

# Σύντομη Εισαγωγή στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών  
Σχολή Μηχανικών



Μάρτιος 2019

## Εισαγωγή

Όλοι είμαστε εξοικειωμένοι με τις αλγεβρικές εξισώσεις. Θεωρήστε π.χ., την εξίσωση

$$x^2 - x = 0.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι έχει λύσεις  $x = 0$  ή  $x = 1$ . Δηλαδή οι αριθμοί αυτοί επαληθεύουν την εξίσωσή μας.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη μελέτη διαφορικών εξισώσεων (ΔΕ). Μια ΔΕ είναι μια εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι συνάρτηση και όχι αριθμός, και περιέχει παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης (που είναι επίσης άγνωστες). Γενικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μια ΔΕ συνδέει μια άγνωστη συνάρτηση με κάποιες από τις παραγώγους της. Π.χ., η ακόλουθη είναι μια ΔΕ

$$y'(x) = y(x). \quad (1)$$

Προφανώς η  $y(x) = e^x$  είναι μια λύση της (1) αφού  $(e^x)' = e^x$ . Είναι η λύση αυτή μοναδική; Η απάντηση είναι όχι. Θεωρήστε τη συνάρτηση  $y(x) = Ce^x$ , για αυθαίρετο  $C \in \mathbb{R}$ . Τότε

$$(Ce^x)' = C(e^x)' = Ce^x,$$

για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό  $C$ . Άρα η ΔΕ (1) έχει πολλές (άπειρες) λύσεις.

Ένα ερώτημα που προκύπτει φυσιολογικά είναι γιατί να μελετάμε ΔΕ; Ο λόγος είναι ότι οι ΔΕ εμφανίζονται πολύ συχνά ως *μαθηματικά μοντέλα* που περιγράφουν προβλήματα πολλών

κλάδων της επιστήμης: φυσική, οικονομία, βιολογία κλπ. Π.χ., ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο μάζας  $m$  που κινείται κατά μήκος μιας ευθείας με σταθερή ταχύτητα  $V_0$ . Σε κάποια χρονική στιγμή, έστω  $t = 0$ , ασκείται στο σωματίδιο μια εξωτερική δύναμη  $F$  που αντιστέκεται στην κίνησή του, και είναι ανάλογη της ταχύτητας  $v = v(t)$  για θετικούς χρόνους  $t > 0$ . Μπορούμε από την πληροφορία αυτή να προβλέψουμε την ταχύτητα του σωματιδίου  $v(t)$  σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t > 0$ ;

Από τη φυσική, και συγκεκριμένα από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, γνωρίζουμε ότι η μάζα του σωματιδίου επί την επιτάχυνσή του ισούται με τη δύναμη, ή με μαθηματικούς όρους

$$ma = F.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση,  $a = v'(t)$ . Επομένως αν γράψουμε τη δύναμη (που υπενθυμίζουμε ότι υποθέσαμε ότι είναι ανάλογη της ταχύτητας) στη μορφή  $F = -kv(t)$ , όπου  $k$  είναι μια σταθερά αναλογίας και το πρόσημο « $-$ » προκύπτει επειδή θεωρήσαμε ότι η δύναμη αντιστέκεται στη φορά της κίνησης, τότε αντικαθιστούμε τα  $a$  και  $F$  στην εξίσωση  $ma = F$  και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$mv'(t) = -kv(t). \quad (2)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια ΔΕ για την άγνωστη ταχύτητα  $v(t)$ , και αποτελεί ένα **μαθηματικό μοντέλο** για την κίνηση του σωματιδίου.

Στη συνέχεια θα δούμε διάφορες τεχνικές για να υπολογίζουμε τη λύση μιας τέτοιας εξίσωσης. Εδώ ας επαληθεύσουμε απλώς ότι η εξίσωση

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{k}{m}t}, \quad t \geq 0,$$

είναι λύση της ΔΕ (2). Πράγματι

$$mv'(t) = mV_0 \left( -\frac{k}{m} \right) e^{-\frac{k}{m}t} = -kV_0 e^{-\frac{k}{m}t} = -kv(t),$$

και, επιπλέον, επαληθεύει τη συνθήκη

$$v(0) = V_0 e^{-\frac{k}{m}0} = V_0 \cdot 1 = V_0.$$

Ας προχωρήσουμε λοιπόν στον ακόλουθο ορισμό:

Μια **συνήθης διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ)** είναι μια εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση και μία ή περισσότερες από τις παραγώγους της. Συγκεκριμένα, είναι μια εξίσωση της μορφής

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0,$$

όπου  $y$  είναι μια **συνάρτηση** του  $x$ .

### Παραδείγματα.

- $y' = y$ .
- $y'' = x^2$ .
- $(y')^2 + xy = e^x$ .
- Προσοχή: Η εξίσωση  $x^2 + y^2 = 1$ , ΔΕΝ είναι ΣΔΕ.



Ορίζουμε ως **τάξη** μιας ΣΔΕ την τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Μια συνάρτηση  $y = f(x)$  λέγεται **ειδική λύση** μιας διαφορικής εξίσωσης αν ικανοποιεί την εξίσωση αυτή. Το σύνολο όλων των ειδικών λύσεων μιας ΣΔΕ λέγεται **γενική λύση**.

### Παραδείγματα.

1. Η ΣΔΕ  $y' = 0$  έχει γενική λύση  $y(x) = C$ , όπου  $C$  είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά.
2. Η γενική λύση της  $y' = 2x$  είναι  $y(x) = x^2 + C$ , όπου  $C$  είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Πράγματι,

$$y' = 2x \Rightarrow \int y'(x) dx = \int 2x dx \Rightarrow y = x^2 + C.$$



Στην επόμενη παράγραφο θα ασχοληθούμε με ΣΔΕ πρώτης τάξης.

## 1 Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Η γενική μορφή μιας ΣΔΕ πρώτης τάξης είναι

$$y' = F(x, y). \quad (3)$$

Αν γνωρίζουμε τη γενική λύση της (3) και θέλουμε να προσδιορίσουμε μια ειδική λύση θα πρέπει να γνωρίζουμε την τιμή της άγνωστης συνάρτησης  $y$  σ' ένα σημείο, π.χ.

$$y(x_0) = y_0, \quad (4)$$

όπου  $x_0$  και  $y_0$  είναι δοσμένες πραγματικές σταθερές.

