

Μιγαδικοί Αριθμοί

Δ.Α. Μητσούδης

Μιγαδικοί αριθμοί

Έχει η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ λύση;



Σε ποιά σύνολο αναζητούμε λύσεις;

Φυσικά στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση αυτή **ΔΕΝ** έχει λύσεις γιατί ...



$$i^2 = -1$$

Τότε η $x^2 + 1 = 0$ έχει λύσεις $x = \pm i$ 😊



Ορισμός

Ένας μιγαδικός αριθμός είναι ένας αριθμός της μορφής $a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, και το i είναι η λεγόμενη **φανταστική μονάδα**, δηλαδή ο αριθμός που ικανοποιεί $i^2 = -1$. Το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται $\mathbb{C}$.

Μιας και $i^2 = -1$, μπορούμε να σκεφτόμαστε το i ως την $\sqrt{-1}$.

Φυσικά, και $(-i)^2 = i^2 = -1$.

Θα λέμε ότι το i είναι η **πρωτεύουσα τετραγωνική ρίζα** του -1 και θα γράφουμε

$$\sqrt{-1} = i$$

Γενικότερα, αν $c > 0$ θα γράφουμε

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}i.$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σύμβαση ο τύπος για την εύρεση των ριζών της εξίσωσης δευτέρου βαθμού $ax^2 + bx + c = 0$ εξακολουθεί να ισχύει ακόμη και όταν η διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Παράδειγμα. Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - x + 1 = 0$$

Λύση: Η διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Έστω $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

- **Πραγματικό μέρος** (real part) του z , $\text{Re}(z) = a$
- **Φανταστικό μέρος** (imaginary part) του z , $\text{Im}(z) = b$

Έστω $z = a + bi$, $w = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- $z = w \Leftrightarrow a = c$ και $b = d$
- Πρόσθεση - αφαίρεση: $z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$.
- Πολλαπλασιασμός: $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- Αν $z \neq 0$, τότε ο αντίστροφος του z συμβολίζεται με z^{-1} ή $\frac{1}{z}$ και ορίζεται ως

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Φυσικά, $zz^{-1} = 1$.

- Διαίρεση: $\frac{w}{z} = wz^{-1}$.

Ορισμός

Έστω $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Λέμε **μέτρο του z** την ποσότητα

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Επίσης, ονομάζουμε **συζυγή του z** τον μιγαδικό αριθμό

$$\bar{z} = x - yi.$$

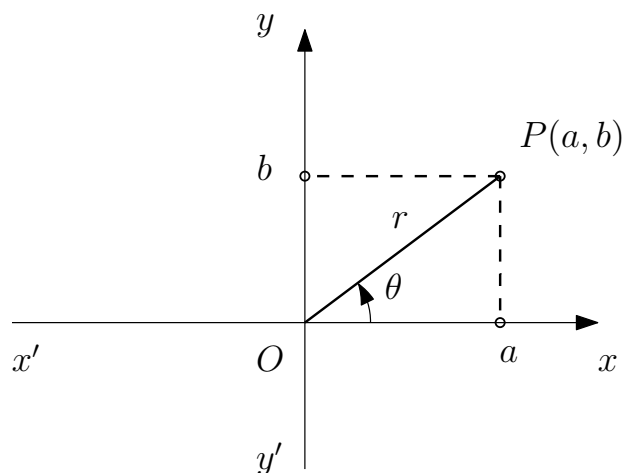
Έστω $z, w \in \mathbb{C}$. Τότε:

- 1 $\bar{\bar{z}} = z$ και $|\bar{z}| = |z|$.
- 2 $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- 3 $|z|^2 = z \bar{z}$.
- 4 $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- 5 $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ και $\overline{z w} = \bar{z} \bar{w}$.
- 6 $|z w| = |z| |w|$.
- 7 $|z + w| \leq |z| + |w|$. (Τριγωνική ανισότητα)

Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών αριθμών

Θεωρούμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο O , $x'x$ τον άξονα των τετμημένων και $y'y$ τον άξονα των τεταγμένων.

$$0 \neq z = a + bi \mapsto P(a, b)$$



$\mathbb{C}$: μιγαδικό επίπεδο

- Κάθε πραγματικός αριθμός x ($x + i0 \in \mathbb{C}$) αντιστοιχεί σε ένα σημείο του άξονα των x : **πραγματικός άξονας**
- Κάθε φανταστικός αριθμός iy ($0 + iy \in \mathbb{C}$) αντιστοιχεί σε ένα σημείο του άξονα των y : **φανταστικός άξονας**

Έστω r η απόσταση του σημείου P από την αρχή των αξόνων.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Άρα το μέτρο $|z|$ του μιγαδικού αριθμού z είναι η απόστασή του από την αρχή των αξόνων.

