

Σειρές

Δ.Α. Μητσούδης

Σειρές

Έστω (a_n) μια οποιαδήποτε ακολουθία πραγματικών αριθμών. Το σύμβολο

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

ονομάζεται **σειρά** της (a_n) ή, απλούστερα, **σειρά των a_n** .

Το a_n ονομάζεται **n -οστός όρος** της σειράς.

Η ακολουθία (s_n) που ορίζεται από τις

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

είναι η **ακολουθία μερικών αθροισμάτων** της σειράς, και ο αριθμός s_n ονομάζεται **n -οστό μερικό άθροισμα** της σειράς των a_n .

Σειρές

Αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε έναν L ,

$$\text{δηλ. } s_n \rightarrow L,$$

τότε λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει**, ονομάζουμε το L **άθροισμα** της σειράς, και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L.$$

Αν η (s_n) δεν συγκλίνει, τότε λέμε ότι η σειρά αποκλίνει.

Ειδικότερα, αν η (s_n) αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τότε λέμε ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντίστοιχα, ονομάζουμε το $+\infty$ ή το $-\infty$ άθροισμα της σειράς και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty.$$

Παράδειγμα

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ αποκλίνει στο $+\infty$ αφού

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-\text{όροι}} = n \rightarrow +\infty.$$

Άρα, το άθροισμα της σειράς είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Γεωμετρικές σειρές

Μια σειρά της μορφής

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1},$$

όπου a, r σταθεροί πραγματικοί αριθμοί με $a \neq 0$, λέγεται **γεωμετρική σειρά με λόγο r** .

Κάθε όρος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τον προηγούμενο επί r .

Τη σειρά αυτή μπορούμε να τη γράψουμε και ως

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n.$$

Περιπτώσεις για το λόγο r

- Αν $r = 1$, τότε

$$s_n = a + a \cdot 1 + a \cdot 1^2 + \cdots + a \cdot 1^{n-1} = na,$$

και η σειρά αποκλίνει στο $\pm\infty$ ανάλογα με το πρόσημο του a .

Για $r \neq 1$, έχουμε:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a(1 + r + \cdots + r^{n-1}) = a \frac{1 - r^n}{1 - r}. \quad (1)$$

- Άρα, αν $r > 1$, τότε $s_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r} \rightarrow a \frac{1 - \infty}{1 - r} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$
- Αν $|r| < 1$, τότε $r^n \rightarrow 0$, οπότε $s_n \rightarrow \frac{a}{1 - r}$.
- Αν $r \leq -1$, τότε από την (1) συμπεραίνουμε ότι

$$1 - r^n = s_n \frac{1 - r}{a} \Rightarrow r^n = 1 - s_n \frac{1 - r}{a}.$$

Άρα αν υπάρχει το όριο της (s_n) , τότε θα υπάρχει και το όριο της (r^n) .

Όμως η (r^n) , με $r \leq -1$, δεν συγκλίνει, άρα ούτε και το όριο της (s_n) υπάρχει.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} = +\infty & \text{αν } r \geq 1 \text{ και } a > 0 \\ = -\infty & \text{αν } r \geq 1 \text{ και } a < 0 \\ = \frac{a}{1-r} & \text{αν } |r| < 1 \\ \text{δεν υπάρχει} & \text{αν } r \leq -1 \end{cases}$$

Παράδειγμα

Η γεωμετρική σειρά με $a = 5$ και $r = -\frac{2}{3}$ ισούται με

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-1} = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3} \right)} = \frac{5}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Παράδειγμα

Εκφράστε τον περιοδικό δεκαδικό $5.232323 \dots$ ως ρητό.

Απόδειξη. Από τον ορισμό των δεκαδικών αριθμών, έχουμε:

$$\begin{aligned} 5.232323 \dots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \frac{23}{100^4} + \dots \\ &= 5 + \frac{23}{100} \left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \dots \right] \\ &\quad \text{γεωμ. σειρά με } a=1, r=1/100 \\ &= 5 + \frac{23}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 5 + \frac{23}{100} \cdot \frac{100}{99} \\ &= 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}. \end{aligned}$$

Άσκηση: Δείξτε ότι $0.99999 \dots = 1$.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το άθροισμα της «τηλεσκοπικής» σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Απόδειξη. Αναλύουμε τον γενικό όρο σε απλά κλάσματα: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Αρα, το μερικό άθροισμα s_n γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 - 0 = 1 \quad \text{καθώς } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Αρα η σειρά συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Πρόταση

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n \rightarrow 0$.

Απόδειξη. Σχηματίζουμε τα μερικά αθροίσματα

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, και το άθροισμά της είναι ο αριθμός L , τότε $s_n \rightarrow L$.

Όμως ισχύει ότι:

$$a_n = s_n - s_{n-1} \quad \text{για κάθε } n \geq 2.$$

Άρα $a_n \rightarrow L - L = 0$. □

Παρατηρήσεις:

- ❶ Το αντίστροφο δεν ισχύει. Θα δώσουμε αντιπαράδειγμα παρακάτω.
- ❷ Η πρόταση αυτή μας οδηγεί στο ακόλουθο **κριτήριο για την απόκλιση μιας σειράς**:
Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **αποκλίνει** αν το $\lim_n a_n$ είτε δεν υπάρχει ή είναι $\neq 0$.

Παράδειγμα

- Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ αποκλίνει διότι $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$.
- Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ αποκλίνει διότι το $\lim_n (-1)^{n+1}$ δεν υπάρχει.
- Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ αποκλίνει διότι $n^2 \rightarrow +\infty$.