Η συνθήκη (4) ονομάζεται **αρχική συνθήκη**, ενώ η εξίσωση (3) μαζί με την (4), λέμε ότι αποτελούν ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών** (ΠΑΤ).

**Παράδειγμα.** Θα λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = 3x^2, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Για να βρούμε τη γενική λύση εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα

$$y' = 3x^2 \Rightarrow \int y'(x) dx = \int 3x^2 dx \Rightarrow y(x) = x^3 + C.$$

Γνωρίζουμε ότι  $y(0) = 1$ , άρα θα πρέπει

$$y(0) = 0^3 + C \Leftrightarrow 1 = 0 + C \Leftrightarrow C = 1.$$

Επομένως, το ΠΑΤ (5) έχει λύση  $y(x) = x^3 + 1$ . □

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε δύο κατηγορίες ΣΔΕ πρώτης τάξης που μπορούμε να τις λύσουμε με στοιχειώδεις μεθόδους:

- Τις εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών, και
- τις γραμμικές εξισώσεις.

## 1.1 Εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

Μια ΣΔΕ πρώτης τάξης λέγεται χωριζόμενων μεταβλητών αν το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (3) μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως μια συνάρτηση του  $x$  επί μια συνάρτηση του  $y$ . Δηλαδή, μια εξίσωση **χωριζόμενων μεταβλητών** είναι της μορφής

$$y' = f(x)h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)h(y).$$

Αν θέσουμε  $g(y) = 1/h(y)$ , η προηγούμενη εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}. \quad (6)$$

Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή τη γράφουμε στη διαφορική μορφή

$$g(y)dy = f(x)dx,$$

(έτσι ώστε όλα τα “ $y$ ” να είναι στο ένα μέλος της εξίσωσης και όλα τα “ $x$ ” στο άλλο). Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της προηγούμενης εξίσωσης και έχουμε

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx. \quad (7)$$

Επομένως, έχουμε προσδιορίσει τη γενική λύση, φυσικά υπό την προϋπόθεση ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα αυτά.

### Παραδείγματα.

1. Να λυθεί η ΣΔΕ  $y' = \frac{x^2}{y^2}$ .

Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} &\Rightarrow y^2 dy = x^2 dx \Rightarrow \int y^2 dy = \int x^2 dx \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{3} x^3 + C_1 \Rightarrow y^3 = x^3 + 3C_1 \\ &\stackrel{C=3C_1}{\Rightarrow} y^3 = x^3 + C \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{x^3 + C}.\end{aligned}$$

2. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$\begin{cases} y' + 3x^2 y^2 = 0, \\ y(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + 3x^2 y^2 = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{y^2} dy = 3x^2 dx \Rightarrow -\int \frac{1}{y^2} dy = \int 3x^2 dx \\ &\Rightarrow \frac{1}{y} = x^3 + C \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x^3 + C}.\end{aligned}$$

Αφού  $y(1) = \frac{1}{2}$ , αντικαθιστούμε στη λύση την τιμή  $x = 1$ , και έχουμε

$$y(1) = \frac{1}{1^3 + C} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1^3 + C} \Leftrightarrow C + 1 = 2 \Leftrightarrow C = 1.$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι  $y(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$ .

3. Να λυθεί η ΣΔΕ  $y' = \frac{6x^2}{2y + \cos y}$ .

Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y + \cos y} &\Rightarrow (2y + \cos y) dy = 6x^2 dx \Rightarrow \int (2y + \cos y) dy = \int 6x^2 dx \\ &\Rightarrow y^2 + \sin y = 2x^3 + C.\end{aligned}$$

Η εξίσωση  $y^2 + \sin y = 2x^3 + C$  δίνει τη γενική λύση σε **πεπλεγμένη μορφή**. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι αδύνατον να λύσουμε την εξίσωση αυτή ώστε να εκφράσουμε το  $y$  ως συνάρτηση του  $x$ .

4. Να λυθεί η ΣΔΕ  $y' = x^2 y$ .

Καταρχήν, παρατηρούμε ότι η σταθερή συνάρτηση  $y = 0$  είναι προφανώς λύση της εξίσωσης. Αν  $y \neq 0$  έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = x^2 y &\Rightarrow \frac{1}{y} dy = x^2 dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int x^2 dx \\ &\Rightarrow \ln |y| = \frac{x^3}{3} + C \Rightarrow |y| = e^{x^3/3+C} \Rightarrow |y| = e^C e^{x^3/3} \\ &\Rightarrow y = \pm e^C e^{x^3/3}.\end{aligned}$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση στη μορφή

$$y(x) = A e^{x^3/3},$$

όπου  $A$  είναι αυθαίρετη σταθερά ( $A = e^C$  ή  $A = -e^C$  ή  $A = 0$ ).

5. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$\begin{cases} y' = \frac{x+1}{2y}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2y} &\Rightarrow 2y dy = (x+1)dx \Rightarrow \int 2y dy = \int (x+1) dx \\ &\Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}x^2 + x + C.\end{aligned}$$

Επομένως βρήκαμε τη λύση σε πεπλεγμένη μορφή. Μπορούμε να προχωρήσουμε λύνοντας ως προς  $y$ :

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + C}.$$

Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι ποιο πρόσημο πρέπει να επιλέξουμε; Η αρχική συνθήκη επιβάλλει η  $y$  να είναι θετική, επομένως παίρνουμε το «+», και έχουμε

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + C}.$$

Χρησιμοποιούμε και πάλι την αρχική συνθήκη ώστε να υπολογίσουμε τη σταθερά  $C$ .

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}0^2 + 0 + C} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{C} = 1 \Leftrightarrow C = 1,$$

άρα η λύση στο ΠΑΤ είναι

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}.$$

Παρατηρήστε ότι η λύση αυτή έχει νόημα υπό την προϋπόθεση ότι η ποσότητα που είναι κάτω από τη ρίζα δεν είναι αρνητική. Όμως στην περίπτωση μας  $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 > 0$  για κάθε πραγματικό  $x$  (γιατί;), οπότε η λύση αυτή ορίζεται σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία.

## 1.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης λέγεται **γραμμική** αν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y' + p(x)y = r(x), \quad (8)$$

όπου θεωρούμε ότι οι  $p(x)$  και  $r(x)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Στην περίπτωση όπου  $r(x) = 0$  η εξίσωση λέγεται **ομογενής**. Διαφορετικά, λέγεται **μη ομογενής**.