Πολική μορφή

Έστω μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$. Τότε μπορούμε πάντα να εκφράσουμε τον z στη λεγόμενη **πολική μορφή**:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι

$$z = |z| \cos \theta + i |z| \sin \theta = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} |z| \cos \theta = a \\ |z| \sin \theta = b \end{cases}$$

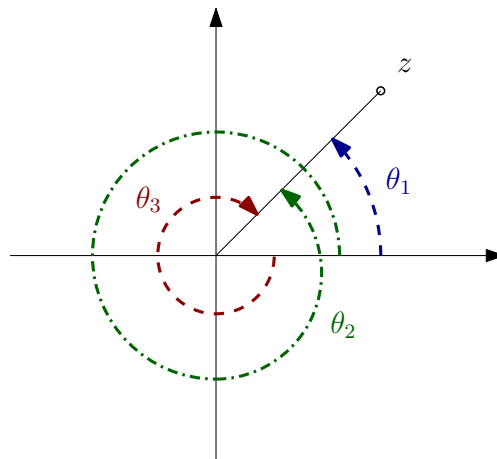
Άρα αρκεί να βρούμε $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}.$$

Κάθε πραγματικός αριθμός θ που ικανοποιεί την (1) λέγεται **όρισμα** (ή πολική γωνία) του z .

Πολική μορφή

Γεωμετρικά, το θ είναι η γωνία (σε ακτίνια) που σχηματίζει ο ημιάξονας Ox με την ημιευθεία OP στο μιγαδικό επίπεδο.



$\theta_1, \theta_2 : +$, ενώ το $\theta_3 : -$

Θα συμβολίζουμε με **arg z** το σύνολο όλων των ορισμάτων του z .

Στη μιγαδική ανάλυση έχει επικρατήσει να γράφουμε $\theta = \arg z$ (αντί για $\theta \in \arg z$) για να δηλώσουμε ότι το θ είναι ένα όρισμα του z .

Προφανώς, δύο οποιεσδήποτε τιμές του ορίσματος θα διαφέρουν μεταξύ τους κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π . Άρα αν θ_1, θ_2 είναι δύο ορίσματα του z , τότε

$$\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi,$$

για κάποιο ακέραιο k .

Π.χ., $\arg(-1) = \{(2k + 1)\pi : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Σε κάποιες περιπτώσεις χρειάζεται να καθορίσουμε κάποια μοναδική τιμή του ορίσματος.

Ορίζουμε ως **πρωτεύον** όρισμα του z , και συμβολίζουμε με **Argz**, το μοναδικό όρισμα θ του z που βρίσκεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Π.χ., αν z είναι ένας αρνητικός πραγματικός αριθμός, τότε $\text{Arg}z = \pi$, και

$$\text{Arg}i = \pi/2, \quad \text{Arg}2 = 0, \quad \text{Arg}(1 - i) = -\pi/4.$$

Παρατήρηση

Προσοχή! Ο συμβολισμός που ακολουθούμε μας επιτρέπει να γράψουμε ότι

$$\arg(-1) = -\pi,$$

μιας και το $-\pi$ είναι σίγουρα ένα όρισμα του -1 ,

αλλά

δεν μας επιτρέπει να γράψουμε ότι

$$\operatorname{Arg}(-1) = -\pi,$$

αφού το $-\pi$ **δεν** είναι όρισμα του -1 στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Παράδειγμα

Γράψτε τους αριθμούς: (α) $z = -1 + i$ και (β) $w = \sqrt{3} + i$ σε πολική μορφή.

Λύση: (α) Έχουμε ότι

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$
$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα το z **ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο**, και επομένως μπορούμε να πάρουμε $\theta = 3\pi/4$.
Άρα η πολική μορφή του z είναι

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

(β) Τώρα έχουμε $|w| = \sqrt{3 + 1} = 2$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sin \theta = \frac{1}{2}$.

