

Μετασχηματισμός Laplace

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών
Σχολή Μηχανικών



Μάρτιος 2019

Εισαγωγή

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα πολύτιμο μαθηματικό εργαλείο σε κάθε μηχανικό, καθώς απλοποιεί σημαντικά την επίλυση γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ) και των αντίστοιχων προβλημάτων αρχικών τιμών (ΠΑΤ). Τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace συναντάμε συχνά σε εφαρμογές που αφορούν ηλεκτρικά κυκλώματα, μηχανικά συστήματα μάζας-ελατηρίου, επεξεργασία σημάτων, κ.ά. Η διαδικασία επίλυσης μιας ΣΔΕ με χρήση του μετασχηματισμού Laplace μπορεί να περιγραφεί με τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1: Η δοθείσα ΣΔΕ μετασχηματίζεται σε μια αλγεβρική εξίσωση.

Βήμα 2: Λύνουμε την αλγεβρική εξίσωση.

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό από εκείνον του Βήματος 1, ώστε να μετασχηματίσουμε τη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης στη λύση του αρχικού προβλήματος.

Το κυριότερο κίνητρο για να μελετήσουμε και να μάθουμε να χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό Laplace είναι το γεγονός ότι η επίλυση μιας ΣΔΕ μετατρέπεται στην επίλυση ενός απλούστερου αλγεβρικού προβλήματος.

1 Μετασχηματισμός Laplace – Γραμμικότητα – Πρώτο θεώρημα μετατόπισης

Έστω $f(t)$ μια συνάρτηση που ορίζεται για κάθε $t \geq 0$. Τότε ο **μετασχηματισμός Laplace** της $f(t)$ είναι μια συνάρτηση $F(s)$, την οποία συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(f)$, και ορίζεται μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (1)$$

Στην (1) υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(t)$ είναι τέτοια ώστε το (γενικευμένο) ολοκλήρωμα αυτό να υπάρχει (δηλαδή, να παίρνει μια πεπερασμένη τιμή).* Η υπόθεση αυτή συνήθως ικανοποιείται στις εφαρμογές. Παρατηρήστε ότι η προς ολοκλήρωση παράσταση είναι μια συνάρτηση του s και του t , ολοκληρώνουμε ως προς t , και έτσι καταλήγουμε με μια συνάρτηση του s .

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace πολλών συναρτήσεων απλά και μόνον βάσει του ορισμού (1).

Παράδειγμα 1. Έστω $f(t) = 1$. Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace $F(s)$.

Από την (1) έχουμε:

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad (s > 0).$$

Υπενθυμίζουμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ένα **γενικευμένο ολοκλήρωμα** και από τον ορισμό του υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Επομένως, εδώ έχουμε

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^0 \right] = \frac{1}{s}, \quad (s > 0).$$

Σημειώνουμε ότι, από εδώ και στο εξής, θα χρησιμοποιούμε το βολικότερο συμβολισμό $-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$ στη θέση του ορθότερου $\lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T$.

Άρα δείξαμε ότι $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$. □

Παράδειγμα 2. Έστω $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ και a είναι μια σταθερά. Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace $F(s)$.

*Για τα γενικευμένα ολοκλήρωματα μπορείτε να ανατρέξετε στις σημειώσεις του μαθήματος Μαθηματικά Ι για τα Ολοκλήρωματα.

Από την (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}, \quad (s > a). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι ο μετασχηματισμός υπάρχει μόνον για $s > a$ (αλλιώς το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει).

Άρα δείξαμε ότι $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$. □

Όπως είδαμε μέχρι τώρα, αν μας δώσουν μια συνάρτηση $f(t)$ μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace $F(s)$ μέσω της (1). Μπορούμε, ανάλογα, να θεωρήσουμε και το αντίστροφο πρόβλημα: Δοθείσης μιας συνάρτησης $F(s)$, βρείτε μια συνάρτηση $f(t)$ της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace είναι $F(s)$. Για παράδειγμα, αν $F(s) = \frac{1}{s-2}$, τότε, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 2, η συνάρτηση $f(t) = e^{2t}$ έχει ως μετασχηματισμό Laplace την $F(s)$. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι η $f(t) = e^{2t}$ είναι ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace** της $F(s) = \frac{1}{s-2}$, και θα γράφουμε

$$e^{2t} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right).$$

Γενικά, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$F(s) = \mathcal{L}(f), \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F).$$

Από τα παραδείγματα που είδαμε, συμπεραίνουμε ότι ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace μέσω της (1) μπορεί να είναι μια αρκετά επίπονη διαδικασία. Ευτυχώς, αρκετές γενιές μαθηματικών, επιστημόνων και μηχανικών υπολόγισαν το μετασχηματισμό Laplace μεγάλου πλήθους συναρτήσεων, και τα αποτελέσματα περιλαμβάνονται σε εκτενείς πίνακες και σε πακέτα μαθηματικού λογισμικού. Εμείς θα χρειαστούμε ένα μικρό πίνακα που περιέχει το μετασχηματισμό Laplace μερικών βασικών συναρτήσεων, βλέπε τον Πίνακα 1.

Αν γνωρίζουμε το μετασχηματισμό Laplace κάποιων απλών συναρτήσεων, τότε μπορούμε να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace και πιο σύνθετων συναρτήσεων βασιζόμενοι στις ιδιότητες του μετασχηματισμού. Ξεκινάμε με τη βασική ιδιότητα της γραμμικότητας.

Θεώρημα 1.1. Αν $f(t)$ και $g(t)$ είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace και a, b είναι δύο σταθερές, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace και για τη συνάρτηση $af(t) + bg(t)$, και ισχύει

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι πολύ απλή. Λόγω της (1) έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}[af(t) + bg(t)] dt \\ &= a \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + b \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.\end{aligned}$$

□

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$		$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$1/s$	7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
2	t	$1/s^2$	8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
3	t^2	$2!/s^3$	9	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
4	$t^n, n = 0, 1, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
5	$t^a, a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$

Πίνακας 1: Ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}(f)$ βασικών συναρτήσεων $f(t)$.

Παρατηρήσεις: Το σύμβολο $n!$ που εμφανίζεται στον Πίνακα 1, στον τύπο 4, διαβάζεται n παραγοντικό και ορίζεται ως εξής:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n, \quad \text{για } n \geq 1, \quad \text{και } 0! = 1.$$

Προφανώς, ισχύει ότι $(n+1)! = n!(n+1)$, $n \geq 0$. Η συνάρτηση $\Gamma(a+1)$ που εμφανίζεται στον Πίνακα 1, στον τύπο 5, είναι η αποκαλούμενη συνάρτηση-Γάμμα. Οι συναρτήσεις $\cosh at$ και $\sinh at$, που εμφανίζονται στους τύπους 9 και 10 του Πίνακα 1, αντίστοιχα, λέγονται υπερβολικό συννημίτονο και υπερβολικό ημίτονο, αντίστοιχα. Ο ορισμός και κάποιες ιδιότητες των υπερβολικών συναρτήσεων δίνονται στο Παράρτημα, στο τέλος των σημειώσεων αυτών.

Πόρισμα 1.1. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι και αυτός γραμμικός. Δηλαδή, αν $F(s)$, $G(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace των $f(t)$, $g(t)$, αντίστοιχα, τότε

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Παραδείγματα.