Πρόταση

Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και έστω ότι $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Τότε $r_n \rightarrow 0$.

Το r_n ονομάζεται «ουρά» της σειράς.

Άρα η πρόταση αυτή μας λέει ότι αν μία σειρά συγκλίνει, τότε η ουρά της τείνει στο 0.

Απόδειξη. Θεωρούμε το μερικό άθροισμα $s_n = a_1 + \dots + a_n$, και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στον L . Τότε, προφανώς, $s_n \rightarrow L$. Επίσης,

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + \dots + a_{n-1}}_{=s_{n-1}} + \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}_{=r_n} = s_{n-1} + r_n.$$

Άρα, $r_n = L - s_{n-1} \rightarrow L - L = 0$. □

Πρόταση

Αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ έχουν άθροισμα και αν το άθροισμα των δύο αθροισμάτων δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ έχει άθροισμα και

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Επίσης, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει άθροισμα, αν το λ είναι αριθμός και αν το γινόμενο του αριθμού και του αθροίσματος της σειράς δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ έχει άθροισμα και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Μπορούμε να συνδυάσουμε τα δύο αυτά αποτελέσματα ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Πρόταση

Αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ έχουν άθροισμα και αν ισχύει $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq 1$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Θεώρημα

Έστω $a_n \geq 0$ για κάθε n . Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει άθροισμα και αυτό είναι είτε $+\infty$ είτε μη αρνητικός αριθμός. Δηλαδή

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq +\infty.$$

Ειδικότερα, αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά συγκλίνει, ενώ αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Απόδειξη. Επειδή $a_n \geq 0$ για κάθε n , έχουμε ότι

$$s_{n+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=s_n} + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \quad \text{για κάθε } n.$$

Αρα η $(s_n) \nearrow \Rightarrow$ έχει όριο το οποίο είναι είτε $+\infty$ είτε αριθμός.

Επειδή $s_n = a_1 + \cdots + a_n \geq 0$ για κάθε n , $\Rightarrow \lim_n s_n \geq 0$.

Τώρα, αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη τότε το $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_n s_n$ είναι αριθμός,

ενώ αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε το $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_n s_n = +\infty$. $\square$

Παράδειγμα: Αρμονική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Ο n -οστός όρος είναι $1/n \rightarrow 0$.

Όμως η σειρά **αποκλίνει** μιας και τα μερικά της αθροίσματα δεν είναι άνω φραγμένα.

Για να το δούμε αυτό ομαδοποιούμε τους όρους της σειράς ως εξής:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{> \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \cdots$$

Το άθροισμα των δύο πρώτων όρων είναι $3/2$.

Στη συνέχεια, το άθροισμα 2^n όρων που τελειώνουν με τον $1/2^{n+1}$ είναι $> \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$.

Άρα με $n = 2^k$, το μερικό άθροισμα $s_n > \frac{k}{2}$.

Άρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων δεν είναι άνω φραγμένη. Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Πρόταση

(i) Έστω ότι $0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε n . Τότε

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Αν, επιπλέον, η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) Έστω ότι ισχύει $a_n \geq 0$ και $b_n > 0$ για κάθε n , και ότι η ακολουθία $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ συγκλίνει ή, γενικότερα, ότι είναι φραγμένη. Τότε αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Απόδειξη

(i) Οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ έχουν άθροισμα, άρα από προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ συγκλίνει} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει.}$$

(ii) Έστω ότι η ακολουθία $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ είναι φραγμένη. Τότε υπάρχει ένας u τέτοιος ώστε

$$\frac{a_n}{b_n} \leq u \quad \text{για κάθε } n \quad \stackrel{b_n > 0}{\Leftrightarrow} \quad a_n \leq u b_n \quad \text{για κάθε } n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ συγκλίνει} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u b_n \text{ συγκλίνει} \stackrel{(i)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει.}$$

Παρατήρηση

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε την προηγούμενη πρόταση ως εξής:

Αν $a_n, b_n > 0$ για κάθε n , και $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \rho$, όπου ρ είναι **θετικός** πραγματικός αριθμός ($0 < \rho < +\infty$), τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **είτε και οι δύο συγκλίνουν ή και οι δύο αποκλίνουν στο $+\infty$.**

Πράγματι, επειδή $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \rho$ συνεπάγεται ότι αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Όμως, $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \frac{1}{\rho}$, όπου $1/\rho > 0$, άρα αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Θεώρημα

Έστω ότι η (a_n) είναι φθίνουσα, και ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε n .

Έστω ότι $a_n = f(n)$, όπου $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, θετική, φθίνουσα συνάρτηση.

Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ έχει τιμή η οποία είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$, και

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(t) dt < +\infty.$$

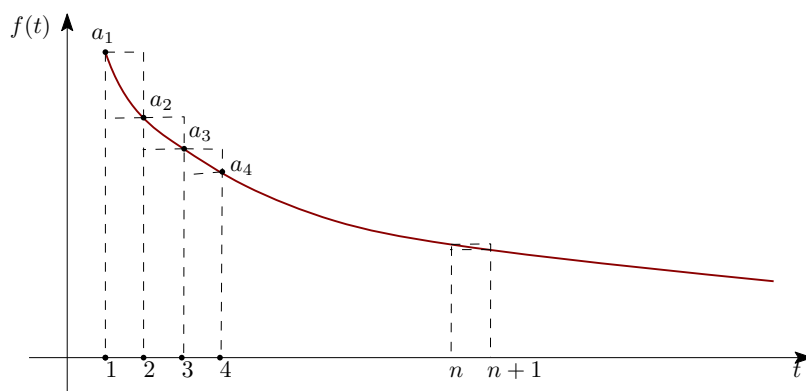
$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(t) dt = +\infty.$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

Απόδειξη ...