Άρα το w **ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο**, και μπορούμε να πάρουμε $\theta = \pi/6$. Άρα

$$w = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Εκθετική μορφή

Αν $t \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (2)$$

Η (2) είναι γνωστή ως **τύπος του Euler**.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler η πολική μορφή (1) ενός μιγαδικού αριθμού z μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη εκθετική μορφή

$$z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \text{ όπου } r = |z| \text{ και } \theta = \arg z. \quad (3)$$

Παρατηρήσεις

- Επειδή $\theta = \arg z$, υπάρχουν άπειρες δυνατότητες αναπαράστασης ενός μιγαδικού σε εκθετική μορφή.

Επειδή δύο οποιεσδήποτε τιμές του ορίσματος διαφέρουν μεταξύ τους κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π , μπορούμε να γράψουμε την εκθετική μορφή και ως

$$z = re^{i(\theta+2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Παρατηρήστε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε την εξίσωση

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

ως μια παραμετρική αναπαράσταση ενός κύκλου με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα r , επομένως και η

$$z = re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

είναι μια άλλη αναπαράσταση κύκλου με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα r .

Ιδιότητες

Μέσω της εκθετικής μορφής και με χρήση απλών ιδιοτήτων των εκθετικών* μπορούμε να εξαγάγουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες για τους μιγαδικούς αριθμούς και τα ορίσματά τους.

Έστω $z = re^{i\theta}$ ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός.

Για να βρούμε τον αντίστροφό του εργαζόμαστε ως εξής:

$$z^{-1} = (re^{i\theta})^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)},$$

και άρα η πολική μορφή του αντιστρόφου του z είναι

$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

*Εδώ αναφερόμαστε σε εκθετικά με εκθέτη φανταστικό. Θα δεχτούμε προς στιγμήν ότι οι γνωστές μας ιδιότητες από τους πραγματικούς αριθμούς εξακολουθούν να ισχύουν, και θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό αργότερα.

Αν $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ και $z_2 = r_2e^{i\theta_2} \neq 0$,

όπου θ_1 είναι οποιαδήποτε τιμή του $\arg z_1$ και θ_2 είναι οποιαδήποτε τιμή του $\arg z_2$, τότε

$$z_1 z_2 = (r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

και

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Οι αντίστοιχοι τύποι σε πολική μορφή είναι:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)], \quad (4)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (5)$$

Παρατηρήσεις

- Άρα, γεωμετρικά, το **γινόμενο των μιγαδικών αριθμών** z_1 και z_2 , είναι ένας μιγαδικός που έχει ως μέτρο το γινόμενο των μέτρων $|z_1||z_2|$ και ως ένα όρισμα το άθροισμα των ορισμάτων $\theta_1 + \theta_2$.
- Ανάλογα το **πηλίκο των μιγαδικών αριθμών** z_1 και z_2 , είναι ένας μιγαδικός που έχει ως μέτρο το πηλίκο $|z_1|/|z_2|$ και ως ένα όρισμα τη διαφορά των ορισμάτων $\theta_1 - \theta_2$.
- Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν και οι αντίστοιχες για τα ορίσματα

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad (6)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2. \quad (7)$$

Το νόημα των (6)-(7) είναι το ακόλουθο: Αν γνωρίζουμε τις τιμές των δύο από τα τρία αυτά ορίσματα, τότε υπάρχει μια τιμή του τρίτου ορίσματος που επαληθεύει τις εξισώσεις αυτές.

- **Προσοχή!** Οι (6)-(7) δεν ισχύουν εν γένει αν αντικαταστήσετε τα ορίσματα με τις πρωτεύουσες τιμές τους.

Παράδειγμα

Έστω $z_1 = i$ και $z_2 = -1$. Τότε $z_1 z_2 = -i$, και τα αντίστοιχα πρωτεύοντα ορίσματα είναι:

$$\operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arg}(-1) = \pi, \quad \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Όμως

$$\operatorname{Arg}(i) + \operatorname{Arg}(-1) = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} = \operatorname{Arg}(-i).$$

Φυσικά, αν θεωρήσουμε ως

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(-1) = \pi,$$

τότε έχουμε ότι

$$\arg(i) + \arg(-1) = \frac{3\pi}{2}$$

και το $3\pi/2$ είναι ένα όρισμα του $-i$, απλώς **δεν είναι το πρωτεύον όρισμα**.