1. Βρείτε τον $\mathcal{L}\{t^2 - 2\sin(3t) + 3e^{-t}\}$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2 - 2\sin(3t) + 3e^{-t}\} &= \mathcal{L}\{t^2\} - 2\mathcal{L}\{\sin(3t)\} + 3\mathcal{L}\{e^{-t}\} \\ &= \frac{2}{s^3} - 2\frac{3}{s^2 + 3^2} + 3\frac{1}{s + 1} = \frac{2}{s^3} - \frac{6}{s^2 + 9} + \frac{3}{s + 1}.\end{aligned}$$

2. Βρείτε τον $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2} - \frac{7s}{s^2+5}\right\}$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2} - \frac{7s}{s^2+5}\right\} &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\} \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \sqrt{5}^2}\right\} \\ &= 3e^{2t} - 7\cos(\sqrt{5}t).\end{aligned}$$

3. Βρείτε τον $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-4}{s^2-9}\right\}$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-4}{s^2-9}\right\} &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-3^2}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3^2}\right\} \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-3^2}\right\} - \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-3^2}\right\} \\ &= 2\cosh(3t) - \frac{4}{3}\sinh(3t).\end{aligned}$$

□

Ο μετασχηματισμός Laplace έχει την ακόλουθη πολύ χρήσιμη ιδιότητα: Αν γνωρίζουμε το μετασχηματισμό της $f(t)$, τότε μπορούμε να βρούμε και το μετασχηματισμό της $e^{at}f(t)$ σύμφωνα με το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2 (Πρώτο θεώρημα μετατόπισης). *Αν ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ είναι η $F(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a).$$

Επιπλέον, για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ισχύει ότι

$$e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\}.$$

Παραδείγματα.

1. Βρείτε τον $\mathcal{L}\{e^{-4t}t^3\}$.

Έχουμε

$$\mathcal{L}\{e^{-4t}t^3\} = \frac{3!}{s^{3+1}} \Big|_{s \leftarrow s+4} = \frac{3!}{(s+4)^4}.$$

2. Βρείτε τον $\mathcal{L}\{e^{2t}(2 \sin 3t - 3 \cos 4t)\}$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{2t}(2 \sin 3t - 3 \cos 4t)\} &= 2\mathcal{L}\{e^{2t} \sin 3t\} - 3\mathcal{L}\{e^{2t} \cos 4t\} \\ &= 2 \frac{3}{s^2 + 3^2} \Big|_{s \leftarrow s-2} - 3 \frac{s}{s^2 + 4^2} \Big|_{s \leftarrow s-2} \\ &= \frac{6}{(s-2)^2 + 9} - \frac{3(s-2)}{(s-2)^2 + 16}. \end{aligned}$$

3. Βρείτε τον $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^5}\right\}$.

Έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^5}\right\} = e^{-t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = e^{-t} \frac{1}{4!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = e^{-t} \frac{t^4}{4!}.$$

□

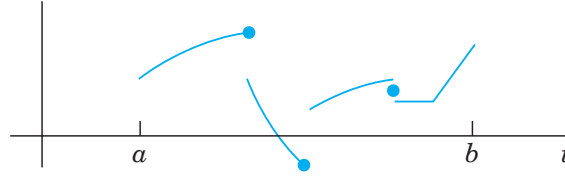
Κλείνοντας αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με ένα σημαντικό ερώτημα: Ποιές συναρτήσεις έχουν μετασχηματισμό Laplace; Σίγουρα, αν οι τιμές μιας συνάρτησης αυξάνουν πολύ γρήγορα καθώς το t μεγαλώνει, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν θα υπάρχει και, επομένως, η συνάρτηση αυτή δεν θα έχει μετασχηματισμό Laplace. Υπάρχουν δύο συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν την ύπαρξη του μετασχηματισμού.

- Η πρώτη συνθήκη απαιτεί η συνάρτηση να μην αυξάνει πολύ γρήγορα. Συγκεκριμένα, απαιτούμε να υπάρχουν σταθερές $M > 0$ και k τέτοιες ώστε

$$|f(t)| \leq M e^{kt}, \text{ για κάθε } t \geq 0. \quad (2)$$

Τέτοιες συναρτήσεις λέμε ότι είναι **εκθετικής τάξης**.

- Η δεύτερη συνθήκη απαιτεί η συνάρτηση να είναι **κατά τμήματα συνεχής**. Η συνάρτηση $f(t)$ θα λέμε ότι είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $a \leq t \leq b$, αν μπορούμε να χωρίσουμε το διάστημα αυτό σε πεπερασμένο πλήθος υποδιαστημάτων σε καθένα από τα οποία η f είναι συνεχής και έχει πεπερασμένα όρια καθώς το t τείνει στα άκρα του υποδιαστήματος (από το εσωτερικό του). Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι οι μόνες πιθανές ασυνέχειες που εμφανίζονται είναι πεπερασμένα άλματα, βλ. Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Παράδειγμα κατά τμήματα συνεχούς συνάρτησης. (Οι τελείες σημειώνουν τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία ασυνέχειας).

Τα παραπάνω συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.3 (Υπαρξη μετασχηματισμού Laplace). *Αν η $f(t)$ ορίζεται και είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα του ημιιάξονα $t \geq 0$, και ικανοποιεί την (2) για κάποιες σταθερές M και k , τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}(f)$ για κάθε $s > k$.*

2 Μετασχηματισμός παραγώγων και ολοκληρωμάτων. Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Αυτό που κάνει τον μετασχηματισμό Laplace ιδιαίτερα χρήσιμο για την επίλυση ΣΔΕ είναι ότι μετατρέπει πράξεις παραγώγισης για την αρχική συνάρτηση $f(t)$ σε πολλαπλασιασμούς για τη μετασχηματισμένη συνάρτηση $F(s)$. Συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.1. *Οι μετασχηματισμοί της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της $f(t)$ ικανοποιούν τις σχέσεις:*

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0), \quad (3)$$

$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0). \quad (4)$$

Η (3) ισχύει όταν η $f(t)$ είναι συνεχής για κάθε $t \geq 0$, ικανοποιεί τη συνθήκη (2), και η $f'(t)$ είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα του ημιιάξονα $t \geq 0$.

Ανάλογα, η (4) ισχύει όταν οι f, f' είναι συνεχείς για κάθε $t \geq 0$, ικανοποιούν τη συνθήκη (2), και η f'' είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα του ημιιάξονα $t \geq 0$.

Επιπλέον, ισχύει και η ακόλουθη γενίκευση του προηγούμενου θεωρήματος για το μετασχηματισμό της n -οστής παραγώγου $f^{(n)}$:

Θεώρημα 2.2. *Έστω ότι οι $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ είναι συνεχείς για κάθε $t \geq 0$ και ικανοποιούν τη συνθήκη (2). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η $f^{(n)}$ είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα του ημιιάξονα $t \geq 0$. Τότε ο μετασχηματισμός της $f^{(n)}$ ικανοποιεί τη σχέση*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (5)$$

Η παραγωγή και η ολοκλήρωση είναι αντίστροφες διαδικασίες, και το ίδιο είναι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση. Είδαμε ότι η παραγωγή μιας συνάρτησης $f(t)$ αντιστοιχεί (χονδρικά) σε πολλαπλασιασμό της μετασχηματισμένης $\mathcal{L}(f)$ επί s , είναι επομένως λογικό να αναμένουμε ότι η ολοκλήρωση της $f(t)$ θα αντιστοιχεί σε διαίρεση της $\mathcal{L}(f)$ δια s :

Θεώρημα 2.3. Έστω ότι η $f(t)$ είναι κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, ικανοποιεί τη συνθήκη (2), και έστω ότι η $F(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$. Τότε για $s > 0$, $s > k$, και $t > 0$, έχουμε

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s), \quad \text{επομένως} \quad \int_0^t f(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}. \quad (6)$$

2.1 Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, προβλήματα αρχικών τιμών

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Laplace για να λύσουμε ΣΔΕ και ΠΑΤ. Θεωρούμε το ΠΑΤ

$$y'' + ay' + by = r(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad (7)$$

όπου τα a, b είναι σταθερές. Εδώ η $r(t)$ είναι η λεγόμενη **είσοδος (input)** του μηχανικού ή ηλεκτρικού συστήματος και η ζητούμενη $y(t)$ είναι η **έξοδος ή απόκριση (output)** του συστήματος.

Για να λύσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1: Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (7), και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της γραμμικότητας του Θεωρήματος 1.1. Συμβολίζουμε $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ και $\mathcal{L}\{r(t)\} = R(s)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' + ay' + by\} &= \mathcal{L}\{r(t)\} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y''\} + a\mathcal{L}\{y'\} + b\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{r(t)\} \\ \stackrel{(3)(4)}{\Leftrightarrow} [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + a[sY(s) - y(0)] + bY(s) &= R(s) \\ \Leftrightarrow (s^2 + as + b)Y(s) &= (s + a)y(0) + y'(0) + R(s). \end{aligned}$$

Βήμα 2: Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς $Y(s)$. Για το σκοπό αυτό διαιρούμε και τα δύο μέλη δια $s^2 + as + b$ και έχουμε

$$Y(s) = \frac{(s + a)y(0) + y'(0) + R(s)}{s^2 + as + b} \quad (8)$$

Βήμα 3: Απλοποιούμε την (8) (συνήθως με ανάλυση σε απλά κλάσματα†) σε ένα άθροισμα όρων των οποίων μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace από πίνακες.