Επομένως, μια ομογενής γραμμική εξίσωση έχει τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

δηλαδή είναι χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται με τη μέθοδο που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Στην μη ομογενή περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τη λεγόμενη μέθοδο των ολοκληρωτικών παραγόντων. Θέτουμε

$$P(x) = e^{\int p(x)dx},$$

και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (8) με  $P(x)$ . Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} P(x) + p(x)yP(x) &= r(x)P(x) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} e^{\int p(x)dx} + p(x)y e^{\int p(x)dx} &= r(x)e^{\int p(x)dx} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( y e^{\int p(x)dx} \right) &= r(x)e^{\int p(x)dx} \\ \Rightarrow \frac{d(yP(x))}{dx} &= r(x)P(x) \\ \Rightarrow yP(x) &= \int r(x)P(x) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Στη συνέχεια λύνουμε την (αλγεβρική) εξίσωση (9) ως προς  $y$ , και παίρνουμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης. Η βοηθητική συνάρτηση  $P$  λέγεται **ολοκληρωτικός παράγοντας**.

### Παραδείγματα.

1. Να λυθεί η γραμμική ΣΔΕ πρώτης τάξης  $y' + \frac{2}{x}y = 3x^3$ .

Σύμφωνα με το συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως  $p(x) = \frac{2}{x}$  και  $r(x) = 3x^3$ . Συνεπώς ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο

$$P(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (9), η γενική λύση είναι

$$yx^2 = \int 3x^3 x^2 dx = 3 \int x^5 dx \Rightarrow yx^2 = \frac{x^6}{2} + C \Rightarrow y(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{C}{x^2}.$$

2. Να λυθεί η γραμμική ΣΔΕ πρώτης τάξης  $xy' + (1+x)y = e^{-x}$ ,  $x > 0$ .

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική αλλά ο συντελεστής του όρου  $y'$  δεν είναι μονάδα, οπότε διαιρούμε και τα δύο μέλη με  $x$  (αυτό είναι εφικτό αφού  $x > 0$ ). Επομένως έχουμε

$$y' + \left(\frac{1}{x} + 1\right)y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής (8) με

$$p(x) = \frac{1}{x} + 1 \quad \text{και} \quad r(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Άρα ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο

$$P(x) = e^{\int (\frac{1}{x} + 1) dx} \stackrel{x > 0}{=} e^{\ln x + x} = e^{\ln x} e^x = x e^x.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (9),

$$y x e^x = \int \frac{e^{-x}}{x} x e^x dx = \int dx = x + C \Rightarrow y = \frac{x + C}{x} e^{-x},$$

και άρα η γενική λύση είναι

$$y(x) = \left(1 + \frac{C}{x}\right) e^{-x}, \quad x > 0.$$

## Ασκήσεις

1. Λύστε τις ακόλουθες ΣΔΕ με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών:

(i)  $y' = y e^{-x}$

(ii)  $y' = \frac{2y}{x+1}$

(iii)  $y' = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{\cos y}$

(iv)  $yy' = (y^2 + 1)(x^2 + 1)$

(v)  $x e^{x+y} = y y'$

2. Λύστε τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών (ΠΑΤ):

(i)  $y' = y e^{-x}$ ,  $y(0) = e$ .

(ii)  $y' = \frac{y^3 + 2y}{x^2 + 3x}$ ,  $y(1) = 1$ .

(iii)  $y' = \frac{4 - 2x}{3y^2 - 5}$ ,  $y(1) = 3$ .



3. Να λυθούν οι ακόλουθες γραμμικές ΣΔΕ:

(i)  $y' + (1 + 2x)y = e^{-x^2}$

(ii)  $y' + y = e^{-x}$

(iii)  $y' - y = (2x - 1)e^{x^2}$

4. Λύστε τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών (ΠΑΤ):

(i)  $y' + 2xy = x, \quad y(0) = 1.$

(ii)  $y' + y = \sin x, \quad y(0) = 1.$

(iii)  $xy' - y = \sqrt{x}, \quad y(4) = 0.$

## 2 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης

Οι ΔΕ δεύτερης τάξης είναι ίσως οι εξισώσεις που έχουν μελετηθεί περισσότερο από οποιοσδήποτε άλλος στα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες και στις επιστήμες μηχανικού. Ένας λόγος για αυτό είναι ότι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα περιέχει την επιτάχυνση ενός σωματιδίου, η οποία είναι η δεύτερη παράγωγος της θέσης. Άρα μονοδιάστατα μηχανικά συστήματα περιγράφονται συνήθως με ΔΕ δεύτερης τάξης.

Στη συνέχεια εμείς θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με **γραμμικές** ΔΕ δεύτερης τάξης. Τέτοιες εξισώσεις έχουν τη γενική μορφή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

όπου  $y$  είναι η άγνωστη συνάρτηση και  $p(x), q(x), r(x)$  είναι δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις. Αν  $r(x) = 0$  η εξίσωση λέγεται **ομογενής**, ενώ αλλιώς λέγεται **μη ομογενής**. Οι συναρτήσεις  $p(x)$  και  $q(x)$  λέγονται συντελεστές της εξίσωσης. Εμείς θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου οι συντελεστές είναι σταθεροί αριθμοί.

**Παράδειγμα.** Να λυθεί η εξίσωση  $y'' = 0$ .

Έχουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 \Rightarrow y(x) = C_1x + C_2,$$

όπου  $C_1, C_2$  είναι αυθαίρετες σταθερές. □

Αν θέλουμε να προσδιορίσουμε μια ειδική λύση, πρέπει να ξέρουμε την τιμή της άγνωστης συνάρτησης σε κάποιο σημείο καθώς και την τιμή της παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης στο ίδιο σημείο. Δηλαδή χρειαζόμαστε δύο αρχικές συνθήκες.

**Παράδειγμα.** Να λυθεί η εξίσωση  $y'' = 2$ , με αρχικές συνθήκες  $y(0) = 1$  και  $y'(0) = 2$ .

Έχουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + C_1 \Rightarrow y(x) = x^2 + C_1x + C_2,$$

όπου  $C_1, C_2$  είναι αυθαίρετες σταθερές. Για να υπολογίσουμε τις σταθερές χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες, και επειδή  $y'(x) = 2x + C_1$  έχουμε

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1,$$

$$y'(0) = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot 0 + C_1 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2.$$

Επομένως η λύση που ικανοποιεί τη ΔΕ και τις αρχικές συνθήκες είναι  $y(x) = x^2 + 2x + 1$ .