Παράδειγμα

Έστω $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ και $z_2 = \sqrt{3} - i$.

Σε πολική μορφή

$$\begin{aligned}z_1 &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \\z_2 &= 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right).\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= 2^2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\&= 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3} + 2i.\end{aligned}$$

Δυνάμεις και ρίζες μιγαδικών αριθμών

Ένα σχεδόν άμεσο αποτέλεσμα των (4), (5), (αποδεικνύεται με μια απλή επαγωγική διαδικασία) είναι η σχέση

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \quad (8)$$

που ισχύει για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ και κάθε ακέραιο n .

Η (8) λέγεται τύπος του de Moivre και μας βοηθάει να υπολογίζουμε τις n -οστές δυνάμεις μιγαδικών αριθμών.

Πρόταση (Τύπος de Moivre)

Αν $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ και n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Παράδειγμα

Βρείτε τον αριθμό $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

Λύση: Προφανώς $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(-1 + i)$, και η πολική μορφή του είναι

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Άρα

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} \left(\cos \frac{30\pi}{4} + i \sin \frac{30\pi}{4} \right) \\ &= \frac{2^5}{2^{10}} \left(\cos \frac{15\pi}{2} + i \sin \frac{15\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2^5} \left(\cos \left(6\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + i \sin \left(6\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{32} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) = -\frac{1}{32}i. \end{aligned}$$

n -οστές ρίζες μιγαδικών αριθμών

Μια n -οστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού z είναι ένας μιγαδικός αριθμός w :

$$w^n = z.$$

Θεώρημα

Έστω z ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός και $n \in \mathbb{N}$. Τότε ο z έχει ακριβώς n διακριτές n -οστές ρίζες που δίνονται από τον τύπο

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad (9)$$

όπου $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Γεωμετρική σημασία: Οι n -οστές ρίζες του z βρίσκονται όλες πάνω σε έναν κύκλο ακτίνας $\sqrt[n]{|z|}$ με κέντρο την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου, και ισαπέχουν μεταξύ τους.

Απόδειξη:

Γράφουμε τον z σε πολική μορφή με $\theta = \text{Arg}z$. Δηλαδή $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Αναζητούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς $w = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ για τους οποίους ισχύει $w^n = z$.

Από τον τύπο του de Moivre, (8), έχουμε ότι $w^n = |w|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$.

Άρα η $w^n = z$ γράφεται, ισοδύναμα, ως

$$\begin{aligned} |w|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) &= |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \\ \Leftrightarrow |w|^n &= |z|, \quad \cos(n\varphi) = \cos \theta, \quad \sin(n\varphi) = \sin \theta \\ \Leftrightarrow |w| &= \sqrt[n]{|z|} \quad \text{και} \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \Leftrightarrow |w| &= \sqrt[n]{|z|} \quad \text{και} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Η επιλογή $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ μας οδηγεί στο να πάρουμε n διακριτές n -οστές ρίζες. Οποιαδήποτε άλλη τιμή του k θα μας ξαναδώσει κάποια από τις προηγούμενες ρίζες. $\square$

Παράδειγμα

Βρείτε τις πέντε 5-ες ρίζες του μιγαδικού $z = -4 + 4i$ και σχεδιάστε τις στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύση: Η πολική μορφή του z είναι

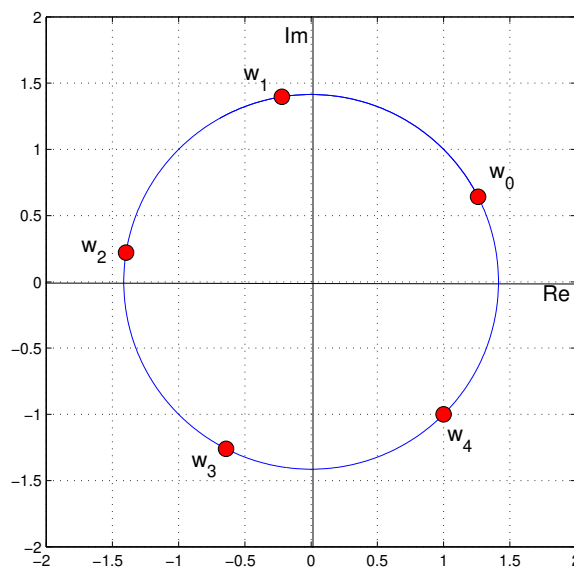
$$z = \sqrt{32} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2^{5/2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο (9) με $n = 5$ και έχουμε

$$w_k = 2^{5/10} \left(\cos \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{5} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{5} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{8k\pi + 3\pi}{20} + i \sin \frac{8k\pi + 3\pi}{20} \right).$$