Επειδή $f > 0$, το $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ θα έχει τιμή που θα είναι είτε αριθμός ή $+\infty$.



Τώρα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $t \in [k, k+1]$ ισχύει

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k),$$

οπότε

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \Leftrightarrow a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq a_k.$$

... Απόδειξη

Προσθέτουμε κατά μέλη τις αριστερές ανισότητες για $k = 1, \dots, n-1$ και τις δεξιές ανισότητες για $k = 1, \dots, n$ και βρίσκουμε

$$a_2 + \dots + a_n \leq \int_1^n f(t) dt \quad \text{και} \quad \int_1^{n+1} f(t) dt \leq a_1 + \dots + a_n.$$

Άρα

$$\int_1^{n+1} f(t) dt \leq a_1 + \dots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(t) dt.$$

Παίρνουμε όρια για $n \rightarrow +\infty$:

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

Τώρα τα (i) και (ii) είναι άμεση συνέπεια της τελευταίας ανισότητας. □

Παράδειγμα

- Ελέγξτε αν η ακόλουθη σειρά συγκλίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

- Θεωρήστε τη σημαντική σειρά (σειρά p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

όπου p είναι οποιαδήποτε πραγματική σταθερά.

- Ελέγξτε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1}.$
- Ελέγξτε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}.$

Ορισμός

Λέμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

συγκλίνει απολύτως (ή είναι απολύτως συγκλίνουσα) αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

συγκλίνει. (Ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$.)

Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης

Θεώρημα

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε αυτή συγκλίνει, και

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Απόδειξη. Για κάθε n , ισχύει ότι:

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|.$$

Άρα, επειδή από την υπόθεσή μας η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$. Συνεπώς, θα συγκλίνει και η σειρά μη αρνητικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$. Επιπλέον,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

δηλαδή η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ εκφράζεται ως διαφορά δύο συγκλινουσών σειρών, άρα συγκλίνει. Τέλος, επειδή $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ για κάθε $n \geq 1$, έχουμε

$$-\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

□

- Ελέγξτε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$.
- Ελέγξτε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Πρόταση

(α) Αν $|a_n| \leq b_n$ για κάθε n και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει. Επίσης,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(β) Έστω ότι $b_n > 0$ για κάθε n και ότι η ακολουθία $\left(\frac{|a_n|}{b_n} \right)$ συγκλίνει, ή, γενικότερα, ότι είναι φραγμένη. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει.

Απόδειξη. (α) Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, έπεται άμεσα ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Άρα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και, μάλιστα,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(β) Είναι άμεση συνέπεια προηγούμενων προτάσεων. □

Παράδειγμα

Συγκρίνουμε την

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n + 2^n}$$

με την

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Έχουμε:

$$\frac{\left| \frac{(-2)^n}{3^n + 2^n} \right|}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{3^n}{3^n + 2^n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \rightarrow 1.$$

Αρα επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n + 2^n}$ συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.

Κριτήριο λόγου του d' Alembert

Θεώρημα

Έστω ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho.$$

(α) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει.

(β) Αν $\rho > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(Το κριτήριο δεν μας επιτρέπει να αποφανθούμε περί σύγκλισης ή απόκλισης για $\rho = 1$.)

Απόδειξη

(α) Έστω $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho < 1$. Παίρνουμε ένα u έτσι ώστε $\rho < u < 1$. Άρα υπάρχει κάποιο n_0 ώστε να ισχύει $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq u$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, ισχύει ότι:

$$|a_{n+1}| \leq u |a_n| \Leftrightarrow \frac{|a_{n+1}|}{u^{n+1}} \leq \frac{|a_n|}{u^n}.$$

Άρα η ακολουθία (θετικών όρων) $\left(\frac{|a_n|}{u^n} \right)$ είναι φθίνουσα από τον n_0 -όρο της και μετά (δηλαδή είναι τελικώς φθίνουσα), και επομένως είναι φραγμένη.

Συνεπώς, επειδή $u < 1$, η $\sum_{n=1}^{\infty} u^n$ συγκλίνει και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Έστω $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho > 1$.

Τότε υπάρχει κάποιο n_0 ώστε να ισχύει $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$.

Άρα η ακολουθία $(|a_n|)$ είναι τελικώς αύξουσα (δηλαδή αύξουσα από τον n_0 -οστό όρο της και μετά), συνεπώς είναι αδύνατον να ισχύει $a_n \rightarrow 0$, και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. $\square$

Παράδειγμα

❶ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει διότι

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 < 1.$$

❷ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ αποκλίνει διότι

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e > 1.$$

Παράδειγμα

- ❶ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow 1.$$

- ❷ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει και

$$\frac{\frac{1}{(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1.$$

Κριτήριο ρίζας του Cauchy

Θεώρημα

Έστω ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

(α) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει.

(β) Αν $\rho > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(Το κριτήριο δεν μας επιτρέπει να αποφανθούμε περί σύγκλισης ή απόκλισης για $\rho = 1$.)

Απόδειξη

(α) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho < 1$, επιλέγουμε ένα u έτσι ώστε $\rho < u < 1$.

Άρα υπάρχει κάποιο n_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|a_n|} \leq u$ για κάθε $n \geq n_0$.

Επομένως, $|a_n| \leq u^n$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία (θετικών όρων) $(\frac{|a_n|}{u^n})$ είναι φραγμένη.