†Για τη διαδικασία της ανάλυσης σε απλά κλάσματα μπορείτε να ανατρέξετε στην Παράγραφο 5.3 των σημειώσεων του μαθήματος Μαθηματικά Ι για τα Ολοκληρώματα.

Παράδειγμα 1. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' - y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Βήμα 1: Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης, και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της γραμμικότητας του Θεωρήματος 1.1 και τις σχέσεις (3) και (4).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{t\} \Leftrightarrow [s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] - Y(s) = \frac{1}{s^2} \\ \Leftrightarrow (s^2 - 1)Y(s) &= sy(0) + y'(0) + \frac{1}{s^2} \\ \Leftrightarrow (s^2 - 1)Y(s) &= s + 1 + \frac{1}{s^2}.\end{aligned}$$

Βήμα 2: Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς $Y(s)$.

$$\begin{aligned}(s^2 - 1)Y(s) &= s + 1 + \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{s + 1 + \frac{1}{s^2}}{s^2 - 1} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{s + 1}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2(s^2 - 1)} \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{s + 1}{(s - 1)(s + 1)} + \left(\frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{s^2} \right) \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{s^2}.\end{aligned}$$

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και τον Πίνακα 1 για να βρούμε τη λύση του ΠΑΤ.

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &= e^t + \sinh t - t.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2. Να λυθεί το ΠΑΤ για την ακόλουθη ΔΕ πρώτης τάξης:

$$y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0.$$

Βήμα 1: Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης, και χρησιμοποιούμε ξανά την ιδιότητα της γραμμικότητας του Θεωρήματος 1.1 και τη σχέση (3).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{e^{-t}\} \Leftrightarrow [sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s + 1} \\ \Leftrightarrow (s + 2)Y(s) &= \frac{1}{s + 1}.\end{aligned}$$

Βήμα 2: Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς $Y(s)$.

$$(s+2)Y(s) = \frac{1}{s+1} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ σε απλά κλάσματα.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+1)(s+2)} &= \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(s+1)(s+2)} &= \frac{a(s+2) + b(s+1)}{(s+1)(s+2)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(s+1)(s+2)} &= \frac{(a+b)s + 2a + b}{(s+1)(s+2)}. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους αριθμητές έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow a = 1, \quad b = -1.$$

Επομένως

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και τον Πίνακα 1 για να βρούμε τη λύση του ΠΑΤ.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t}.$$

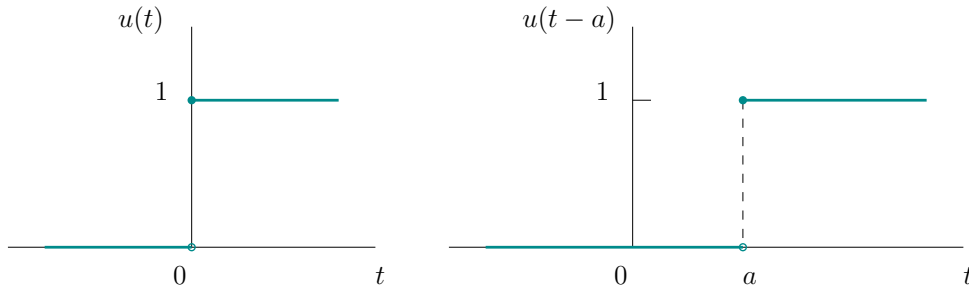
□

3 Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος (συνάρτηση Heaviside). Το δεύτερο θεώρημα μετατόπισης

Ορισμός 3.1. Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος ή συνάρτηση Heaviside ορίζεται από τον τύπο

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t < a, \\ 1, & \text{αν } t \geq a. \end{cases} \quad (9)$$

Στο Σχήμα 2 (αριστερά) βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος $u(t)$, και διαπιστώνουμε ότι παρουσιάζει ένα άλμα ασυνέχειας (ύψους 1) στο $t = 0$. Ανάλογα, στο δεξί μέρος του Σχήματος 2 σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος $u(t-a)$, που παρουσιάζει ένα άλμα ασυνέχειας (ύψους 1) στο $t = a$.



Σχήμα 2: Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων μοναδιαίου βήματος $u(t)$ (αριστερά) και $u(t-a)$ (δεξιά).

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος $u(t-a)$ προκύπτει άμεσα από τον ορισμό (1),

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t-a) dt = \int_a^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_{t=a}^{\infty} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Άρα

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0. \quad (10)$$

Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος χρησιμοποιείται πολύ συχνά στις επιστήμες μηχανικού σε εφαρμογές που αφορούν συναρτήσεις οι οποίες (περιγράφουν μηχανικές ή ηλεκτρικές δυνάμεις διέγερσης και) μπορούν να χαρακτηριστούν ως αδρανείς “off” ή ενεργές “on”. Όταν πολλαπλασιάζουμε μια συνάρτηση $f(t)$ με μια συνάρτηση μοναδιαίου βήματος $u(t-a)$ μπορούμε να προκαλέσουμε διάφορα φαινόμενα. Η βασική ιδέα εξηγείται στο Σχήμα 3: Η αρχική συνάρτηση $f(t)$ φαίνεται στο (Α). Στο (Β) η συνάρτηση $f(t)$ πολλαπλασιάζεται με τη συνάρτηση $u(t-2)$ έχοντας ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό της για $0 \leq t < 2$ (με άλλα λόγια η $f(t)$ είναι “off” για $0 \leq t < 2$). Στο (C) η συνάρτηση μεταφέρεται δύο μονάδες προς τα δεξιά, και επειδή πολλαπλασιάζεται με την $u(t-2)$ ουσιαστικά ενεργοποιείται (είναι “on”) για $t \geq 2$. Γενικά, ισχύει το εξής: Αν $f(t) = 0$ για κάθε $t < 0$, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(t-a)u(t-a)$, με $a > 0$, είναι η γραφική παράσταση της $f(t)$ μετατοπισμένη προς τα δεξιά κατά a .

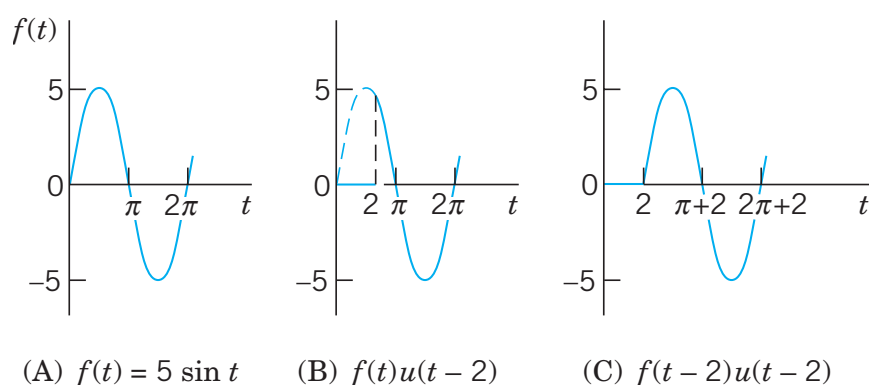
Αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.1 (Δεύτερο θεώρημα μετατόπισης). *Αν η $f(t)$ έχει μετασχηματισμό Laplace $F(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s). \quad (11)$$

Επιπλέον, έχουμε για τον αντίστροφο μετασχηματισμό

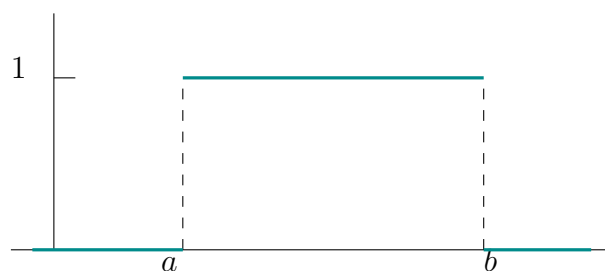
$$f(t-a)u(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}. \quad (12)$$



Σχήμα 3: Επίδραση του πολλαπλασιασμού με τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

Παράδειγμα 1. Μια πολύ χρήσιμη συνάρτηση σε εφαρμογές είναι η λεγόμενη **συνάρτηση ορθογώνιου παλμού** ή συνάρτηση φίλτρου, που ορίζεται ως

$$f(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t \leq b, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$



Σχήμα 4: Η συνάρτηση ορθογώνιου παλμού $u(t-a) - u(t-b)$.

