως P_0 το σημείο $A(2, 4, -3)$, τότε οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας δίνονται από την (12),

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at, & y &= y_0 + bt, & z &= z_0 + ct, & t &\in \mathbb{R}, \\ \Leftrightarrow & & x &= 2 + t, & y &= 4 - 5t, & z &= -3 + 4t. \end{aligned} \quad (20)$$

Η ευθεία αυτή τέμνει το xy -επίπεδο όταν $z = 0$, άρα θέτουμε $z = 0$ στην τρίτη εξίσωση και λύνοντας ως προς t έχουμε:

$$-3 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $t = \frac{3}{4}$ στις δύο πρώτες εξισώσεις της (20) και βρίσκουμε

$$x = 2 + \frac{3}{4}, \quad y = 4 - 5 \cdot \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{11}{4}, \quad y = \frac{1}{4}.$$

Άρα η ευθεία τέμνει το xy -επίπεδο στο σημείο $(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0)$. □

Παράδειγμα 11. Δείξτε ότι οι ευθείες L_1 και L_2 με παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} L_1 : & \quad x = 1 + t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = 4 - t \\ L_2 : & \quad x = 2s, \quad y = 3 + s, \quad z = -3 + 4s \end{aligned}$$

είναι **ασύμβατες**, δηλαδή δεν είναι παράλληλες και δεν τέμνονται (επομένως δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο).

Λύση. Η πρώτη ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(1, 3, -1)$ και η δεύτερη παράλληλη στο διάνυσμα $(2, 1, 4)$. Τα διανύσματα αυτά δεν είναι παράλληλα αφού **δεν** υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $(1, 3, -1) = \lambda(2, 1, 4)$. Επομένως, οι ευθείες αυτές δεν είναι παράλληλες.

Τώρα, αν οι ευθείες αυτές έχουν ένα σημείο τομής θα υπάρχουν $t, s \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ικανοποιούν τις τρεις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} 1 + t &= 2s \\ -2 + 3t &= 3 + s \\ 4 - t &= -3 + 4s. \end{aligned}$$

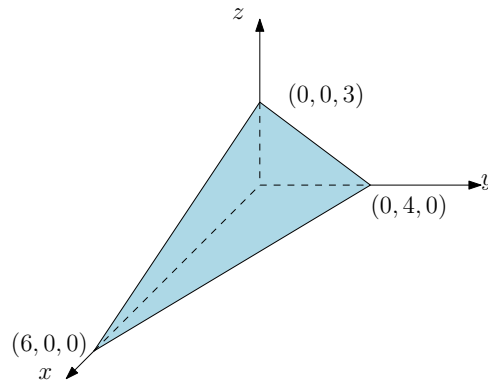
Λύνοντας τις δύο πρώτες βρίσκουμε $t = \frac{11}{5}$ και $s = \frac{8}{5}$, αλλά οι τιμές αυτές δεν ικανοποιούν την τρίτη εξίσωση. Επομένως, δεν υπάρχουν t, s που να ικανοποιούν και τις τρεις εξισώσεις, άρα οι ευθείες L_1 και L_2 είναι ασύμβατες. □

Παράδειγμα 12. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(2, 4, -1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{n} = (2, 3, 4)$. Βρείτε τα σημεία τομής του επιπέδου με τους άξονες x, y, z και σχεδιάστε το επίπεδο.

Λύση. Βάζουμε στην εξίσωση (15), $a = 2, b = 3, c = 4, x_0 = 2, y_0 = 4, z_0 = -1$, και έχουμε ότι η εξίσωση του ζητούμενου επιπέδου είναι

$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3y + 4z - 12 = 0.$$

Για να βρούμε το σημείο τομής του επιπέδου με τον x -άξονα, θέτουμε $y = z = 0$ και βρίσκουμε $x = 6$. Ανάλογα, για το σημείο τομής του επιπέδου με τον y -άξονα, θέτουμε $x = z = 0$ και βρίσκουμε $y = 4$. Τέλος, για το σημείο τομής του επιπέδου με τον z -άξονα, θέτουμε $x = y = 0$ και βρίσκουμε $z = 3$. Άρα τα σημεία τομής του επιπέδου με τους άξονες x, y, z είναι $(6, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ και $(0, 0, 3)$, αντίστοιχα.



Σχήμα 24: Το επίπεδο $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ στο πρώτο οκταήμιο.