Άρα, επειδή $u < 1$, η $\sum_{n=1}^{\infty} u^n$ συγκλίνει και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho > 1$, τότε υπάρχει κάποιο n_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$.

Άρα $|a_n| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$, συνεπώς είναι αδύνατον να ισχύει $a_n \rightarrow 0$, και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. $\square$

Παράδειγμα

❶ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ συγκλίνει διότι

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^3}{2^n}\right|} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

❷ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n}$ αποκλίνει διότι

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n}\right|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 2 > 1.$$

Θεώρημα

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

συγκλίνει αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

- (α) $b_n > 0$ για κάθε n .
- (β) Η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα ($b_n \geq b_{n+1}$).
- (γ) $b_n \rightarrow 0$.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε καταρχάς ότι n είναι ένας άρτιος ακέραιος, έστω $n = 2m$. Τότε:

$$\begin{aligned} s_{2m} &= (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_{2m-1} - b_{2m}) \\ &= b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \dots - (b_{2m-2} - b_{2m-1}) - b_{2m}. \end{aligned}$$

Από την πρώτη « $\Rightarrow$ » s_{2m} είναι άθροισμα m μη αρνητικών όρων αφού κάθε όρος μέσα σε παρένθεση είναι ≥ 0 .

Άρα $s_{2m+2} \geq s_{2m}$, και η ακολουθία (s_{2m}) είναι αύξουσα.

Από τη δεύτερη « $\Rightarrow$ » $s_{2m} \leq b_1$, άρα η (s_{2m}) είναι και φραγμένη.

Επομένως, συγκλίνει σε κάποιο όριο, έστω l , δηλαδή

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} s_{2m} = l. \quad (2)$$

Αν n είναι περιττός ακέραιος, έστω $n = 2m + 1$, τότε το μερικό άθροισμα s_n είναι:

$$s_{2m+1} = s_{2m} + b_{2m+1}.$$

Εφόσον $\lim_n b_n = 0$, θα ισχύει και ότι:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} b_{2m+1} = 0,$$

επομένως, καθώς $m \rightarrow +\infty$,

$$s_{2m+1} = s_{2m} + b_{2m+1} \rightarrow l + 0 = l. \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) έχουμε ότι $\lim_n s_n = l$, άρα η σειρά συγκλίνει (Άσκηση). $\square$

Παράδειγμα 17

Έστω $p > 0$. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$$

πληροί όλες τις προϋποθέσεις του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων και συνεπώς συγκλίνει.

Αν $p > 1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{(n-1)}}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει και δεν χρειαζόμαστε το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων για να αποδείξουμε τη σύγκλισή της.

Όμως για $0 < p \leq 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n^p}$ δεν συγκλίνει απολύτως.

Ειδικότερα, για $p = 1$, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

συγκλίνει, ενώ η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ αποκλίνει στο $+\infty$. Άρα δεν ισχύει το αντίστροφο του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης.

Δυναμοσειρές

Ορισμός

Κάθε σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + \dots$$

λέγεται **δυναμοσειρά** με **κέντρο** a και **συντελεστές** $c_0, c_1, c_2, \dots$

Σε μία δυναμοσειρά το x παίζει τον ρόλο μεταβλητής.

Για κάποιες τιμές του x η δυναμοσειρά συγκλίνει, για κάποιες αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, και για τις υπόλοιπες τιμές του x η δυναμοσειρά αποκλίνει αλλά όχι στα $\pm\infty$.

Παράδειγμα: Γεωμετρική δυναμοσειρά

Η γεωμετρική δυναμοσειρά είναι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - a)^n,$$

με όλους τους συντελεστές της να είναι ίσοι με 1.

Την έχουμε ήδη μελετήσει στη μορφή: $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$, με $b = x - a$.

Η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει μόνον όταν $|x - a| < 1 \Leftrightarrow a - 1 < x < a + 1$, και το άθροισμα της είναι ίσο με

$$\frac{1}{1 - b} = \frac{1}{1 - (x - a)}.$$

Άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - a)^n = \frac{1}{1 - (x - a)}, \quad \text{αν} \quad a - 1 < x < a + 1.$$

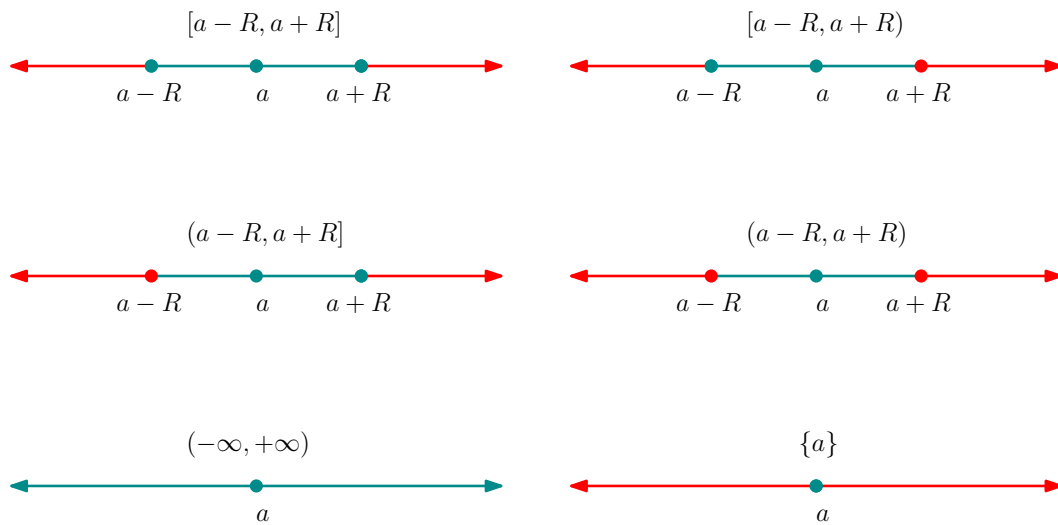
Το σύνολο των τιμών του x για τις οποίες μία δυναμοσειρά συγκλίνει ονομάζεται **σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς**.