Η $f(t)$ μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος ως εξής:

$$f(t) = u(t-a) - u(t-b).$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης ορθογώνιου παλμού είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t-a) - u(t-b)\} = \mathcal{L}\{u(t-a)\} - \mathcal{L}\{u(t-b)\} = \frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s} \\ &= \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2. Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος χρησιμοποιείται για να εκφράσουμε μια συνάρτηση με πολλούς κλάδους ως μια συνάρτηση που δίνεται από ένα τύπο. Θεωρήστε τη

συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq t < 2 \\ t-1, & 2 \leq t \leq 3 \\ 5-t^2, & 3 < t \leq 6 \\ 0, & t > 6 \end{cases}$$

Καταρχήν, μπορούμε να γράψουμε την $f(t)$ σε μια γραμμή ως εξής:

$$f(t) = \frac{1}{2}u(t) + \left(t-1-\frac{1}{2}\right)u(t-2) + \left(5-t^2-(t-1)\right)u(t-3) - (5-t^2)u(t-6).$$

Ο πρώτος όρος ενεργοποιεί (“on”) τη συνάρτηση $1/2$ στο $t = 0$. Ο δεύτερος όρος ενεργοποιεί (“on”) την $(t-1)$ στο $t = 2$ και μηδενίζει (“off”) την $1/2$ στο $t = 2$. Ο τρίτος όρος ενεργοποιεί (“on”) την $(5-t^2)$ στο $t = 3$ και μηδενίζει (“off”) την $(t-1)$ στο $t = 3$, ενώ, τελικά, ο τέταρτος όρος μηδενίζει (“off”) την $(5-t^2)$ στο $t = 6$.

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της $f(t)$. Για το σκοπό αυτό πρέπει να μετατρέψουμε τη συνάρτηση στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}u(t) + \left[(t-2) + \frac{1}{2}\right]u(t-2) \\ &+ \left[-(t-3)^2 - 7(t-3) - 6\right]u(t-3) \\ &+ \left[(t-6)^2 + 12(t-6) + 31\right]u(t-6). \end{aligned}$$

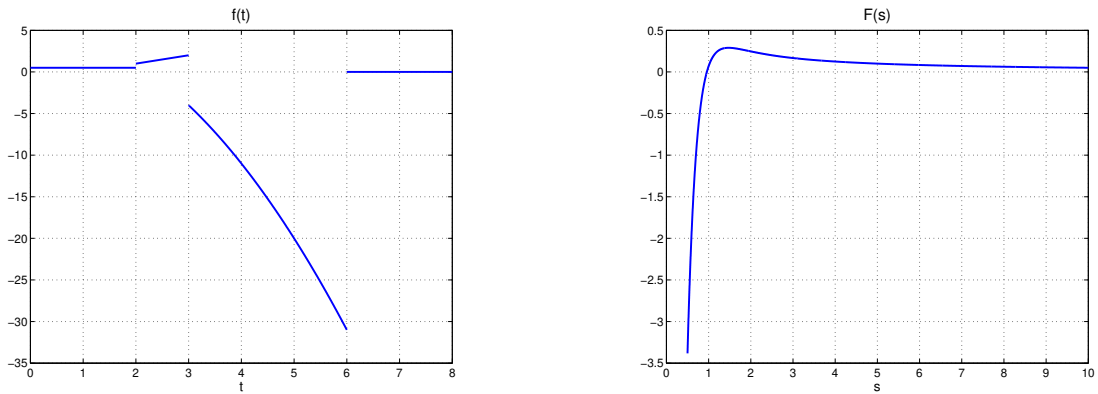
Τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1 και την ιδιότητα μετατόπισης (11) έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{u(t)\} + \mathcal{L}\{(t-2)u(t-2)\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{u(t-2)\} \\ &- \mathcal{L}\{(t-3)^2u(t-3)\} - 7\mathcal{L}\{(t-3)u(t-3)\} - 6\mathcal{L}\{u(t-3)\} \\ &+ \mathcal{L}\{(t-6)^2u(t-6)\} + 12\mathcal{L}\{(t-6)u(t-6)\} + 31\mathcal{L}\{u(t-6)\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-2s}}{s} \\ &- e^{-3s} \cdot \frac{2}{s^3} - 7e^{-3s} \cdot \frac{1}{s^2} - 6 \cdot \frac{e^{-3s}}{s} \\ &+ e^{-6s} \cdot \frac{2}{s^3} + 12e^{-6s} \cdot \frac{1}{s^2} + 31 \cdot \frac{e^{-6s}}{s}. \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 5 σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(t)$ (αριστερά) και του μετασχηματισμού $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ (δεξιά). □

4 Η «συνάρτηση» δ του Dirac

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε πώς μπορούμε να εκφράσουμε με μαθηματικό τρόπο φαινόμενα τα οποία πραγματοποιούνται σχεδόν ακαριαία (δηλαδή σε πολύ μικρά χρονικά



Σχήμα 5: Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(t)$ (αριστερά) και του μετασχηματισμού $F(s)$ (δεξιά).

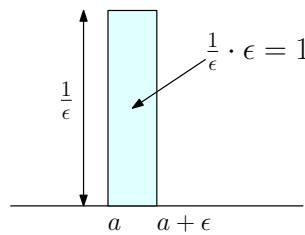
διαστήματα). Παραδείγματα τέτοιων φαινομένων αποτελούν το μπαλάκι του τένις τη στιγμή που το χτυπάμε με τη ρακέτα, ένα αεροπλάνο που εκτελεί «σκληρή» προσγείωση, ένα μηχανικό σύστημα που διεγείρεται από έναν κρουστικό παλμό, καθώς και πολλά άλλα παραδείγματα γνωστά από την καθημερινότητά μας.

Τέτοια παραδείγματα που έχουν αυτό το κοινό χαρακτηριστικό της «στιγμιαίας» επίδρασης μοντελοποιούνται μαθηματικά με τη βοήθεια της «συνάρτησης» δ του Dirac και μπορούμε να τα επιλύσουμε αποτελεσματικά με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace.

Ας θεωρήσουμε, αρχικά, τη συνάρτηση

$$f_{\epsilon}(t - a) = \begin{cases} 1/\epsilon, & a \leq t \leq a + \epsilon, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad (13)$$

της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο Σχήμα 6.

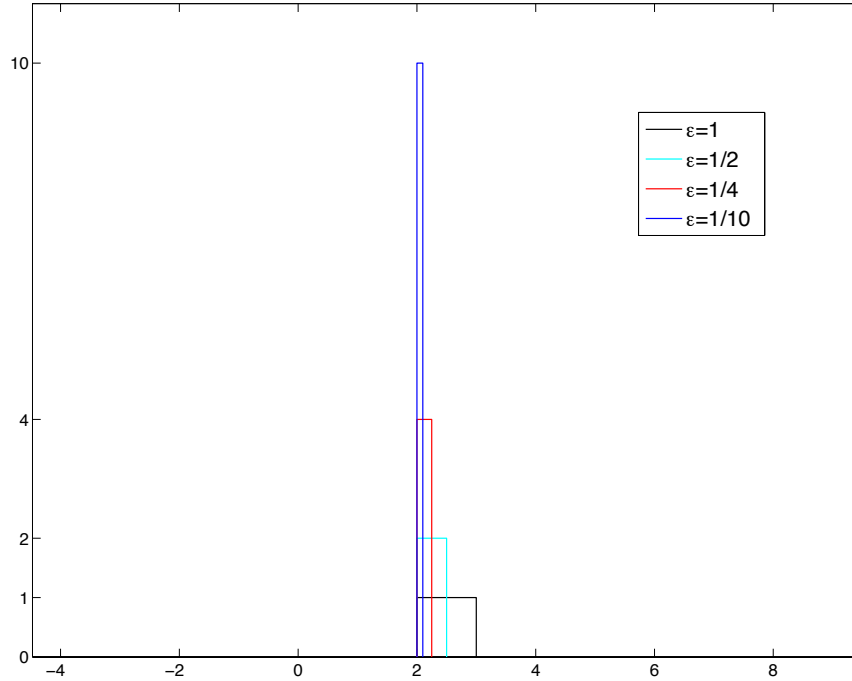


Σχήμα 6: Η συνάρτηση $f_{\epsilon}(t - a)$ στην (13).