Για να υπολογίσουμε τις πέντε ρίζες παίρνουμε $k = 0, 1, 2, 3, 4$, και έχουμε

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{20} + i \sin \frac{3\pi}{20} \right), & w_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{20} + i \sin \frac{11\pi}{20} \right), \\ w_2 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{20} + i \sin \frac{19\pi}{20} \right), & w_3 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{27\pi}{20} + i \sin \frac{27\pi}{20} \right), \\ w_4 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{35\pi}{20} + i \sin \frac{35\pi}{20} \right). \end{aligned}$$



Όλες οι ρίζες ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{2}$.

Παρατήρηση

Η n -οστή ρίζα του z που παίρνουμε για $k = 0$ ονομάζεται **πρωτεύουσα n -οστή ρίζα του z** .

Το σύμβολο $\sqrt[n]{z}$ χρησιμοποιείται ακριβώς για να παραστήσει αυτήν τη συγκεκριμένη n -οστή ρίζα του z .

Άρα όταν γράφουμε $\sqrt[n]{z}$, εννοούμε την πρωτεύουσα n -οστή ρίζα του z , δηλαδή

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\text{Arg}z}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\text{Arg}z}{n}\right) \right]. \quad (10)$$

Επιπλέον, αν και ο παραπάνω τύπος δεν καλύπτει την περίπτωση $z = 0$, αφού δεν ορίζεται το $\text{Arg}0$, είναι προφανές ότι η n -οστή ρίζα του 0 είναι το μηδέν. Για το λόγο αυτό στον παραπάνω ορισμό συμπεριλαμβάνουμε ότι $\sqrt[n]{0} = 0$.

Εκθετικά μιγαδικών αριθμών

Ο τύπος του Euler $e^{it} = \cos t + i \sin t$, για $t \in \mathbb{R}$, μας επιτρέπει να ορίσουμε το εκθετικό ενός φανταστικού αριθμού.

Δεδομένου ότι στους πραγματικούς ισχύει η ισότητα $e^{s+t} = e^s e^t$, είναι φυσιολογικό να ορίσουμε για έναν μιγαδικό $z = x + iy$, το e^z ως

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (11)$$

Με βάση τον ορισμό (11) μπορούμε, π.χ., να υπολογίσουμε ότι

$$e^0 = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^i = \cos 1 + i \sin 1, \quad e^{1+\pi i} = -e.$$

Επίσης, από την (11), συμπεραίνουμε άμεσα ότι $e^z \neq 0$ για κάθε μιγαδικό $z = x + iy$, καθώς και ότι

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} = e^x, \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im}(z) = y.$$

Επιπλέον, από τον τύπο του de Moivre έχουμε ότι $(e^z)^n = e^{nz}$ για κάθε ακέραιο n , και δεν είναι δύσκολο κανείς να βεβαιωθεί ότι:

$$e^z e^w = e^{z+w}.$$

Ερώτημα: Για ποιές τιμές του z ισχύει ότι $e^z = 1$;

Προφανώς, ισχύει για $z = 0$, αλλά και για πολλούς άλλους αριθμούς!

Για να έχουμε $e^z = 1$ θα πρέπει φυσικά και $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$.

Άρα $e^z = 1$ μπορεί να ισχύει μόνο για **καθαρά φανταστικούς αριθμούς** της μορφής $z = iy$, ($y \in \mathbb{R}$).

Όμως $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, επομένως

$$e^{iy} = 1 \Leftrightarrow \cos y = 1 \text{ και } \sin y = 0 \Leftrightarrow y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Συνεπώς

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Επιπλέον,

$$e^z = e^w \Leftrightarrow e^{z-w} = 1 \Leftrightarrow z = w + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

Λογάριθμοι μιγαδικών αριθμών

Γνωρίζουμε ότι στους πραγματικούς αριθμούς ισχύει:

$$s = \ln t, \quad \text{για } t > 0 \Leftrightarrow e^s = t.$$

Θα μιμηθούμε την ιδέα αυτή για να ορίσουμε τον λογάριθμο ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού.