□

## 2.1 Επίλυση της ομογενούς ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η γενική μορφή της γραμμικής ομογενούς ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$y'' + ay' + by = 0, \quad (10)$$

όπου  $a, b$  είναι δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί. Συχνά η εξίσωση (10) συνοδεύεται από αρχικές συνθήκες της μορφής

$$y(x_0) = A, \quad y'(x_0) = B, \quad (11)$$

όπου  $A, B$  είναι δοσμένοι αριθμοί. Το πρόβλημα (10) μαζί με τις συνθήκες (11) λέγεται **πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)**.

Ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα για ΠΑΤ αυτού του τύπου είναι το ακόλουθο θεώρημα υπάρξης-μοναδικότητας του οποίου η απόδειξη ξεφεύγει από τους στόχους των σημειώσεων αυτών.

**Θεώρημα 2.1.** *Το ΠΑΤ (10)–(11) έχει μοναδική λύση η οποία ορίζεται σ' ολόκληρο το  $(-\infty, \infty)$ .*

Στη συνέχεια θα ακολουθήσουμε τα εξής βήματα: Καταρχήν παρατηρούμε ότι η ΔΕ (10) έχει πάντα δύο ανεξάρτητες λύσεις  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$ . Με τον όρο **ανεξάρτητες** εννοούμε ότι η μία δεν είναι πολλαπλάσιο της άλλης. Το γεγονός της ύπαρξης των λύσεων αυτών θα το επιβεβαιώσουμε ουσιαστικά υπολογίζοντας αναλυτικά τις λύσεις αυτές. Στη συνέχεια αν πολλαπλασιάσουμε την καθεμιά λύση επί μια σταθερά και σχηματίσουμε το συνδυασμό

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

όπου  $C_1, C_2$  είναι αυθαίρετες σταθερές, τότε μπορούμε άμεσα να ελέγξουμε ότι και η  $y(x)$  είναι λύση της (10). Ο συνδυασμός αυτός ονομάζεται **γενική λύση** της (10). Τέλος, για να

λύσουμε το ΠΑΤ (10)–(11) θα χρησιμοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες (11) ώστε να προσδιορίσουμε με μοναδικό τρόπο τις σταθερές  $C_1$  και  $C_2$ .

Για να μπορέσουμε, όπως είπαμε, να υπολογίσουμε δύο ανεξάρτητες λύσεις δοκιμάζουμε στη ΔΕ (10) μια λύση της μορφής

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

όπου η σταθερά  $\lambda$  πρέπει να προσδιοριστεί. (Δοκιμάζουμε μια τέτοια συνάρτηση εκθετικού τύπου γιατί τότε  $y, y', y''$  είναι όλες της ίδιας μορφής.) Παρατηρούμε ότι αν  $y = e^{\lambda x}$ , τότε  $y' = \lambda e^{\lambda x}$  και  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ . Αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις αυτές στην (10) και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} &= 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Παρατηρήστε ότι η (12) είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς την άγνωστη σταθερά  $\lambda$ . Η εξίσωση (12) λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση** και για τις λύσεις της διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας  $\Delta = a^2 - 4b$ :

**Περίπτωση 1.** Αν  $\Delta = a^2 - 4b > 0$ , υπάρχουν δύο διακριτές πραγματικές ρίζες

$$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Τότε υπάρχουν δύο ανεξάρτητες λύσεις εκθετικής μορφής

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x},$$

και η γενική λύση της ΔΕ (10) είναι

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (13)$$

**Περίπτωση 2.** Αν  $\Delta = a^2 - 4b = 0$ , τότε υπάρχει μια διπλή ρίζα  $\lambda = -\frac{a}{2}$ . Στην περίπτωση αυτή μία λύση είναι η  $y_1(x) = e^{\lambda x}$ , και μια δεύτερη ανεξάρτητη λύση είναι η  $y_2(x) = x e^{\lambda x}$ . Τότε η γενική λύση είναι

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}. \quad (14)$$

**Περίπτωση 3.** Αν  $\Delta = a^2 - 4b < 0$ , οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικές  $\lambda_{1,2} = r \pm is$ . Τότε υπάρχουν δύο ανεξάρτητες λύσεις

$$y_1(x) = e^{rx} \cos(sx), \quad y_2(x) = e^{rx} \sin(sx),$$

και η γενική λύση της ΔΕ (10) είναι

$$y(x) = C_1 e^{rx} \cos(sx) + C_2 e^{rx} \sin(sx). \quad (15)$$

### Παραδείγματα.

1. Να λυθεί το ΠΑΤ:  $y'' - y' - 2y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 0$ .

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9 > 0$ . Άρα

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (13), η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Τώρα, λόγω της αρχικής συνθήκης  $y(0) = 3$  έχουμε

$$C_1 + C_2 = 3. \tag{16}$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη αρχική συνθήκη παραγωγίζουμε τη λύση  $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ :

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}.$$

Άρα από την αρχική συνθήκη  $y'(0) = 0$  έχουμε

$$-C_1 + 2C_2 = 0. \tag{17}$$

Λύνουμε το σύστημα των (16) και (17) και βρίσκουμε  $C_1 = 2$  και  $C_2 = 1$ . Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι:

$$y(x) = 2e^{-x} + e^{2x}.$$

2. Να λυθεί το ΠΑΤ:  $y'' + 4y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι  $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0$ . Άρα

$$\lambda = \frac{-4}{2} = -2.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (14), η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Λόγω της αρχικής συνθήκης  $y(0) = 1$  έχουμε

$$C_1 = 1. \quad (18)$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη αρχική συνθήκη παραγωγίζουμε τη λύση  $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ :

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x}.$$

Άρα από την αρχική συνθήκη  $y'(0) = 0$  έχουμε

$$-2C_1 + C_2 = 0 \stackrel{(18)}{\Rightarrow} C_2 = 2. \quad (19)$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι:

$$y(x) = e^{-2x} + 2x e^{-2x} = (1 + 2x) e^{-2x}.$$

3. Να λυθεί το ΠΑΤ:  $y'' + 4y' + 5y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι  $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$ . Άρα