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση αυτή περιγράφει μια δύναμη μεγέθους $1/\epsilon$ η οποία ασκείται μεταξύ των χρονικών στιγμών $t = a$ και $t = a + \epsilon$, όπου το ϵ είναι ένας μικρός θετικός αριθμός. Παρατηρήστε ότι, για κάθε ϵ , ισχύει για το ολοκλήρωμα της $f_{\epsilon}(t - a)$ ότι ισούται με 1. Πράγματι,

$$\int_0^{\infty} f_{\epsilon}(t - a) dt = \int_a^{a+\epsilon} f_{\epsilon}(t - a) dt = \frac{1}{\epsilon} \cdot \epsilon = 1. \quad (14)$$

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει καθώς παίρνουμε ολοένα και μικρότερες τιμές του ϵ . Για παράδειγμα, στο Σχήμα 7 σχεδιάζουμε τα γραφήματα της συνάρτησης $f_\epsilon(t-2)$ για $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}$.



Σχήμα 7: Η συνάρτηση $f_\epsilon(t-2)$ στην (13) για $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}$.

Παίρνουμε το όριο για $\epsilon \rightarrow 0$ και ορίζουμε

$$\delta(t-a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t-a). \quad (15)$$

Η $\delta(t-a)$ λέγεται **συνάρτηση δ του Dirac**. Η $\delta(t-a)$ δεν είναι συνάρτηση με τη συνηθισμένη έννοια που χρησιμοποιούμε στον Απειροστικό Λογισμό. Όπως μπορούμε να δούμε λόγω των (13) και (14) όταν παίρνουμε το όριο καθώς το $\epsilon \rightarrow 0$ έχουμε

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & t = a, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad \text{και} \quad \int_0^\infty \delta(t-a) dt = 1. \quad (16)$$

Φυσικά όπως ξέρουμε από τον Απειροστικό Λογισμό δεν υπάρχει καμιά συνηθισμένη συνάρτηση που να ικανοποιεί την (16), και θα πρέπει να ερμηνεύσουμε την $\delta(t-a)$ ως μια γενικευμένη συνάρτηση. Παρόλα αυτά είναι βολικό σε εφαρμογές που αφορούν αυτόν τον στιγμιαίο χρονικά χαρακτήρα να χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση δ σαν να ήταν μια συνηθισμένη συνάρτηση. Ειδικότερα, αν $g(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε ισχύει ότι

$$\int_0^\infty g(t) \delta(t-a) dt = g(a). \quad (17)$$

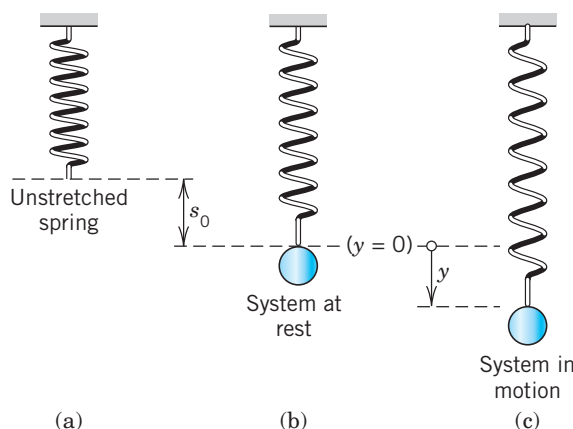
Επίσης, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης δ δίνεται από τον τύπο

$$\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-as}. \quad (18)$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια τώρα πια είμαστε σε θέση να λύσουμε ΠΑΤ για ΣΔΕ που στο δεύτερο μέλος έχουν τη συνάρτηση Heaviside (μοναδιαίου βήματος) ή τη συνάρτηση δ του Dirac.

4.1 Μαθηματική μοντελοποίηση ενός συστήματος μάζας-ελατηρίου

Θεωρούμε ένα ελατήριο που κρέμεται κατακόρυφα από ένα σταθερό σημείο. Στο κάτω μέρος του είναι τοποθετημένη μια μεταλική μπάλα, βλ. Σχήμα 8.



Σχήμα 8: Σύστημα μάζας-ελατηρίου.

Έστω ότι η θέση ηρεμίας του συστήματος είναι $y = 0$, και θεωρούμε ως θετική φορά της κίνησης τη φορά προς τα κάτω. Έτσι δυνάμεις με φορά προς τα κάτω θεωρούνται ως θετικές, ενώ δυνάμεις με φορά προς τα πάνω ως αρνητικές. Αρχικά, τραβάμε τη μπάλα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $y > 0$. Αυτό προκαλεί στο ελατήριο μια δύναμη, που είναι ανάλογη της μετατόπισης y ,

$$F_1 = -ky, \quad (\text{Νόμος του Hooke}) \quad (19)$$

όπου k είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το ελατήριο (άκαμπτα ελατήρια έχουν μεγάλο k). Το πρόσημο « $-$ » δηλώνει ότι η δύναμη έχει φορά προς τα πάνω, δηλαδή είναι αντίθετη στη μετατόπιση.

Η κίνηση του συστήματος μάζα-ελατήριο καθορίζεται από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σύμφωνα με τον οποίο

$$\text{Μάζα} \times \text{Επιτάχυνση} = my'' = \text{Δύναμη}, \quad (20)$$

όπου ως «Δύναμη» εννοούμε τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στη μπάλα. Γενικά, σε κάθε σύστημα υπάρχει και απόσβεση, αλλιώς θα συνέχιζε να κινείται για πάντα. Αν όμως θεωρήσουμε ότι η απόσβεση είναι μικρή και μελετάμε την κίνηση του συστήματος για μικρά χρονικά διαστήματα, τότε μπορούμε να αγνοήσουμε την απόσβεση. Τότε από το νόμο του Νεύτωνα (20) καταλήγουμε στη ΔΕ: $my'' = F_1 = -ky$, επομένως

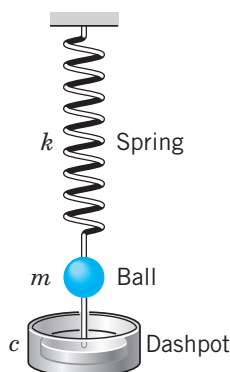
$$my'' + ky = 0 \Leftrightarrow y'' + \omega_0^2 y = 0, \quad \text{όπου} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (21)$$

Όπως έχουμε ήδη δει αυτή είναι μια γραμμική ομογενής ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η γενική της λύση είναι

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (22)$$

Η κίνηση αυτή λέγεται **αρμονική ταλάντωση** και έχει συχνότητα $f = \omega_0/(2\pi)$ Hz διότι το συνημίτονο και το ημίτονο που εμφανίζονται στην (22) έχουν περίοδο $2\pi/\omega_0$. Η συχνότητα αυτή αποκαλείται φυσική συχνότητα του συστήματος.

Τώρα προσθέτουμε στο μοντέλο μας και **απόσβεση**. Αυτό επιτυγχάνεται φυσικά αν συνδέσουμε τη μπάλα με έναν αποσβεστήρα, βλ. Σχήμα 9.



Σχήμα 9: Σύστημα μάζας-ελατηρίου με απόσβεση.