Η ανάλογη απαίτηση είναι ότι **ο w θα είναι ο λογάριθμος ενός $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, αν $e^w = z$.**

Η ουσιαστική διαφορά όμως είναι ότι, αν και στην περίπτωση των πραγματικών για δοσμένο $t > 0$ υπάρχει μοναδικό $s \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $e^s = t$, στην περίπτωση των μιγαδικών η αντίστοιχη σχέση $e^w = z$ ικανοποιείται για άπειρες μιγαδικές τιμές του w .

Π.χ., πριν είδαμε ότι η $e^w = 1$ ικανοποιείται για άπειρα $w = 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ **Αρα καθεμία από αυτές τις τιμές του w είναι ένας μιγαδικός λογάριθμος του 1!**

Θα ξεχωρίσουμε μια από τις άπειρες τιμές του λογαρίθμου ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού και αυτή θα είναι η

$$w = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Από τις ιδιότητες που έχουμε δει μέχρι στιγμής ισχύει ότι

$$e^w = e^{\ln |z| + i \operatorname{Arg} z} = e^{\ln |z|} e^{i \operatorname{Arg}(z)} = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = z.$$

Αρα το συγκεκριμένο w είναι ένας λογάριθμος του z , που ονομάζεται **πρωτεύον λογάριθμος** του z (ή **πρωτεύουσα τιμή του λογαρίθμου** του z) και συμβολίζεται με **Log z** .

Θα συμβολίζουμε με $\log z$ το σύνολο όλων των λογαρίθμων του z .

Επομένως, ορίζουμε ως **πρωτεύοντα λογάριθμο** του z τον

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z. \quad (13)$$

Ο ορισμός (13) μας εξασφαλίζει ότι $\operatorname{Log} x = \ln x$ για $x \in \mathbb{R}, x > 0$.

Π.χ., με τη βοήθεια της (13) είναι άμεσο να υπολογίσουμε ότι

$$\operatorname{Log}(-1) = \pi i, \quad \operatorname{Log}(ei) = 1 + \frac{\pi}{2}i, \quad \operatorname{Log}(1-i) = \ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i.$$

Αν w είναι οποιοσδήποτε λογάριθμος του z που ικανοποιεί $e^w = z = e^{\operatorname{Log} z}$, τότε, από την (12), προκύπτει ότι

$$w = \operatorname{Log} z + 2k\pi i = \operatorname{Log} |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Άρα κάθε μιγαδικός αριθμός αυτής της μορφής είναι ένας λογάριθμος του z .

Αν w_1 είναι ένας λογάριθμος του z_1 , και w_2 είναι ένας λογάριθμος του z_2 , τότε

$$e^{w_1+w_2} = e^{w_1} e^{w_2} = z_1 z_2,$$

επομένως ο $w_1 + w_2$ είναι ένας λογάριθμος του $z_1 z_2$. Άρα μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2),$$

υπό την ακόλουθη έννοια: Το σύνολο των λογαρίθμων του $z_1 z_2$ αποτελείται απ' όλα τα αθροίσματα των λογαρίθμων του z_1 με τους λογάριθμους του z_2 .

Προσοχή! Δεν ισχύει εν γένει ότι $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$.

Π.χ., $\operatorname{Log}(-i) = -\frac{\pi}{2}i$ αλλά $\operatorname{Log}(-1) + \operatorname{Log}(i) = \pi i + \frac{\pi}{2}i = \frac{3\pi}{2}i$.

Βεβαίως ο $\operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$ είναι ένας λογάριθμος του $z_1 z_2$ απλώς δεν είναι ο πρωτεύον λογάριθμος.

Ύψωση μιγαδικών αριθμών σε μιγαδικούς εκθέτες

Έχουμε ήδη δει ότι ένας καθιερωμένος τρόπος για να ορίσουμε τον t^a , όταν $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ και $a \in \mathbb{R}$, είναι μέσω του τύπου:

$$t^a = e^{a \ln t}.$$

Θέλουμε να εφαρμόσουμε τον ανάλογο τύπο στη μιγαδική περίπτωση ώστε να ορίσουμε την ύψωση ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού z σε έναν **μιγαδικό** εκθέτη λ .