Στο Σχήμα 24 σχεδιάζουμε τα σημεία τομής του επιπέδου $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ με τους άξονες, και το μέρος του επιπέδου που ανήκει στο πρώτο οκταήμιο. □

Παράδειγμα 13. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -1, 6)$, και $R(5, 2, 0)$.

Λύση. Θεωρούμε τα διανύσματα $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$ και $\mathbf{b} = \overrightarrow{PR}$. Τότε

$$\mathbf{a} = (3 - 1, -1 - 3, 6 - 2) = (2, -4, 4), \quad \mathbf{b} = (5 - 1, 2 - 3, 0 - 2) = (4, -1, -2).$$

Εφόσον τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ανήκουν στο ζητούμενο επίπεδο, τότε το εξωτερικό τους γινόμενο $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ θα είναι κάθετο προς το επίπεδο και έτσι μπορούμε να το θεωρήσουμε ως το κάθετο διάνυσμα. Επομένως:

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 14\mathbf{k}.$$

Άρα η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $P(1, 3, 2)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{n} = (12, 20, 14)$, σύμφωνα με την (15), είναι:

$$12(x - 1) + 20(y - 3) + 14(z - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x + 20y + 14z - 100 = 0.$$

□

Παράδειγμα 14. Βρείτε το σημείο στο οποίο η ευθεία με παραμετρικές εξισώσεις $x = 2 + 3t$, $y = -4t$, $z = 5 + t$, τέμνει το επίπεδο $4x + 5y - 2z = 18$.

Λύση. Αντικαθιστούμε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας στην εξίσωση του επιπέδου και έχουμε:

$$4(2 + 3t) + 5(-4t) - 2(5 + t) = 18 \Leftrightarrow -10t = 20 \Leftrightarrow t = -2.$$

Άρα το σημείο τομής προκύπτει για $t = -2$. Τότε $x = 2 + 3(-2) = -4$, $y = -4(-2) = 8$, $z = 5 - 2 = 3$, και άρα το ζητούμενο σημείο τομής είναι το $(-4, 8, 3)$. $\square$

Παράδειγμα 15. (α) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα επίπεδα $x + y + z = 1$ και $x - 2y + 3z = 1$.

(β) Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας L που ορίζει η τομή των δύο αυτών επιπέδων.

Λύση. (α) Τα κάθετα διανύσματα στα δύο επίπεδα είναι, αντίστοιχα,

$$\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{n}_2 = (1, -2, 3),$$

επομένως η γωνία θ των δύο επιπέδων είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$.

Άρα

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1(1) + 1(-2) + 1(3)}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{42}}.$$

Συνεπώς

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72^\circ.$$

(β) Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας καταρχήν πρέπει να βρούμε ένα σημείο της L και ένα διάνυσμα προς το οποίο να είναι παράλληλη. Για να βρούμε ένα σημείο της L μπορούμε, π.χ., να υπολογίσουμε το σημείο στο οποίο η L τέμνει το xy -επίπεδο. Για το σκοπό αυτό θέτουμε $z = 0$ και στις δύο εξισώσεις των επιπέδων, και έχουμε

$$x + y = 1 \tag{21}$$

$$x - 2y = 1. \tag{22}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x = 1, y = 0$, οπότε το σημείο $(1, 0, 0)$ είναι σημείο της L .

Τώρα παρατηρούμε ότι εφόσον η L ανήκει και στα δύο επίπεδα θα είναι ορθογώνια προς τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$. Άρα το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ θα καθορίζει ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$ παράλληλο προς την L . Συνεπώς

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Άρα οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας L που διέρχεται από το σημείο $(1, 0, 0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{v} = (5, -2, -3)$ δίνονται από την (12):

$$x = 1 + 5t, \quad y = -2t, \quad z = -3t.$$

Παρατήρηση: Για το (β) θα μπορούσαμε να σκεφτούμε και ως εξής: Τα σημεία (x, y, z) της ευθείας L ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις των επιπέδων $x + y + z = 1$ και $x - 2y + 3z = 1$. Αυτές είναι δύο εξισώσεις με τρεις αγνώστους. Θέτουμε $z = s$ και θα εκφράσουμε τα x, y συναρτήσει του s . Δηλαδή, θα λύσουμε το σύστημα

$$x + y = 1 - s \quad (23)$$

$$x - 2y = 1 - 3s. \quad (24)$$

Η λύση του συστήματος αυτού είναι $x = 1 - \frac{5}{3}s$, $y = \frac{2}{3}s$. Άρα οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης είναι

$$x = 1 - \frac{5}{3}s, \quad y = \frac{2}{3}s, \quad z = s.$$

(Αν, μάλιστα, θεωρήσουμε $s = -3t$ παίρνουμε τις ίδιες παραμετρικές εξισώσεις με πριν.) $\square$