Αυτό προσθέτει στο μοντέλο μας μια δύναμη απόσβεσης που θεωρούμε ότι είναι ανάλογη της ταχύτητας y' , δηλαδή θεωρούμε μια δύναμη $F_2 = -cy'$. (Αυτή είναι μια αρκετά καλή προσέγγιση για μικρές ταχύτητες.) Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση

$$my'' + cy' + ky = 0. \quad (23)$$

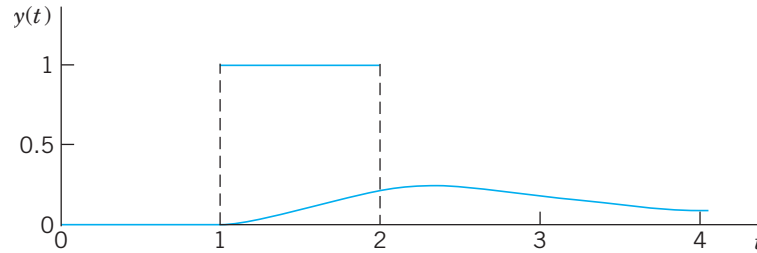
Η σταθερά c είναι θετική και λέγεται **σταθερά απόσβεσης**. Η (23) είναι μια γραμμική ομογενής ΣΔΕ δεύτερης τάξης και οι λύσεις της εξαρτώνται από τις διάφορες τιμές των σταθερών m , c και k .

Παράδειγμα 1 (Σύστημα μάζας-ελατηρίου με απόσβεση υπό την επίδραση ορθογώνιου παλμού). Στο παράδειγμα αυτό θα μελετήσουμε την απόκριση ενός συστήματος

μάζας-ελατηρίου με απόσβεση υπό την επίδραση ενός ορθογώνιου παλμού $r(t)$, βλ. Σχήμα 10. Συγκεκριμένα, έστω ότι $m = 1$, $c = 3$, $k = 2$, οπότε θέλουμε να μελετήσουμε το ΠΑΤ

$$y'' + 3y' + 2y = r(t) = u(t-1) - u(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (24)$$

Οι αρχικές συνθήκες $y(0) = y'(0) = 0$ δηλώνουν ότι η μετατόπιση και η ταχύτητα κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι μηδενικές.



Σχήμα 10: Ορθογώνιος παλμός και η λύση του ΠΑΤ (24).

Θα λύσουμε το ΠΑΤ (24) με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 2.1, παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης, και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της γραμμικότητας του Θεωρήματος 1.1 και τις σχέσεις (3), (4).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{u(t-1)\} - \mathcal{L}\{u(t-2)\} \\ \Leftrightarrow [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) &= \frac{1}{s}(e^{-s} - e^{-2s}) \\ \Leftrightarrow (s^2 + 3s + 2)Y(s) &= \frac{1}{s}(e^{-s} - e^{-2s}). \end{aligned}$$

Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς $Y(s)$ και έχουμε

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)}(e^{-s} - e^{-2s}).$$

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης αυτής θα πρέπει να αναλύσουμε τη ρητή συνάρτηση $F(s) = \frac{1}{s(s^2+3s+2)}$ σε απλά κλάσματα.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{s(s+1)(s+2)} &= \frac{a(s+1)(s+2) + bs(s+2) + cs(s+1)}{s(s+1)(s+2)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{s(s+1)(s+2)} &= \frac{(a+b+c)s^2 + (3a+2b+c)s + 2a}{s(s+1)(s+2)}. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους αριθμητές έχουμε:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = \frac{1}{2}.$$

Επομένως

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}.$$

Από τον Πίνακα 1 βλέπουμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $F(s)$ είναι

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s+2}\right\} \\ &= \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}. \end{aligned}$$

Άρα, λόγω της γραμμικότητας του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace και της (12) έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-s} - F(s)e^{-2s}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-2s}\right\} \\ &= f(t-1)u(t-1) - f(t-2)u(t-2) \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t < 1, \\ \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} & , \quad 1 < t < 2, \\ -e^{-(t-1)} + e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} & , \quad t > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της λύσης δίνεται στο Σχήμα 10. □

Παράδειγμα 2 (Σύστημα μάζας-ελατηρίου με απόσβεση υπό την επίδραση κρουστικού παλμού). Στο παράδειγμα αυτό αντικαθιστούμε τον ορθογώνιο παλμό με ένα κρουστικό παλμό τη χρονική στιγμή $t = 1$. Δηλαδή η συνάρτηση στο δεύτερο μέλος $r(t)$ ισούται με τη συνάρτηση Dirac $\delta(t-1)$. Θεωρούμε δηλαδή το ΠΑΤ:

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (25)$$

Παίρνουμε και πάλι το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης, και έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{\delta(t-1)\} \\ \Leftrightarrow [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) &= e^{-s} \\ \Leftrightarrow (s^2 + 3s + 2)Y(s) &= e^{-s}. \end{aligned}$$

Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς $Y(s)$ και έχουμε

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)} e^{-s}.$$

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης αυτής θα πρέπει να αναλύσουμε τη ρητή συνάρτηση $F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$ σε απλά κλάσματα.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(s+1)(s+2)} &= \frac{a(s+2) + b(s+1)}{(s+1)(s+2)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(s+1)(s+2)} &= \frac{(a+b)s + (2a+b)}{(s+1)(s+2)}. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους αριθμητές έχουμε:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=1, \quad b=-1.$$

Επομένως

$$F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

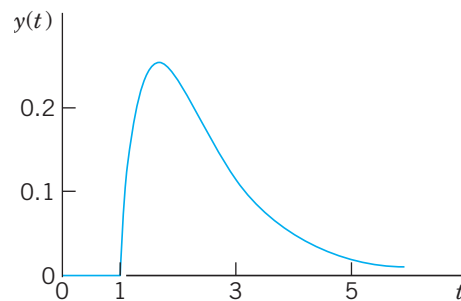
Από τον Πίνακα 1 βλέπουμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $F(s)$ είναι

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Άρα, λόγω της γραμμικότητας του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace και της (12) έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-s}\} \\ &= f(t-1)u(t-1) \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t < 1, \\ e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)} & , \quad t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

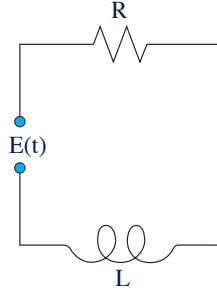
Η γραφική παράσταση της λύσης δίνεται στο Σχήμα 11. □



Σχήμα 11: Η λύση του ΠΑΤ (25).

4.2 Μαθηματική μοντελοποίηση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος

Κύκλωμα RL . Θεωρούμε ένα κύκλωμα που αποτελείται από μια πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης $E(t)$ (V: volts), πηνίο αυτεπαγωγής L (H: henrys) και αντίσταση R (Ω : ohms) συνδεδεμένα σε σειρά, βλ. Σχήμα 12.



Σχήμα 12: Κύκλωμα RL .

Θέλουμε να προσδιορίσουμε το ρεύμα $i(t)$ που διαρρέει το κύκλωμα. Από το νόμο των τάσεων του Kirchhoff έχουμε ότι η ηλεκτρεγερτική δύναμη ισούται με το άθροισμα της πτώσης τάσης στο πηνίο ($L i' = L \frac{di}{dt}$) και της πτώσης τάσης στην αντίσταση ($R i$). Άρα καταλήγουμε στο ακόλουθο μαθηματικό μοντέλο που περιγράφεται από την εξίσωση

$$L i' + R i = E(t) \quad \Leftrightarrow \quad i' + \frac{R}{L} i = \frac{E(t)}{L}. \quad (26)$$

Η (26) είναι μια γραμμική ΣΔΕ πρώτης τάξης.

