

Ακολουθίες

Δ.Α. Μητσούδης

Ακολουθίες

Μια ακολουθία είναι μια άπειρη επιλογή αριθμών $a_1, a_2, a_3, \dots$, με μια ορισμένη σειρά: πρώτος, δεύτερος, τρίτος, $\dots$

a_1 : πρώτος όρος, a_2 : δεύτερος όρος, $\dots$, a_n : n -οστός όρος.

Άπειρες ακολουθίες: κάθε όρος a_n θα έχει έναν επόμενο που θα είναι ο a_{n+1} .

Έτσι σε κάθε θετικό ακέραιο αντιστοιχεί ένας αριθμός, επομένως:

Μια ακολουθία είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακεραίων.

Συμβολισμός: Γράφουμε a_n , αντί του γνωστού $f(n)$, την τιμή της συνάρτησης στον αριθμό n .

Παραδείγματα

α) Κάποιες ακολουθίες ορίζονται δίνοντας τον τύπο για τον n -οστό όρο.

- ❶ Η ακολουθία a_n με τύπο $a_n = \frac{1}{n}$. Δηλ. η $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
- ❷ Η ακολουθία a_n με τύπο $a_n = n$. Δηλ. η $1, 2, 3, 4, \dots$
- ❸ Η ακολουθία a_n με τύπο $a_n = 1$. Δηλ. η $1, 1, 1, 1, \dots$
- ❹ Η ακολουθία a_n με τύπο $a_n = (-1)^{n+1}$. Δηλ. η $1, -1, 1, -1, \dots$
- ❺ Η ακολουθία a_n με τύπο $a_n = \frac{n}{n+1}$. Δηλ. η $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

Παραδείγματα

β) Βεβαίως, υπάρχουν ακολουθίες που οι όροι τους δεν καθορίζονται από κάποιον απλό τύπο.

Π.χ., η ακολουθία (a_n) της οποίας ο n -οστός όρος είναι το n -οστό δεκαδικό ψηφίο του αριθμού π .

Μερικοί αρχικοί όροι της ακολουθίας αυτής είναι:

$1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, \dots$

Παραδείγματα

Κάποιες ακολουθίες ορίζονται **αναδρομικά**.

Στην περίπτωση αυτή δίνεται ένας αρχικός όρος (ή κάποιοι αρχικοί όροι) της ακολουθίας και ένας κανόνας, που ονομάζεται **αναδρομικός τύπος**, και μας επιτρέπει να υπολογίζουμε επόμενους όρους από τους προηγούμενους.

Π.χ., η ακολουθία **Fibonacci** ορίζεται μέσω των σχέσεων:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \quad n \geq 3.$$

Μερικοί αρχικοί όροι της ακολουθίας αυτής είναι:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Παρατήρηση

Προσοχή! Μία ακολουθία είναι διαδοχική επιλογή αριθμών, ΔΕΝ είναι το σύνολο με στοιχεία αυτούς τους αριθμούς.

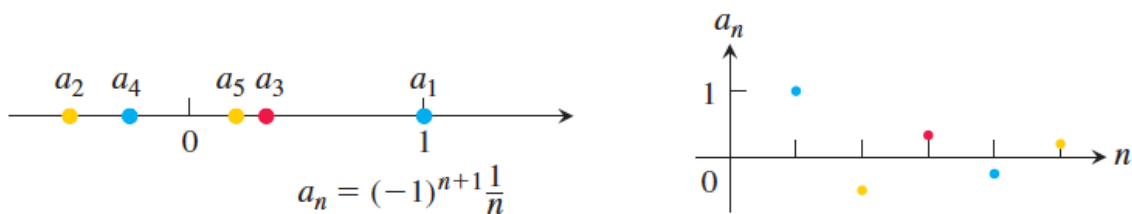
Π.χ., η ακολουθία με τύπο $a_n = 1$ είναι η άπειρη διαδοχική επιλογή: $1, 1, 1, \dots$

Το σύνολο με στοιχεία τους όρους της ακολουθίας είναι το μονοσύνολο $\{1\}$.