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{4}}{2} = -2 \pm i.$$

Επομένως,  $r = -2$ ,  $s = 1$ , και λόγω της (15), η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x.$$

Λόγω της αρχικής συνθήκης  $y(0) = 0$  έχουμε

$$C_1 = 0. \quad (20)$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη αρχική συνθήκη παραγωγίζουμε τη λύση  $y(x) = C_2 e^{-2x} \sin x$ :

$$y'(x) = -2C_2 e^{-2x} \sin x + C_2 e^{-2x} \cos x.$$

Άρα από την αρχική συνθήκη  $y'(0) = 1$  έχουμε

$$C_2 = 1. \quad (21)$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι:

$$y(x) = e^{-2x} \sin x.$$

## 2.2 Επίλυση της μη ομογενούς ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η γενική μορφή μιας μη ομογενούς ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$y'' + ay' + by = r(x), \quad (22)$$

όπου  $a, b$  είναι δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί, και  $r(x)$  δοσμένη συνάρτηση. Για να λύσουμε εξισώσεις του τύπου (22) ακολουθούμε τα εξής βήματα:

**Βήμα 1:** Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$y'' + ay' + by = 0,$$

και βρίσκουμε με τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου τη γενική της λύση

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

όπου  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  είναι δύο ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς.

**Βήμα 2:** Προσδιορίζουμε μια λύση της μη ομογενούς, έστω  $y_p$ . (Στην  $y_p$  αναφερόμαστε συνήθως με τον όρο **μερική λύση** ή **ειδική λύση**.) Τότε η **γενική λύση** της (22) είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x).$$

Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται πολύ εύκολα: Αν η συνάρτηση  $y(x)$  είναι μια οποιαδήποτε λύση της (22), και  $y_p(x)$  μια μερική της λύση, τότε προφανώς η  $y(x) - y_p(x)$  θα ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση (10). Τότε, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, θα υπάρχουν κατάλληλοι αριθμοί  $C_1$  και  $C_2$  ώστε  $y(x) - y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \Leftrightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x)$ .

Επομένως, η όποια δυσκολία υπάρχει για την επίλυση της (22) εντοπίζεται στον προσδιορισμό μιας ειδικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης. Μια μέθοδος που δουλεύει για αρκετές εξισώσεις βασίζεται στη δοκιμή συναρτήσεων συγκεκριμένης μορφής, ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης  $r(x)$  που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (22). Συγκεκριμένα,

- Αν  $r(x) = p_n(x)$ , όπου  $p_n(x)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$ , τότε δοκιμάζουμε ως μερική λύση της (22) μια συνάρτηση της μορφής

$$y_p(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0.$$

- Αν  $r(x) = e^{\alpha x} p_n(x)$ , όπου  $p_n(x)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$ , τότε δοκιμάζουμε ως μερική λύση της (22) μια συνάρτηση της μορφής

$$y_p(x) = e^{\alpha x} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0).$$

- Αν  $r(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x) p_n(x)$  ή  $r(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) p_n(x)$ , όπου  $p_n(x)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$ , τότε δοκιμάζουμε ως μερική λύση της (22) μια συνάρτηση της μορφής

$$y_p(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x) (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0) + e^{\alpha x} \cos(\beta x) (B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_1 x + B_0).$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την  $y_p(x)$  που δοκιμάσαμε στην μη ομογενή εξίσωση και βρίσκουμε τους άγνωστους συντελεστές  $A_0, A_1, \dots, A_n$  και  $B_0, B_1, \dots, B_n$ . Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών**.

**Παράδειγμα 1.** Να λυθεί η εξίσωση  $y'' - y' - 2y = 4x^2$ .

Καταρχήν, θα βρούμε τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9$ . Άρα

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2.$$

Τότε υπάρχουν δύο ανεξάρτητες λύσεις εκθετικής μορφής

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^{2x},$$

και η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Για να βρούμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $r(x) = 4x^2$ , που εμφανίζεται στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης, είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Επομένως δοκιμάζουμε μια λύση της μορφής

$$y_p(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0.$$

Τότε

$$y'_p(x) = 2A_2 x + A_1,$$

$$y''_p(x) = 2A_2.$$

Εφόσον η  $y_p(x)$  είναι λύση της μη ομογενούς πρέπει να την ικανοποιεί, δηλαδή

$$\begin{aligned} y''_p - y'_p - 2y_p &= 4x^2 \Leftrightarrow 2A_2 - (2A_2 x + A_1) - 2(A_2 x^2 + A_1 x + A_0) = 4x^2 \\ &\Leftrightarrow -2A_2 x^2 + (-2A_2 - 2A_1)x + (2A_2 - A_1 - 2A_0) = 4x^2. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση είναι μια ισότητα πολωνύμων, άρα θα πρέπει οι συντελεστές των δυνάμεων του  $x$  στο αριστερό μέλος να είναι ίσοι με τους αντίστοιχους συντελεστές των δυνάμεων του  $x$  στο δεξί μέλος. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} -2A_2 &= 4 \\ -2A_2 - 2A_1 &= 0 \\ 2A_2 - A_1 - 2A_0 &= 0. \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα αυτό και βρίσκουμε ότι

$$A_2 = -2, \quad A_1 = 2, \quad A_0 = -3,$$

επομένως η ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι

$$y_p(x) = -2x^2 + 2x - 3.$$

Τέλος, η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3.$$

□

**Παράδειγμα 2.** Να λυθεί η εξίσωση  $y'' - y' - 2y = e^{3x}$ .

Καταρχήν, θα βρούμε τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

η οποία είναι η ίδια με αυτή του Παραδείγματος 1, και άρα η γενική της λύση είναι

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Για να βρούμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $r(x) = e^{3x} = e^{3x} \cdot 1$ , όπου  $p(x) = 1$  είναι πολώνυμο μηδενικού βαθμού. Επομένως δοκιμάζουμε μια λύση της μορφής

$$y_p(x) = e^{3x} \cdot A_0 = A_0 e^{3x}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 3A_0 e^{3x}, \\ y_p''(x) &= 9A_0 e^{3x}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τις εκφράσεις αυτές στη μη ομογενή, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p' - 2y_p &= e^{3x} \Leftrightarrow 9A_0 e^{3x} - 3A_0 e^{3x} - 2A_0 e^{3x} = e^{3x} \\ &\Leftrightarrow 4A_0 e^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow 4A_0 = 1 \Leftrightarrow A_0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Επομένως η ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι:  $y_p(x) = \frac{1}{4} e^{3x}$ .

Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{3x}.$$

□

**Παράδειγμα 3.** Να λυθεί η εξίσωση  $y'' - y' - 2y = \sin(2x)$ .

Καταρχήν, θα βρούμε τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

η οποία είναι η ίδια με αυτή των προηγούμενων παραδειγμάτων, και άρα η γενική της λύση είναι

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Για να βρούμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $r(x) = \sin(2x) = \sin(2x) \cdot 1$ , όπου  $p(x) = 1$  είναι πολώνυμο μηδενικού βαθμού. Επομένως δοκιμάζουμε μια λύση της μορφής

$$y_p(x) = A_0 \sin(2x) + B_0 \cos(2x).$$

Τότε

$$y'_p(x) = 2A_0 \cos(2x) - 2B_0 \sin(2x),$$

$$y''_p(x) = -4A_0 \sin(2x) - 4B_0 \cos(2x).$$

Αντικαθιστούμε τις εκφράσεις αυτές στη μη ομογενή, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} y''_p - y'_p - 2y_p &= \sin(2x) \\ \Leftrightarrow -4A_0 \sin(2x) - 4B_0 \cos(2x) - (2A_0 \cos(2x) - 2B_0 \sin(2x)) \\ &\quad - 2(A_0 \sin(2x) + B_0 \cos(2x)) = \sin(2x) \\ \Leftrightarrow (-6A_0 + 2B_0) \sin(2x) + (-2A_0 - 6B_0) \cos(2x) &= \sin(2x). \end{aligned}$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές και έχουμε

$$-6A_0 + 2B_0 = 1,$$

$$-2A_0 - 6B_0 = 0.$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε

$$A_0 = -\frac{3}{20}, \quad B_0 = \frac{1}{20}.$$

Επομένως η ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι:  $y_p(x) = -\frac{3}{20} \sin(2x) + \frac{1}{20} \cos(2x)$ .

Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{3}{20} \sin(2x) + \frac{1}{20} \cos(2x).$$

□

### 2.2.1 Τροποποίηση της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών

Αν κάποιος όρος της υποψήφιας ειδικής λύσης περιλαμβάνεται στη γενική λύση της ομογενούς  $y_h$  (με διαφορετικό ίσως συντελεστή), τότε η μορφή της ειδικής λύσης που θα δοκιμάσουμε πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί  $x^m$ , όπου  $m$  είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο η μορφή της ειδικής λύσης και η  $y_h$  δεν έχουν όμοιο όρο.

**Παράδειγμα 1.** Να λυθεί η εξίσωση:  $y'' = 9x^2 + 2x - 1$ .

Φυσικά μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση αυτή με απ' ευθείας ολοκλήρωση. Παρόλα αυτά θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο που μόλις περιγράψαμε για να δούμε πώς εφαρμόζεται στην πράξη.

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι η

$$y'' = 0,$$

και η γενική της λύση είναι

$$y_h(x) = C_1x + C_2.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $r(x) = 9x^2 + 2x - 1$  είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, άρα ως υποψήφια λύση της μη ομογενούς θα δοκιμάζαμε μια συνάρτηση της μορφής

$$A_2x^2 + A_1x + A_0.$$

Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση αυτή και η  $y_h$  έχουν κοινούς όρους τα μονώνυμα  $x$  και  $1$ , επομένως θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε επί  $x^2$ . Άρα μια υποψήφια λύση της μη ομογενούς είναι

$$y_p(x) = A_2x^4 + A_1x^3 + A_0x^2.$$

Τότε

$$y_p'(x) = 4A_2x^3 + 3A_1x^2 + 2A_0x,$$

$$y_p''(x) = 12A_2x^2 + 6A_1x + 2A_0.$$

Εφόσον η  $y_p(x)$  είναι λύση της μη ομογενούς πρέπει να την ικανοποιεί, δηλαδή

$$y_p'' = 9x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow 12A_2x^2 + 6A_1x + 2A_0 = 9x^2 + 2x - 1.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές και έχουμε

$$\begin{aligned} 12A_2 &= 9, & 6A_1 &= 2, & 2A_0 &= -1 \\ \Leftrightarrow A_2 &= \frac{3}{4}, & A_1 &= \frac{1}{3}, & A_0 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως η ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$y_p(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2,$$

και άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 x + C_2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

□

**Παράδειγμα 2.** Να λυθεί η εξίσωση  $y'' - 2y' + y = xe^x$ .

Καταρχήν, θα βρούμε τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 0$ . Άρα η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα  $\lambda = -(-2)/2 = 1$ . Τότε υπάρχουν δύο ανεξάρτητες λύσεις της μορφής

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = xe^x,$$

και η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $r(x) = xe^x$  είναι της μορφής  $e^{\alpha x} p_n(x)$ , όπου  $\alpha = 1$  και  $p_n(x) = x$  είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού, άρα ως υποψήφια λύση της μη ομογενούς θα δοκιμάζαμε μια συνάρτηση της μορφής

$$e^x(A_1 x + A_0) = A_1 x e^x + A_0 e^x.$$

Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση αυτή και η  $y_h$  έχουν κοινούς όρους (τους  $e^x$  και  $xe^x$ ). Επομένως πολλαπλασιάζουμε επί  $x^2$ , και έχουμε ότι μια υποψήφια λύση της μη ομογενούς είναι

$$y_p(x) = A_1 x^3 e^x + A_0 x^2 e^x = (A_1 x^3 + A_0 x^2) e^x.$$

Τότε

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (A_1 x^3 + A_0 x^2)' e^x + (A_1 x^3 + A_0 x^2)(e^x)' = (A_1 x^3 + (A_0 + 3A_1)x^2 + 2A_0 x) e^x, \\ y_p''(x) &= (A_1 x^3 + (A_0 + 6A_1)x^2 + (4A_0 + 6A_1)x + 2A_0) e^x. \end{aligned}$$