Κύκλωμα RLC . Στο προηγούμενο κύκλωμα προσθέτουμε ένα πυκνωτή χωρητικότητας C (F: farads), βλ. Σχήμα 13. Για να καταλήξουμε σε ένα μαθηματικό μοντέλο για το κύκλωμα RLC πρέπει να προσθέσουμε στην πτώση τάσης στο πηνίο ($L i' = L \frac{di}{dt}$) και στην πτώση τάσης στην αντίσταση ($R i$), και την πτώση τάσης στον πυκνωτή q/C . Εδώ q (σε coulomb) είναι το φορτίο στον πυκνωτή, που συνδέεται με το ρεύμα μέσω της σχέσης

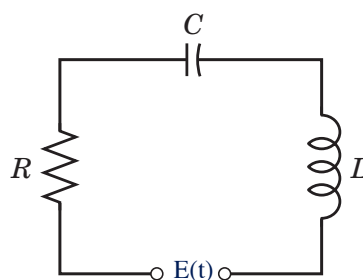
$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad q(t) = \int i(t) dt.$$

Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση

$$L i' + R i + \frac{1}{C} \int i dt = E(t). \quad (27)$$

Η (27) είναι μια «ολοκληρωτικο-διαφορική» εξίσωση. Για να απαλλαγούμε από το ολοκλήρωμα παραγωγίζουμε την προηγούμενη εξίσωση ως προς t οπότε

$$L i'' + R i' + \frac{1}{C} i = E'(t). \quad (28)$$



Σχήμα 13: Κύκλωμα RLC .

Άρα το ρεύμα σε ένα κύκλωμα RLC είναι η λύση της μη ομογενούς γραμμικής ΣΔΕ δεύτερης τάξης (28) με σταθερούς συντελεστές.

Σε κάποιες περιπτώσεις, κυρίως σε ΠΑΤ, θα χρησιμοποιούμε και την εξίσωση

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t), \quad (29)$$

η οποία προκύπτει άμεσα από την (27) για $i = q'$.

Παράδειγμα (RLC κύκλωμα με ηλεκτρεγερτική δύναμη τη συνάρτηση δ). Θεωρούμε το κύκλωμα RLC του Σχήματος 14 (αριστερά) όπου $R = 20 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 10^{-4} \text{ F}$ και $E(t) = \delta(t)$. Θεωρούμε ότι το ρεύμα και το φορτίο είναι μηδέν κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Στα σημεία A και B του κυκλώματος έχουμε συνδέσει δύο καλώδια για να μετρήσουμε την τάση στον πυκνωτή.

Βάσει των υποθέσεων μας καταλήγουμε στο ΠΑΤ

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = q'' + 20q' + 10\,000q = \delta(t), \quad q(0) = 0, \quad q'(0) = 0. \quad (30)$$

Θα λύσουμε το ΠΑΤ (30) με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

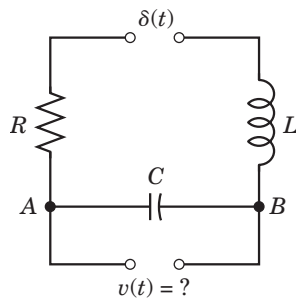
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{q''\} + 20\mathcal{L}\{q'\} + 10\,000\mathcal{L}\{q\} &= \mathcal{L}\{\delta(t)\} \\ \Leftrightarrow [s^2Q(s) - sq(0) - q'(0)] + 20[sQ(s) - q(0)] + 10\,000Q(s) &= 1 \\ \Leftrightarrow (s^2 + 20s + 10\,000)Q(s) &= 1. \end{aligned}$$

Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς $Q(s)$ και έχουμε

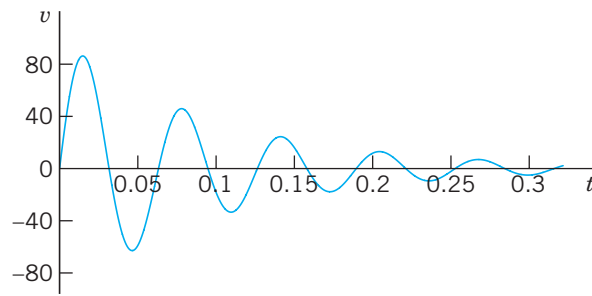
$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + 20s + 10\,000} = \frac{1}{(s + 10)^2 + 9900} = \frac{1}{(s + 10)^2 + 99.5^2}.$$

Από τον Πίνακα 1 βλέπουμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $Q(s)$ είναι

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = \frac{1}{99.5}e^{-10t} \sin 99.5t.$$



Κύκλωμα



Τάση στον πυκνωτή

Σχήμα 14: Κύκλωμα RLC και η τάση στον πυκνωτή $v(t)$.

Επομένως για την τάση έχουμε

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} = 100.5 e^{-10t} \sin 99.5t.$$

Στο Σχήμα 14 (δεξιά) σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της λύσης $v(t)$. □

5 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 11, \quad y'(0) = 28.$$

Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης, και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της γραμμικότητας του Θεωρήματος 1.1 και τις σχέσεις (3) και (4).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 6\mathcal{L}\{y\} &= 0 \Leftrightarrow [s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] - [sY(s) - y(0)] - 6Y(s) = 0 \\ &\Leftrightarrow s^2 Y(s) - 11s - 28 - sY(s) + 11 - 6Y(s) = 0 \\ &\Leftrightarrow (s^2 - s - 6)Y(s) = 11s + 17. \end{aligned}$$

Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς $Y(s)$, και παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή.

$$Y(s) = \frac{11s + 17}{s^2 - s - 6} = \frac{11s + 17}{(s - 3)(s + 2)}.$$

Αναλύουμε τη ρητή αυτή συνάρτηση σε απλά κλάσματα.

$$\begin{aligned} \frac{11s + 17}{(s - 3)(s + 2)} &= \frac{a}{s - 3} + \frac{b}{s + 2} = \frac{a(s + 2)}{(s - 3)(s + 2)} + \frac{b(s - 3)}{(s - 3)(s + 2)} \\ &= \frac{a(s + 2) + b(s - 3)}{(s - 3)(s + 2)} \\ &= \frac{(a + b)s + 2a - 3b}{(s - 3)(s + 2)}. \end{aligned}$$

Εξισώνουμε τους αριθμητές και καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{cases} a + b = 11 \\ 2a - 3b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow a = 10, \quad b = 1.$$

Επομένως

$$Y(s) = \frac{11s + 17}{(s - 3)(s + 2)} = \frac{10}{s - 3} + \frac{1}{s + 2}.$$

Χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και τον Πίνακα 1 για να βρούμε τη λύση του ΠΑΤ.

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 10 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2}\right\} \\ &= 10e^{3t} + e^{-2t}. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 9y = \begin{cases} 8 \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$$

Καταρχήν θα γράψουμε την συνάρτηση με κλάδους που εμφανίζεται στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης ως μια συνάρτηση με έναν τύπο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τη μοναδιαία συνάρτηση βήματος.

$$\begin{cases} 8 \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases} = (u(t) - u(t - \pi))8 \sin t = 8u(t) \sin t - 8u(t - \pi) \sin t.$$

Άρα η εξίσωσή μας γράφεται στη μορφή

$$y'' + 9y = 8u(t) \sin t - 8u(t - \pi) \sin t.$$

Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης, και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της γραμμικότητας του Θεωρήματος 1.1 και τις σχέσεις (3) και (4).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} + 9\mathcal{L}\{y\} &= 8\mathcal{L}\{u(t) \sin t\} - 8\mathcal{L}\{u(t - \pi) \sin t\} \\ \Leftrightarrow [s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 9Y(s) &= 8\mathcal{L}\{u(t) \sin t\} + 8\mathcal{L}\{u(t - \pi) \sin(t - \pi)\}. \end{aligned}$$

Εδώ, για τον τελευταίο όρο, χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin t = \sin(\pi - t) = -\sin(t - \pi).$$

Στο πρώτο μέλος αντικαθιστούμε τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 4$, ενώ στο δεύτερο μέλος χρησιμοποιούμε την ιδιότητα (11) για να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} [s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 9Y(s) &= 8\mathcal{L}\{u(t)\sin t\} + 8\mathcal{L}\{u(t-\pi)\sin(t-\pi)\} \\ \Leftrightarrow s^2 Y(s) - 4 + 9Y(s) &= 8\frac{1}{s^2+1} + 8e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} \\ \Leftrightarrow (s^2+9)Y(s) &= \frac{8}{s^2+1} + \frac{8e^{-\pi s}}{s^2+1} + 4 \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{8}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{8e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{4}{s^2+9} \end{aligned}$$

Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση $\frac{8}{(s^2+1)(s^2+9)}$ σε απλά κλάσματα και έχουμε

$$\frac{8}{(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9},$$

οπότε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9} + \frac{4}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s} - \frac{1}{s^2+9}e^{-\pi s} \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{1}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s} - \frac{1}{s^2+9}e^{-\pi s}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, την ιδιότητα (12), και τον Πίνακα 1 για να βρούμε τη λύση του ΠΑΤ.