Πρόταση

Για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ υπάρχουν ακριβώς οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις σχετικά με το σύνολο σύγκλισής της:

- ❶ Το σύνολο σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$.
- ❷ Το σύνολο σύγκλισής της είναι το μονοσύνολο $\{a\}$
- ❸ Υπάρχει $R > 0$ τέτοιος ώστε η σειρά να συγκλίνει για x με $|x - a| < R$ και να αποκλίνει για x με $|x - a| > R$. Η σειρά μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει σε οποιοδήποτε από τα άκρα $x = a - R$ και $x = a + R$.

Οι έξι πιθανές περιπτώσεις για το διάστημα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς



Ορισμός

Το σύνολο σύγκλισης κάθε δυναμοσειράς είναι διάστημα συμμετρικό ως προς το κέντρο της και ονομάζεται **διάστημα σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Το αντίστοιχο R λέγεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς και σε κάθε περίπτωση ισχύει $0 \leq R \leq +\infty$.

Παράδειγμα. Η γεωμετρική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n$, συγκλίνει για κάθε $x \in (a-1, a+1)$ και αποκλίνει για κάθε άλλη τιμή του x .

Άρα: **διάστημα σύγκλισης:** $(a-1, a+1)$ και **ακτίνα σύγκλισης:** $R = 1$.

Πρόταση

Έστω ότι $c_n \neq 0$ για κάθε n και έστω $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \rightarrow \rho$.

Τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ είναι ίση με $\frac{1}{\rho}$, όπου το $1/\rho$ ορίζεται ως 0 αν $\rho = +\infty$ και ως $+\infty$ αν $\rho = 0$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου στη δυναμοσειρά, και διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(α) Αν $0 < \rho < +\infty$, τότε

$$\left| \frac{c_{n+1} (x-a)^{n+1}}{c_n (x-a)^n} \right| = |x-a| \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \rightarrow |x-a| \rho.$$

Επομένως, αν $|x-a| \rho < 1 \Leftrightarrow |x-a| < \frac{1}{\rho}$, η δυναμοσειρά **συγκλίνει**, ενώ αν $|x-a| > \frac{1}{\rho}$, η δυναμοσειρά **αποκλίνει**.

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με $\frac{1}{\rho}$.

(β) Αν $\rho = 0$, τότε

$$\left| \frac{c_{n+1} (x-a)^{n+1}}{c_n (x-a)^n} \right| \rightarrow |x-a| 0 = 0 < 1.$$

Επομένως, η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x , δηλαδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $+\infty$.

(γ) Αν $\rho = +\infty$, τότε για κάθε $x \neq a$ έχουμε:

$$\left| \frac{c_{n+1} (x-a)^{n+1}}{c_n (x-a)^n} \right| \rightarrow |x-a| (+\infty) = +\infty > 1.$$

Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε $x \neq a$, η δυναμοσειρά αποκλίνει. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 0 . $\square$

Πρόταση

Έστω $\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow \rho$. Τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ είναι ίση με $\frac{1}{\rho}$, όπου το $1/\rho$ ορίζεται ως 0 αν $\rho = +\infty$ και ως $+\infty$ αν $\rho = 0$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας στη δυναμοσειρά, και διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(α) Αν $0 < \rho < +\infty$, τότε

$$\sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} = |x-a| \sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow |x-a| \rho.$$

Επομένως, αν $|x-a| \rho < 1 \Leftrightarrow |x-a| < \frac{1}{\rho}$, η δυναμοσειρά **συγκλίνει**, ενώ αν $|x-a| > \frac{1}{\rho}$, η δυναμοσειρά **αποκλίνει**.

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με $\frac{1}{\rho}$.

(β) Αν $\rho = 0$, τότε

$$\sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} \rightarrow |x-a| 0 < 1,$$

οπότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x , δηλαδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $+\infty$.

(γ) Αν $\rho = +\infty$, τότε για κάθε $x \neq a$ έχουμε:

$$\sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} \rightarrow |x-a| (+\infty) = +\infty > 1.$$

Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε $x \neq a$, η δυναμοσειρά αποκλίνει οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 0 . $\square$

Παράδειγμα 1

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ έχει συντελεστές $c_n = \frac{1}{n}$ και κέντρο το 0.

Εφαρμόζουμε τους δύο τύπους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης:

$$\left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} \right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1.$$

Αρα η **ακτίνα σύγκλισης** είναι $R = 1$.

- Για $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που αποκλίνει
- Για $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που συγκλίνει.

Αρα το **διάστημα σύγκλισης** είναι το $[-1, 1)$.

Παράδειγμα 2

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ με συντελεστές $c_n = \frac{1}{n^2}$ και κέντρο το 0.

Οι δύο τύποι υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης μας δίνουν:

$$\left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \rightarrow 1 \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^2} \right|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow 1.$$

Αρα η **ακτίνα σύγκλισης** είναι $R = 1$.

- Για $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ και συγκλίνει.
- Για $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ και συγκλίνει και πάλι.

Αρα το **διάστημα σύγκλισης** είναι το $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 3

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ με συντελεστές $c_n = n^n$ και κέντρο το 0.