Εφόσον η  $y_p(x)$  είναι λύση της μη ομογενούς πρέπει να την ικανοποιεί, δηλαδή

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' + y_p &= xe^x \\ \Leftrightarrow (A_1x^3 + (A_0 + 6A_1)x^2 + (4A_0 + 6A_1)x + 2A_0)e^x \\ &\quad - 2(A_1x^3 + (A_0 + 3A_1)x^2 + 2A_0x)e^x \\ &\quad + (A_1x^3 + A_0x^2)e^x = xe^x \\ \Leftrightarrow 6A_1x + 2A_0 &= x \\ \Leftrightarrow 6A_1 &= 1 \quad \text{και} \quad 2A_0 = 0 \\ \Leftrightarrow A_1 &= \frac{1}{6} \quad \text{και} \quad A_0 = 0. \end{aligned}$$

Επομένως η ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x^3e^x,$$

και άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x.$$

□

### 2.2.2 Γενίκευση της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 2, εάν η συνάρτηση  $r(x)$  που βρίσκεται στο δεύτερο μέλος της (22) έχει μια από τις ειδικές μορφές που είδαμε, τότε δοκιμάζουμε αντίστοιχα συναρτήσεις συγκεκριμένης μορφής ως ειδικές λύσεις της (22).

Εάν, τώρα, η  $r(x)$  είναι άθροισμα ή διαφορά των μορφών που θεωρήσαμε στην Παράγραφο 2, τότε δοκιμάζουμε ως  $y_p$  το άθροισμα ή τη διαφορά των  $y_p$  που θεωρήσαμε στις αντίστοιχες περιπτώσεις.

**Παράδειγμα.** Να λυθεί η εξίσωση  $y'' - 4y' + 4y = \sin x + \cos(2x)$ .

Καταρχήν, θα βρούμε τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι  $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$ . Άρα η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα  $\lambda = -(-4)/2 = 2$ . Τότε υπάρχουν δύο ανεξάρτητες λύσεις της μορφής

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = xe^{2x},$$

και η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Σε αυτή την περίπτωση η  $r(x) = \sin x + \cos(2x)$ .

Αν είχαμε μόνον τον όρο  $\sin x$  θα δοκιμάζαμε μια ειδική λύση της μορφής

$$A_0 \sin x + B_0 \cos x,$$

ενώ αν είχαμε μόνον τον  $\cos(2x)$  θα δοκιμάζαμε μια ειδική λύση της μορφής

$$\Gamma_0 \sin(2x) + \Delta_0 \cos(2x).$$

Επομένως τώρα που έχουμε το άθροισμα  $\sin x + \cos(2x)$  θα δοκιμάσουμε ως ειδική λύση τη συνάρτηση

$$y_p(x) = A_0 \sin x + B_0 \cos x + \Gamma_0 \sin(2x) + \Delta_0 \cos(2x).$$

Τότε

$$y_p'(x) = A_0 \cos x - B_0 \sin x + 2\Gamma_0 \cos(2x) - 2\Delta_0 \sin(2x),$$

$$y_p''(x) = -A_0 \sin x - B_0 \cos x - 4\Gamma_0 \sin(2x) - 4\Delta_0 \cos(2x).$$

Εφόσον η  $y_p(x)$  είναι λύση της μη ομογενούς πρέπει να την ικανοποιεί, δηλαδή

$$\begin{aligned} y_p'' - 4y_p' + 4y_p &= \sin x + \cos(2x) \\ \Leftrightarrow -A_0 \sin x - B_0 \cos x - 4\Gamma_0 \sin(2x) - 4\Delta_0 \cos(2x) \\ &\quad - 4(A_0 \cos x - B_0 \sin x + 2\Gamma_0 \cos(2x) - 2\Delta_0 \sin(2x)) \\ &\quad + 4(A_0 \sin x + B_0 \cos x + \Gamma_0 \sin(2x) + \Delta_0 \cos(2x)) = \sin x + \cos(2x) \\ \Leftrightarrow (3A_0 + 4B_0) \sin x + (-4A_0 + 3B_0) \cos x + 8\Delta_0 \sin(2x) - 8\Gamma_0 \cos(2x) \\ &= \sin x + \cos(2x). \end{aligned}$$

Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές και καταλήγουμε στο σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} 3A_0 + 4B_0 = 1 \\ -4A_0 + 3B_0 = 0 \\ 8\Delta_0 = 0 \\ -8\Gamma_0 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_0 = 3/25 \\ B_0 = 4/25 \\ \Gamma_0 = -1/8 \\ \Delta_0 = 0 \end{array} \right\}.$$

Επομένως η ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$y_p(x) = \frac{3}{25} \sin x + \frac{4}{25} \cos x - \frac{1}{8} \sin(2x),$$

και άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{3}{25} \sin x + \frac{4}{25} \cos x - \frac{1}{8} \sin(2x).$$

□

## 2.3 Η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων

Όταν η συνάρτηση  $r(x)$  που βρίσκεται στο δεύτερο μέλος της (22) δεν έχει μια από τις ειδικές μορφές που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, τότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Εδώ θα παρουσιάσουμε μια άλλη μέθοδο που λέγεται **μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων**.

Θεωρούμε και πάλι τη μη ομογενή ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' + ay' + by = r(x). \quad (23)$$

Έστω  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  δύο ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

$$y'' + ay' + by = 0. \quad (24)$$

Τότε, όπως έχουμε ήδη δει, η γενική λύση της (24) είναι

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Για να βρούμε μια ειδική λύση της (23) μεταβάλλουμε τις σταθερές και δοκιμάζουμε μια συνάρτηση της μορφής

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \quad (25)$$

όπου  $u_1(x), u_2(x)$  είναι δύο συναρτήσεις που πρέπει να προσδιορισθούν. Για να το πετύχουμε αυτό αντικαθιστούμε την έκφραση (25) στη μη ομογενή εξίσωση (23). Οι πράξεις που απαιτούνται είναι κάπως πολύπλοκες και θα αφήσουμε τις λεπτομέρειες για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη.