Ασκήσεις

- Βρείτε τις εξισώσεις των σφαιρών με κέντρο το σημείο $(2, -3, 6)$ που εφάπτονται: (α) στο xy -επίπεδο, (β) στο yz -επίπεδο, (γ) στο xz -επίπεδο.
- Αν $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ υπολογίστε τα: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$, και $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.
- Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα που να έχει την ίδια κατεύθυνση με το $8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
- Βρείτε ένα διάνυσμα που να έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα $(-2, 4, 2)$ και μέτρο 6.
- Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων:
(α) $(4, 1, \frac{1}{4})$ και $(6, -3, 8)$,
(β) $\mathbf{a} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.
- Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων που τα μέτρα τους είναι 6 και $1/3$, και η γωνία που σχηματίζουν είναι $\pi/4$.
- Προσδιορίστε αν τα ακόλουθα διανύσματα είναι ορθογώνια, παράλληλα ή τίποτα από τα δύο.
(α) $\mathbf{a} = (-5, 3, 7)$, $\mathbf{b} = (6, -8, 2)$.
(β) $\mathbf{a} = (4, 6)$, $\mathbf{b} = (-3, 2)$.
(γ) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
(δ) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.
- Αν $\mathbf{a} = (3, 6, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, βρείτε την ορθογώνια προβολή του $\mathbf{b}$ στο $\mathbf{a}$.

9. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι διανύσματα του τριδιάστατου χώρου, τότε:

(α) Αποδείξτε την **ανισότητα Cauchy-Schwarz**:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$

(β) Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για να αποδείξετε την **τριγωνική ανισότητα**:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

10. Υπολογίστε το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ των $\mathbf{a} = (1, -1, 0)$, $\mathbf{b} = (3, 2, 1)$ και επαληθεύστε ότι είναι ορθογώνιο τόσο με το $\mathbf{a}$ όσο και με το $\mathbf{b}$.
11. Βρείτε δύο μοναδιαία διανύσματα που να είναι ορθογώνια τόσο με το $\mathbf{a} = (2, 0, -3)$ όσο και με το $\mathbf{b} = (-1, 4, 2)$.
12. Βρείτε ένα διάνυσμα που να είναι ορθογώνιο στο επίπεδο που καθορίζουν τα σημεία $P(0, -2, 0)$, $Q(4, 1, -2)$, $R(5, 3, 1)$. Στη συνέχεια υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου PQR .
13. Βρείτε τη διανυσματική εξίσωση και τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, 0, -3)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.
14. Βρείτε τη διανυσματική εξίσωση και τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στην ευθεία $x = 2t$, $y = 1 - t$, $z = 4 + 3t$.
15. Βρείτε τη διανυσματική εξίσωση και τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, 0, 6)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $x + 3y + z = 0$.
16. Βρείτε την ευθεία στην οποία τέμνονται τα επίπεδα $x + y + z = 1$ και $x + z = 0$.
17. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, και $(1, 1, 0)$.
18. Προσδιορίστε αν τα επίπεδα με εξισώσεις $x + 4y - 3z = 1$ και $-3x + 6y + 7z = 0$, είναι παράλληλα, κάθετα, ή τίποτα από τα δύο. Στην τελευταία περίπτωση βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν.
19. Προσδιορίστε αν τα επίπεδα με εξισώσεις $x + 2y + 2z = 1$ και $2x - y + 2z = 1$, είναι παράλληλα, κάθετα, ή τίποτα από τα δύο. Στην τελευταία περίπτωση βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν.

20. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα επίπεδα $x + y + z = 1$ και $x + 2y + 2z = 1$.

Στη συνέχεια, βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας L που ορίζει η τομή των δύο αυτών επιπέδων.

Σημείωση: Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό. Κάποια από τα σχήματα του κεφαλαίου αυτού έχουν παρθεί από τα βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics.
- J. Stewart, Calculus: Concepts and Contexts.
- G.B. Thomas, R.L. Finney, M.D. Weir, Calculus and Analytic Geometry.