Εδώ έχουμε:

$$\left| \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \right| = (n+1) \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = (n+1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow (+\infty) e.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 0$, οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $\{0\}$.

Παράδειγμα 4

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n$, με συντελεστές $c_n = \frac{1}{n^n}$ και κέντρο το 0.

Εδώ με τον πρώτο τρόπο υπολογισμού έχουμε:

$$\left| \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} \right| = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{e} = 0.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγούμαστε και με τον δεύτερο τρόπο υπολογισμού:

$$\sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^n} \right|} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$, οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Από κάθε δυναμοσειρά με θετική ακτίνα σύγκλισης μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση.

Ορισμός

Έστω η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ (αυτό περιλαμβάνει την περίπτωση $R = +\infty$), έτσι ώστε το διάστημα σύγκλισης I της δυναμοσειράς δεν αποτελείται μόνον από το a .

Τότε ορίζεται συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \quad \text{για } x \in I,$$

και λέμε ότι η f είναι **η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ στο διάστημα σύγκλισής της.

Παράδειγμα

Η γεωμετρική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ έχει διάστημα σύγκλισης το $(-1, 1)$ και $\forall x \in (-1, 1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}.$$

Άρα η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ με πεδίο ορισμού το $(-1, 1)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ στο $(-1, 1)$.



Η $\frac{1}{1 - x}$ φυσικά ορίζεται (ανεξάρτητα από τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$) στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ που είναι μεγαλύτερο από το $(-1, 1)$ το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Πρόταση

Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ (οπότε το διάστημα σύγκλισης I της δυναμοσειράς δεν αποτελείται μόνον από το a).

Γνωρίζουμε ότι το I είναι το $(a-R, a+R)$ και πιθανόν να περιέχει και ένα από τα άκρα $a \pm R$ ή και τα δύο.

Επιπλέον, έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα I . Τότε:

- (i) Η f είναι συνεχής στο I .
- (ii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(a-R, a+R)$ και ισχύει:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} \quad \text{για κάθε } x \in (a-R, a+R).$$

Παρατήρηση

Άρα, αφού και η

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

είναι και αυτή δυναμοσειρά και συγκλίνει στο διάστημα $(a-R, a+R)$, τότε και η συνάρτηση που ορίζει, δηλαδή η f' , είναι παραγωγίσιμη στο $(a-R, a+R)$ και ισχύει:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2} \quad \forall x \in (a-R, a+R).$$

Προφανώς αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί βρίσκοντας διαδοχικές παραγώγους της f και συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την αρχική δυναμοσειρά είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(a-R, a+R)$ και ότι για κάθε $m \geq 1$ ισχύει:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \dots (n-m+1) c_n (x-a)^{n-m} \quad \forall x \in (a-R, a+R).$$

Συγκεκριμένα, για $x = a$ βρίσκουμε ότι:

$$f^{(m)}(a) = m! c_m.$$

Παράδειγμα

Έστω η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Προσδιορίζουμε την ακτίνα σύγκλισης εφαρμόζοντας τον πρώτο τύπο υπολογισμού της:

$$\left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Άρα $R = +\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Έστω, τώρα f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή έστω ότι ισχύει

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{για κάθε } x.$$

Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = f(x) \quad \text{για κάθε } x.$$

... Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{-x} f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$h'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

άρα η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και $h(0) = e^{-0} f(0) = f(0) = 1$.

Επομένως, $h(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = e^x$ για κάθε x . Δηλαδή,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

∴ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι η εκθετική συνάρτηση e^x .

Για τον λόγο αυτό η συγκεκριμένη δυναμοσειρά ονομάζεται **εκθετική δυναμοσειρά**.

Επίσης, αληθεύει ότι μπορούμε να ολοκληρώσουμε μια δυναμοσειρά όρο προς όρο σε ολόκληρο το διάστημα σύγκλισής της:

Πρόταση

Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ (οπότε το διάστημα σύγκλισης I της δυναμοσειράς δεν αποτελείται μόνον από το a).

Γνωρίζουμε ότι το I είναι το $(a - R, a + R)$ και πιθανόν να περιέχει και ένα από τα άκρα $a \pm R$ ή και τα δύο.

Επιπλέον, έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα I .

Τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}$ συγκλίνει για κάθε $x \in (a - R, a + R)$ και

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1} + C \quad \text{για κάθε } x \in (a - R, a + R).$$

Σειρές Taylor

Είδαμε ότι μία δυναμοσειρά ορίζει εντός του διαστήματος σύγκλισής της, I , μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και έχει παραγώγους όλων των τάξεων.

Ερώτημα: Ισχύει και το αντίστροφο; Δηλ., αν μια συνάρτηση f έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα διάστημα μπορεί να εκφραστεί ως δυναμοσειρά τουλάχιστον σε κάποιο μέρος του διαστήματος αυτού; Επιπλέον, αν αυτό είναι δυνατόν, ποιοί θα είναι οι συντελεστές της;

Μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: Έστω ότι η $f(x)$ είναι το άθροισμα μιας δυναμοσειράς με κέντρο το $x = a$ και διάστημα σύγκλισης I με θετική ακτίνα σύγκλισης,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \text{για } x \in I.$$

Όπως είδαμε, με διαδοχικές παραγωγίσεις εντός του I , καταλήγουμε ότι:

$$f^{(m)}(a) = m! c_m.$$

Ο τύπος αυτός υποδηλώνει τον τύπο για τους συντελεστές κάθε δυναμοσειράς που συγκλίνει στις τιμές της f στο διάστημα I .