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}e^{-\pi s}\right\} \\ &= \sin t + \sin 3t + u(t-\pi)\sin(t-\pi) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}e^{-\pi s}\right\} \\ &= \sin t + \sin 3t + u(t-\pi)\sin(t-\pi) - \frac{1}{3}u(t-\pi)\sin 3(t-\pi) \\ &= \begin{cases} \sin t + \sin 3t, & 0 < t < \pi, \\ \sin 3t - \frac{1}{3}\sin 3(t-\pi), & t > \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3,$$

όπου $\delta(t-1)$ είναι η συνάρτηση- δ του Dirac.

Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης, και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της γραμμικότητας του Θεωρήματος 1.1 και τις σχέσεις (3), (4) και (18).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} &= 8\mathcal{L}\{\delta(t-1)\} \\ \Leftrightarrow [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 4[sY(s) - y(0)] + 5Y(s) &= e^{-s} \\ \Leftrightarrow (s^2 + 4s + 5)Y(s) &= e^{-s} + 3 \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{e^{-s} + 3}{s^2 + 4s + 5}.\end{aligned}$$

Τώρα, ο παρονομαστής στην παραπάνω ρητή συνάρτηση δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί. Στην περίπτωση αυτή προχωράμε κάνοντας συμπλήρωση τετραγώνου:

$$s^2 + 4s + 5 = s^2 + 2 \cdot 2 \cdot s + 2^2 - 2^2 + 5 = (s + 2)^2 + 1.$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε την $Y(s)$ ως

$$Y(s) = \frac{e^{-s} + 3}{(s + 2)^2 + 1} = \frac{e^{-s}}{(s + 2)^2 + 1} + \frac{3}{(s + 2)^2 + 1}.$$

Χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, την ιδιότητα (12), και τον Πίνακα 1, και έχουμε:

$$\begin{aligned}y(t) &= u(t-1)e^{-2(t-1)} \sin(t-1) + 3e^{-2t} \sin t \\ &= \begin{cases} 3e^{-2t} \sin t, & 0 < t < 1, \\ 3e^{-2t} \sin t + e^{-2(t-1)} \sin(t-1), & t > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 4: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + y' = \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

όπου $\delta(t-2)$ είναι η συνάρτηση- δ του Dirac.

Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης, και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της γραμμικότητας του Θεωρήματος 1.1 και τις σχέσεις (3), (4) και (18).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y'\} &= \mathcal{L}\{\delta(t-2)\} \\ \Leftrightarrow [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + [sY(s) - y(0)] &= e^{-2s} \\ \Leftrightarrow (s^2 + s)Y(s) &= e^{-2s} \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{e^{-2s}}{s^2 + s} = \frac{e^{-2s}}{s(s+1)}.\end{aligned}$$

Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση $\frac{1}{s(s+1)}$ σε απλά κλάσματα και έχουμε

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1},$$

οπότε

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s+1}.$$

Χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, την ιδιότητα (12), και τον Πίνακα 1, και έχουμε:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t-2) - e^{-(t-2)}u(t-2) \\ &= \begin{cases} 0, & 0 < t < 2, \\ 1 - e^{-(t-2)}, & t > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Ασκήσεις

Να λυθούν με χρήση του μετασχηματισμού Laplace τα ακόλουθα ΠΑΤ:

1. $y'' + 6y' + 8y = e^{-3t} - e^{-5t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
2. $y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
3. $y'' - \frac{1}{4}y = 0$, $y(0) = 12$, $y'(0) = 0$.
4. $y'' + 4y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 0$.
5. $y'' - 2y' - 8y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
6. $y'' - 2y' - 8y = 3\delta(t - 4)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
7. $y'' + 4y = 2 \cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Παράρτημα: Υπερβολικές συναρτήσεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις έχουν κάποιες ιδιότητες που είναι ανάλογες με αυτές των συνηθισμένων τριγωνομετρικών συναρτήσεων αλλά ορίζονται μέσω της εκθετικής συνάρτησης. Συγκεκριμένα:

- Η συνάρτηση **υπερβολικό ημίτονο** συμβολίζεται με $\sinh x$ και ορίζεται μέσω του τύπου

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Η συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες $\sinh 0 = 0$ και $\sinh(-x) = -\sinh x$. Η γραφική παράσταση της $\sinh x$ δίνεται στο Σχήμα 15 (αριστερά) και βρίσκεται πάντα ανάμεσα από τις γραφικές παραστάσεις των $y = \frac{1}{2}e^x$ και $y = \frac{1}{2}e^{-x}$.

- Η συνάρτηση **υπερβολικό συνημίτονο** συμβολίζεται με $\cosh x$ και ορίζεται μέσω του τύπου

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Η συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες $\cosh 0 = 1$ και $\cosh x = \cosh(-x)$. Η γραφική παράσταση της $\cosh x$ δίνεται στο Σχήμα 15 (στο κέντρο) και βρίσκεται πάντα πάνω από τις γραφικές παραστάσεις των $y = \frac{1}{2}e^x$ και $y = \frac{1}{2}e^{-x}$.

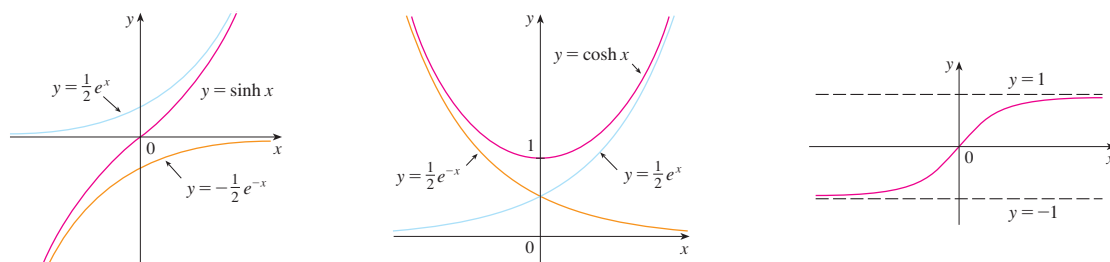
- Η συνάρτηση **υπερβολική εφαπτομένη** συμβολίζεται με $\tanh x$ και ορίζεται μέσω του τύπου

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Η συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες $\tanh 0 = 0$ και $\tanh(-x) = -\tanh x$. Η γραφική παράσταση της $\tanh x$ δίνεται στο Σχήμα 15 (δεξιά).

- Η συνάρτηση **υπερβολική συνεφαπτομένη** συμβολίζεται με $\coth x$ και ορίζεται μέσω του τύπου

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$



Σχήμα 15: Γραφικές παραστάσεις των υπερβολικών συναρτήσεων $\sinh x$ (αριστερά), $\cosh x$ (στο κέντρο), $\tanh x$ (δεξιά).

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ικανοποιούν τις ακόλουθες ταυτότητες:

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x.$
- $\cosh 2x = (\cosh x)^2 + (\sinh x)^2.$
- $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x.$
- $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$

Για τις παραγώγους των υπερβολικών συναρτήσεων έχουμε:

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad (\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Τέλος, τα ολοκληρώματά τους είναι:

$$\begin{aligned}\int \sinh(ax) dx &= \frac{1}{a} \cosh(ax) + C. \\ \int \cosh(ax) dx &= \frac{1}{a} \sinh(ax) + C. \\ \int \tanh(ax) dx &= \frac{1}{a} \ln (\cosh(ax)) + C. \\ \int \coth(ax) dx &= \frac{1}{a} \ln (\sinh(ax)) + C.\end{aligned}$$

Σημείωση: Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό. Κάποια από τα σχήματα του κεφαλαίου αυτού έχουν παρθεί από τα βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics.
- J. D. Logan, A First Course in Differential Equations.
- J. Stewart, Calculus: Concepts and Contexts.