Αρχικά, υπολογίζουμε τις παραγώγους  $y'_p(x)$  και  $y''_p(x)$ . (Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό δεν θα γράφουμε στη συνέχεια την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ .) Τότε

$$y'_p = (u_1 y_1 + u_2 y_2)' = u'_1 y_1 + u_1 y'_1 + u'_2 y_2 + u_2 y'_2.$$

Επειδή έχουμε κάποια ευελιξία στην επιλογή της λύσης, θα αναζητήσουμε τις  $u_1, u_2$  έτσι ώστε

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0. \quad (26)$$

Τότε

$$\begin{aligned} y'_p &= u_1 y'_1 + u_2 y'_2, \\ y''_p &= u_1 y''_1 + u_2 y''_2 + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις αυτές στην (23) και έχουμε

$$\begin{aligned} u_1 y''_1 + u_2 y''_2 + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + a(u_1 y'_1 + u_2 y'_2) + b(u_1 y_1 + u_2 y_2) &= r(x) \\ \Leftrightarrow (y''_1 + a y'_1 + b y_1) u_1 + (y''_2 + a y'_2 + b y_2) u_2 + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 &= r(x). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε τώρα ότι οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (24), άρα οι παρενθέσεις στην προηγούμενη σχέση μηδενίζονται και η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = r(x). \quad (27)$$

Οι εξισώσεις (26) και (27) αποτελούν ένα σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με αγνώστους τις συναρτήσεις  $u_1'$  και  $u_2'$ . Λύνουμε τις εξισώσεις αυτές και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$u_1(x) = - \int \frac{y_2(x)r(x)}{W(x)} dx \quad \text{και} \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)} dx, \quad (28)$$

όπου

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x). \quad (29)$$

Η έκφραση (29) λέγεται **ορίζουσα Wronski**.

Επομένως, η ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)r(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)} dx, \quad (30)$$

και άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) - y_1(x) \int \frac{y_2(x)r(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)} dx. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 1.** Να λυθεί η εξίσωση  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ , για  $x > 0$ .

Η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων.

Καταρχήν, θα βρούμε τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 0$ . Άρα η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα  $\lambda = -(-2)/2 = 1$ . Τότε υπάρχουν δύο ανεξάρτητες λύσεις της μορφής

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = xe^x,$$

και η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Για να υπολογίσουμε την ειδική λύση, πρέπει καταρχήν να υπολογίσουμε την ορίζουσα Wronski που δίνεται από τον τύπο (29). Έχουμε

$$y_1'(x) = (e^x)' = e^x, \quad y_2'(x) = (xe^x)' = (1+x)e^x,$$

επομένως

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{vmatrix} = (1+x)e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}.$$

Τώρα, η ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης δίνεται από τον τύπο (30), συνεπώς

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -y_1(x) \int \frac{y_2(x)r(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)} dx \\ &= -e^x \int \frac{xe^x \frac{e^x}{x}}{e^{2x}} dx + xe^x \int \frac{e^x \frac{e^x}{x}}{e^{2x}} dx \\ &= -e^x \int 1 dx + xe^x \int \frac{1}{x} dx \\ &\stackrel{x>0}{=} -xe^x + xe^x \ln x. \end{aligned}$$

(Στον υπολογισμό των προηγούμενων ολοκληρωμάτων δεν χρειάστηκε να βάλουμε σταθερές ολοκλήρωσης γιατί αναζητούμε μια ειδική λύση.)

Τέλος, για τη γενική λύση της μη ομογενούς έχουμε

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x - xe^x + xe^x \ln x.$$

□

**Παράδειγμα 2.** Να λυθεί η εξίσωση  $y'' + 9y = \frac{3}{\cos(3x)}$ .

Η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων.

Τώρα η ομογενής εξίσωση είναι

$$y'' + 9y = 0,$$

και έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις της μορφής

$$y_1(x) = \cos(3x), \quad y_2(x) = \sin(3x).$$

Η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_h(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Για να υπολογίσουμε την ειδική λύση, πρέπει και πάλι να υπολογίσουμε την ορίζουσα Wronski που δίνεται από τον τύπο (29). Έχουμε

$$y_1'(x) = -3 \sin(3x), \quad y_2'(x) = 3 \cos(3x),$$



επομένως

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = 3(\cos^2(3x) + \sin^2(3x)) = 3 \cdot 1 = 3.$$

Τώρα, η ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης δίνεται από τον τύπο (30), συνεπώς

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -y_1(x) \int \frac{y_2(x)r(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)} dx \\ &= -\cos(3x) \int \frac{\sin(3x)\frac{3}{\cos(3x)}}{3} dx + \sin(3x) \int \frac{\cos(3x)\frac{3}{\cos(3x)}}{3} dx \\ &= -\cos(3x) \int \tan(3x) dx + \sin(3x) \int 1 dx \\ &= \frac{1}{3} \cos(3x) \ln(\cos(3x)) + x \sin(3x). \end{aligned}$$

Τέλος, για τη γενική λύση της μη ομογενούς έχουμε

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{1}{3} \cos(3x) \ln(\cos(3x)) + x \sin(3x). \end{aligned}$$

□

## Ασκήσεις

1. Λύστε τις ακόλουθες ομογενείς γραμμικές ΣΔΕ δεύτερης τάξης:

(i)  $y'' + 5y' + 6y = 0.$

(ii)  $y'' + y = 0.$

(iii)  $y'' + 2y' + 5y = 0.$

(iv)  $y'' - 6y' + 9y = 0.$

2. Λύστε τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών (ΠΑΤ):

(i)  $y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

(ii)  $y'' + 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 9.$

(iii)  $y'' - 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

(iv)  $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

3. Λύστε τις ακόλουθες μη ομογενείς γραμμικές ΣΔΕ δεύτερης τάξης:

(i)  $y'' + 2y' + 3y = xe^{-x}$ .

(ii)  $y'' + 5y' + 6y = 2x$ .

(iii)  $y'' + 3y' + 2y = 10 \cos 2x$ .

(iv)  $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} \sin x$ .

4. Λύστε τις ακόλουθες μη ομογενείς γραμμικές ΣΔΕ δεύτερης τάξης:

(i)  $y'' + 5y' - 6y = e^{-2x} + 2 - x$ .

(ii)  $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} + 2 \sin x$ .

(iii)  $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$ .

(iv)  $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$ .

(v)  $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{3x}$ .

**Σημείωση:** Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.

## Βιβλιογραφία

- J. D. Logan, A First Course in Differential Equations.
- Θ. Μήτσης, Μαθηματικά II για το Τμήμα Χημείας, Σημειώσεις Παραδόσεων, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.
- Α. Μπράτσος, Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.
- J. Stewart, Calculus: Concepts and Contexts.