Αν υπάρχει τέτοια σειρά (κάτι που δεν έχει ακόμη αποδειχθεί) θα πρέπει ο m -οστός συντελεστής της να είναι ίσος με

$$c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}.$$

Άρα, αν η f μπορεί να αναπαρασταθεί με κάποια σειρά, τότε αυτή θα πρέπει να είναι η

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \end{aligned} \quad (4)$$

Ερώτημα:

Αν f είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα που περιέχει το $x = a$, και τη χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε τη σειρά που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της (4), τότε η σειρά αυτή θα συγκλίνει στην $f(x)$ για κάθε x στο διάστημα σύγκλισης;

Η απάντηση, όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι ότι για κάποιες συναρτήσεις αυτό είναι εφικτό, ενώ για άλλες όχι.

Ορισμός

Έστω f συνάρτηση με παραγώγους όλων των τάξεων σε κάθε σημείο ενός διαστήματος και a κάποιο εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού.

Τότε η **σειρά Taylor που παράγεται από την f στο $x = a$** είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Η **σειρά Maclaurin της f** είναι η σειρά Taylor που παράγεται από την f στο $x = 0$, δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Θεώρημα (Θεώρημα του Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange)

Έστω $n \in \mathbb{N}$, διάστημα I , συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $a \in I$. Έστω ότι η f έχει παραγώγους τάξης μέχρι και n συνεχείς στο I (δηλαδή και στα πιθανά άκρα του) και ότι υπάρχει η παράγωγος τάξης $n+1$ της f σε κάθε εσωτερικό σημείο του I . Τότε για κάθε $x \in I$ υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα J με άκρα x, a , ώστε

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Αν, επιπλέον, ισχύει $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ για κάθε x στο εσωτερικό του I , τότε

$$\left| f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

Απόδειξη

Σταθεροποιούμε τα x και a και ορίζουμε τον αριθμό A μέσω της ισότητας

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{A}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{A}{(n+1)!}(x-t)^{n+1},$$

με ανεξάρτητη μεταβλητή $t \in J$.

Η $g(t)$ είναι προφανώς συνεχής στο J (συμπεριλαμβανομένων των άκρων του), παραγωγίσιμη στο J και, δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να δούμε ότι, η παράγωγός της είναι ίση με

$$g'(t) = \frac{A - f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n.$$

Προφανώς, $g(x) = 0$ και, από τον ορισμό του A , $g(a) = 0$. Άρα, από το Θ. Rolle, υπάρχει $\xi \in J$: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow A = f^{(n+1)}(\xi)$.

Αντικαθιστούμε αυτήν την τιμή του A στην ισότητα που το καθορίζει και παίρνουμε την ισότητα του θεωρήματος.

Η ανισότητα προκύπτει εύκολα από την ισότητα και την $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M$.

Ορισμός

Η παράσταση

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ονομάζεται **προσέγγιση Taylor τάξης n της f** στο διάστημα I .

Το

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ονομάζεται **σφάλμα τάξης n τύπου Lagrange**.

Η προσέγγιση Taylor τάξης n είναι πολυώνυμο του x βαθμού $\leq n$.

Θεώρημα (Θεώρημα του Taylor με σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου)

Έστω $n \in \mathbb{N}$, διάστημα I , συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $a \in I$. Έστω ότι η f έχει παραγώγους τάξης μέχρι και $n + 1$ συνεχείς στο I (δηλαδή και στα πιθανά άκρα του).

Τότε για κάθε $x \in I$ ισχύει

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

Απόδειξη. Εκτελούμε διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη στο $\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$, μεταφέροντας παραγώγους από την $f(t)$ στην $(x - t)^n$.

Ορισμός

Το

$$\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$$

ονομάζεται **σφάλμα τάξης n ολοκληρωτικού τύπου**.

Τώρα είμαστε σε θέση να απαντήσουμε στο ερώτημα που διατυπώσαμε προηγουμένως. Δηλαδή, αν, δεδομένης μίας συνάρτησης f και ενός a στο πεδίο ορισμού της, μπορούμε να αποφασίσουμε αν υπάρχει σειρά Taylor της συνάρτησης στο a και (αν υπάρχει) να την βρούμε.

Πρόταση

Έστω διάστημα I , το οποίο έχει μέσο a και δεν αποτελείται μόνο από το a , και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I . Τότε για κάθε $x \in I$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x, a; f),$$

όπου $R_n(x, a; f)$ είναι σφάλμα τάξης n τύπου Lagrange ή ολοκληρωτικού τύπου.

Αν $R_n(x, a; f) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in I$, τότε η σειρά Taylor της f στο a είναι η

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \text{ δηλαδή}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad \text{για } x \in I.$$

Απόδειξη

Το πρώτο μέρος είναι άμεση συνέπεια των δύο θεωρημάτων του Taylor.

Το δεύτερο μέρος είναι προφανές: αν $R_n(x; a; f) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in I$ τότε συνεπάγεται

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \rightarrow f(x),$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$ βαθμού N και ένα οποιοδήποτε a .

Για κάθε x και κάθε $n \geq N$ έχουμε προφανώς ότι $p^{(n+1)}(x) = 0$, άρα το σφάλμα τάξης n τύπου Lagrange είναι:

$$R_n(x; a; p) = \frac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = 0 \rightarrow 0.$$

Άρα η σειρά Taylor του πολυωνύμου $p(x)$ στο a είναι η

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = p(a) + p'(a)(x-a) + \cdots + \frac{p^{(N)}(a)}{N!} (x-a)^N.$$

Δηλαδή

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \cdots + \frac{p^{(N)}(a)}{N!} (x-a)^N \quad \text{για κάθε } x.$$

Η παράσταση αυτή είναι το λεγόμενο **ανάπτυγμα πολυωνύμου σε δυνάμεις του $x - a$** .