Επιπλέον, όταν λέμε ότι **κάθε όρος μίας ακολουθίας ακολουθεί τον προηγούμενό του, εννοούμε σε σειρά επιλογής και όχι σε μέγεθος**.

Γραφική αναπαράσταση ακολουθίας

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$



Ορισμοί

- Μια ακολουθία (a_n) λέγεται **φθίνουσα** αν κάθε όρος είναι μικρότερος ή ίσος από τον προηγούμενό του, δηλαδή

$$a_{n+1} \leq a_n \text{ για κάθε } n.$$

- Η (a_n) λέγεται **αύξουσα** αν κάθε όρος είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον προηγούμενό του, δηλαδή

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ για κάθε } n.$$

- Μια ακολουθία λέγεται **μονότονη** αν είναι είτε αύξουσα ή φθίνουσα.
- Αν οι όροι της ακολουθίας δεν μεταβάλλονται, τότε λέγεται **σταθερή**.

Παραδείγματα

- ❶ Η $a_n = \frac{1}{n}$. (Γνησίως) φθίνουσα
- ❷ Η $a_n = n$. (Γνησίως) αύξουσα
- ❸ Η $a_n = 1$. Σταθερή
- ❹ Η $a_n = (-1)^{n+1}$. Δεν είναι μονότονη

Μονοτονία

Για να ελέγξουμε τη μονοτονία μιας ακολουθίας εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς $a_{n+1} - a_n$.

Παράδειγμα: Ελέγξτε τη μονοτονία της ακολουθίας $a_n = \frac{n^2+2}{n}$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)^2 + 2}{n+1} - \frac{n^2 + 2}{n} = \frac{n(n+1)^2 + 2n - (n^2 + 2)(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + n - 2}{n(n+1)} = \frac{n^2 - 1 + n - 1}{n(n+1)} \geq 0, \quad \text{αφού } n \geq 1. \end{aligned}$$

Μονοτονία

Μερικές φορές, αν έχουμε ακολουθία **θετικών όρων** είναι βολικότερο να συγκρίνουμε τον λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ με το 1.

Παράδειγμα: Ελέγξτε τη μονοτονία της ακολουθίας $a_n = \frac{n}{2^n}$.

Λύση: Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n} \leq \frac{n+1}{2n} = 1.$$

Αρα δείξαμε ότι $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ και επειδή a_n είναι θετικοί, έχουμε ότι $a_{n+1} \leq a_n$.

Ορισμός

- Μια ακολουθία (a_n) λέγεται **άνω φραγμένη** αν υπάρχει κάποιο u ώστε να ισχύει

$$a_n \leq u \quad \text{για κάθε } n.$$

- Η (a_n) λέγεται **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει κάποιο l ώστε να ισχύει

$$l \leq a_n \quad \text{για κάθε } n.$$

- Αν η (a_n) είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν l, u τέτοια ώστε

$$l \leq a_n \leq u$$

για κάθε n , λέμε ότι είναι **φραγμένη**.

Παραδείγματα

- ❶ Η $a_n = \frac{1}{n}$ είναι φραγμένη μιας και όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[0, 1]$.
- ❷ Η $a_n = \frac{n+1}{n}$ είναι φραγμένη μιας και όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[1, 2]$.
- ❸ Η $a_n = n$ είναι κάτω φραγμένη μιας και ο αριθμός 0 είναι ένα κάτω φράγμα, αλλά δεν είναι άνω φραγμένη.
- ❹ Η $a_n = (-1)^{n-1}n$, δηλαδή η ακολουθία 1, -2, 3, -4, 5, -6, ..., δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη.

Παρατηρήσεις

- Αν μια ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη, τότε όλα τα a_n ανήκουν σε ένα φραγμένο διάστημα $[l, u]$.

Τότε όλα τα a_n θα ανήκουν και σε κάποιο διάστημα που είναι συμμετρικό ως προς το 0.

Για αυτό αρκεί να βρούμε ένα διάστημα $[-M, M]$ που να είναι αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει το $[l, u]$. Άρα ισχύει ότι:

Αν η (a_n) είναι φραγμένη τότε υπάρχει κάποιο M τέτοιο ώστε $|a_n| \leq M$ για κάθε n .