Το προφανές εμπόδιο είναι ότι ο z έχει πολλούς διαφορετικούς λογαρίθμους. Ποιόν απ' όλους θα χρησιμοποιήσουμε; Η απάντηση είναι ότι θα τους χρησιμοποιήσουμε όλους.

Όπως έχουμε μέχρι τώρα αποδεχθεί το γεγονός ότι ο z έχει ένα άπειρο πλήθος λογαρίθμων, θα συμβιβαστούμε και με το γεγονός ότι θα υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί – όχι πάντα άπειροι – τρόποι για να υψώσουμε τον z στην λ .

Ακριβέστερα, για κάθε λογάριθμο w του z ο μιγαδικός αριθμός $e^{\lambda w}$ λέγεται λ -δύναμη του z που αντιστοιχεί στον w .

Η επιλογή $w = \operatorname{Log} z$ ορίζει τη λεγόμενη **πρωτεύουσα** λ -δύναμη του z .

Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό z^λ για αυτή τη συγκεκριμένη επιλογή.

Δηλαδή, **η πρωτεύουσα λ -δύναμη του z είναι**

$$z^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Log} z}.$$

$$\begin{aligned} i^{2\pi} &= e^{2\pi \operatorname{Log} i} = e^{2\pi \cdot \frac{\pi}{2} i} = e^{\pi^2 i} = \cos(\pi^2) + i \sin(\pi^2), \\ i^{2\pi i} &= e^{2\pi i \operatorname{Log} i} = e^{2\pi i \cdot \frac{\pi}{2} i} = e^{-\pi^2}. \end{aligned}$$

Επειδή ένας οποιοσδήποτε λογάριθμος του z είναι της μορφής:

$$\operatorname{Log} z + 2k\pi i, \quad \text{για κατάλληλο } k \in \mathbb{Z},$$

προκύπτει άμεσα ότι η γενική λ -δύναμη του z θα είναι της μορφής:

$$e^{2k\pi\lambda i} z^\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Υπάρχουν δύο ειδικές περιπτώσεις που αξίζουν την προσοχή μας.

α) Αν ο λ είναι ακέραιος, έστω $\lambda = n \in \mathbb{Z}$, τότε για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{Z}$, βλέπουμε εύκολα ότι $e^{2k\pi\lambda i} = 1$, άρα σε αυτή την περίπτωση η γενική λ -δύναμη του z είναι απλώς η συνήθης z^n .

β) Αν $\lambda = 1/n$, για κάποιο θετικό ακέραιο n , τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{2k\pi\lambda i} z^\lambda &= \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) \exp\left(\frac{\operatorname{Log} z}{n}\right) \\ &= \exp\left(\frac{2k\pi i}{n} + \frac{\operatorname{Log}|z| + i \operatorname{Arg} z}{n}\right) \\ &= \exp\left[\frac{\operatorname{Log}|z|}{n} + i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= \exp\left(\operatorname{Log} \sqrt[n]{|z|}\right) \exp\left[i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι το σύνολο των λ -δυνάμεων του z , για $\lambda = 1/n$, συμπίπτει με το σύνολο των n -οστών ριζών του z . Ειδικότερα, $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$.

Παρατήρηση

Σημειώστε ότι αν και ισχύει ότι $z^{\lambda+\mu} = z^\lambda z^\mu$, άλλες ιδιότητες των δυνάμεων δεν ισχύουν πάντα για πρωτεύουσες δυνάμεις.

Για παράδειγμα, το $(zw)^\lambda$ δεν είναι εν γένει ίσο με το $z^\lambda w^\lambda$. Π.χ.,

$$(-i)^{1/2} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{ενώ} \quad (-1)^{1/2} i^{1/2} = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}.$$

Ανάλογα, το $(z^\lambda)^\mu$ μπορεί να είναι διαφορετικό από το $z^{\lambda\mu}$.

Άρα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί με αλγεβρικές πράξεις στις οποίες εμφανίζονται μιγαδικοί εκθέτες.

- Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα: $|z + w| \leq |z| + |w|$.
- Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο D των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τη συνθήκη $|z - 2| = 2|z + 1|$.
- Βρείτε μια «μιγαδική» εξίσωση για την υπερβολή με «πραγματική» εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$.
- Λύστε τη δευτεροβάθμια εξίσωση: $2z^2 - (2 + 5i)z - 2 + i = 0$.