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε την $f(x) = e^x$.

Είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και $\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$ για κάθε x και για κάθε n .

Ειδικότερα, $\frac{d^n e^x}{dx^n} \Big|_{x=0} = 1$ για κάθε n , άρα η πιθανή σειρά Taylor της e^x στο 0 είναι η

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Παίρνουμε $a = 0$ και υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου Lagrange:

$$R_n(x; 0; f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} = e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

όπου ξ αριθμός ανάμεσα στα 0 και x .

Αν $x \geq 0$, τότε $0 \leq \xi \leq x$, οπότε

$$|R_n(x; 0; f)| = e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

Αν $x \leq 0$, τότε $x \leq \xi \leq 0$, οπότε

$$|R_n(x; 0; f)| = e^\xi \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^0 \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0.$$

Άρα $R_n(x; 0; f) \rightarrow 0$ για κάθε x , επομένως η σειρά Taylor της e^x στο 0 είναι:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \cos x$.

Η συνάρτηση $\cos x$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και

$$\frac{d^n \cos x}{dx^n} = \pm \cos x \text{ ή } \pm \sin x.$$

Συγκεκριμένα,

$$\left. \frac{d^n \cos x}{dx^n} \right|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{αν } n \text{ άρτιος,} \\ 0 & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Άρα η πιθανή σειρά Taylor της $\cos x$ στο 0 είναι η

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Παίρνουμε $a = 0$ και υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου Lagrange:

$$R_n(x; 0; \cos x) = \frac{\pm \cos \xi}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ ή } \frac{\pm \sin \xi}{(n+1)!} x^{n+1},$$

όπου ξ αριθμός ανάμεσα στα 0 και x .

Άρα, σε κάθε περίπτωση, επειδή $|\pm \cos \xi| \leq 1$ και $|\pm \sin \xi| \leq 1$, έχουμε

$$|R_n(x; 0; \cos x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \text{ για κάθε } x.$$

Άρα η σειρά Taylor της $\cos x$ στο 0 είναι η:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ για } -\infty < x < +\infty.$$

Εντελώς ανάλογα υπολογίζουμε και τη σειρά Taylor της $\sin x$ στο 0:

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

Παράδειγμα 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με παραγώγους

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \quad \text{για κάθε } n \geq 1 \text{ και κάθε } x \in (-\infty, 1).$$

Ειδικότερα, $\frac{d^n}{dx^n} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right) \Big|_{x=0} = (n-1)!$ για $n \geq 1$, και επομένως η πιθανή σειρά Taylor της $\ln \frac{1}{1-x}$ στο 0 είναι η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Παίρνουμε $a = 0$ και υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου Lagrange:

$$R_n(x; 0; \ln \frac{1}{1-x}) = \frac{n!}{(1-\xi)^{n+1}(n+1)!} x^{n+1} = \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}(n+1)} x^{n+1},$$

όπου ξ αριθμός ανάμεσα στα 0 και x .

Αν $-1 \leq x \leq 0$, τότε $-1 \leq x \leq \xi \leq 0$ οπότε

$$\left| R_n(x; 0; \ln \frac{1}{1-x}) \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(1-\xi)^{n+1}(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Το σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου είναι

$$R_n(x; 0; \ln \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{n!}{(1-t)^{n+1}} (x-t)^n dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt.$$

Αν $0 \leq x < 1$, τότε για κάθε $t \in [0, x]$ ισχύει $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$ και άρα $0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leq x^n$.
Επομένως

$$\left| R_n(x; 0; \ln \frac{1}{1-x}) \right| = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \leq x^n \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = x^n \ln \frac{1}{1-x} \rightarrow 0.$$

Άρα η σειρά Taylor της $\ln \frac{1}{1-x}$ στο 0 είναι η:

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{για } -1 \leq x < 1.$$

Η σειρά αυτή ονομάζεται **λογαριθμική δυναμοσειρά**.

Αν αντικαταστήσουμε το x με το $-x$ βρίσκουμε τον παρόμοιο τύπο:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{για } -1 < x \leq 1.$$

Ομοίως, αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία το x με το $x-1$ βρίσκουμε

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \quad \text{για } 0 < x \leq 2.$$

Ειδική περίπτωση αυτών των ισοδύναμων ισοτήτων είναι ο τύπος:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} + \dots$$

Παράδειγμα 5

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\arctan x$ η οποία έχει παράγωγο $\frac{1}{1+x^2}$ αλλά ο υπολογισμός των παραγώγων ανώτερης τάξης είναι περίπλοκος, οπότε δεν είναι εύκολο να εφαρμόσουμε την πρόταση του Taylor.



Καταρχάς, εφαρμόζουμε τη γνωστή ταυτότητα

$$1 - a^n = (1 - a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$$

για $a = -t^2$ και βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{1 - (-t^2)^n}{1 + t^2} &= 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1 + t^2} &= 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt &= \int_0^x 1 dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt - \dots + (-1)^{n-1} \int_0^x t^{2n-2} dt \\ &\quad + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1 + t^2} dt.$$

Αν $|x| \leq 1$, τότε

$$\left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1 + t^2} dt \right| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1 + t^2} dt \leq \int_0^{|x|} t^{2n} dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0,$$

οπότε

$$(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1 + t^2} dt \rightarrow 0.$$

Άρα

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \text{για κάθε } -1 \leq x \leq 1.$$

Παίρνοντας $x = 1$, επειδή $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$