Το αντίστροφο επίσης ισχύει κατά προφανή τρόπο.

- Αν το u είναι ένα άνω φράγμα της (a_n) , τότε και κάθε αριθμός $u' > u$ είναι και αυτός άνω φράγμα της (a_n) .
- Ανάλογα, αν το l είναι ένα κάτω φράγμα της (a_n) , τότε και κάθε αριθμός $l' < l$ είναι και αυτός κάτω φράγμα της (a_n) .

Ορισμός («Μη αυστηρός»)

Για μια ακολουθία (a_n) θα γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad (\text{ή, απλώς, } \lim_n a_n = l) \quad (\text{ή } a_n \rightarrow l \text{ καθώς } n \rightarrow +\infty),$$

και θα λέμε

«το όριο της a_n είναι l » ή «η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο l »

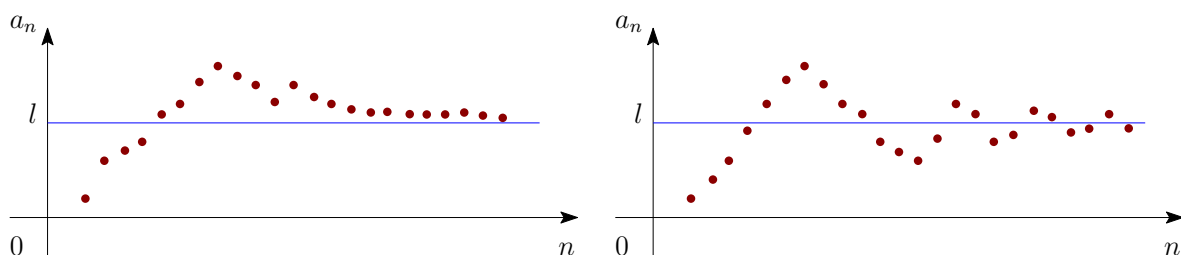
αν οι όροι a_n της ακολουθίας πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο l , για όλα τους δείκτες n που είναι αρκετά μεγάλοι

ή, ισοδύναμα,

αν η απόσταση του a_n από το l γίνεται απεριόριστα μικρή.

Όταν λέμε ότι η απόσταση του a_n από το l γίνεται απεριόριστα μικρή, εννοούμε ότι η παράσταση $|a_n - l|$ γίνεται μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό.

Γραφικές παραστάσεις δύο ακολουθιών με $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$



Παραδείγματα

- Έστω $a_n = \frac{1}{n}$. Τότε οι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας είναι:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \dots, \frac{1}{100}, \dots, \frac{1}{1000}, \dots, \frac{1}{1\,000\,000}, \dots, \frac{1}{10\,000\,000\,000}, \dots,$$

άρα είναι φανερό ότι πλησιάζουν προς το 0 και, φυσικά, η απόστασή τους από το 0 γίνεται απεριόριστα μικρή.

- Ας θεωρήσουμε και την ακολουθία $a_n = \frac{n+1}{n}$,

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{10}{9}, \frac{11}{10}, \dots, \frac{1001}{1000}, \dots, \frac{1\,000\,000\,001}{1\,000\,000\,000}, \dots$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος είναι μικρότερος από τον προηγούμενό του και η απόσταση των όρων από το 1 γίνεται απεριόριστα μικρή καθώς το n αυξάνει. Πράγματι,

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n},$$

που όπως είδαμε παραπάνω γίνεται απεριόριστα μικρή.

Όρια ακολουθιών

Ορισμός («Αυστηρός»)

Η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στον αριθμό l αν για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει ένας $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad n > n_0.$$

Αν μία ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό, τότε λέμε ότι αποκλίνει.

Παράδειγμα 1

Αποδείξτε με τη βοήθεια του ορισμού ότι: $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

Απόδειξη: Έστω δεδομένο $\epsilon > 0$. Πρέπει ν.δ.ο. υπάρχει ένας $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0.$$

Όμως

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Επομένως αν πάρουμε ως n_0 οποιονδήποτε φυσικό μεγαλύτερο από $1/\epsilon$ η ζητούμενη ανισότητα θα ισχύει για κάθε $n > n_0$.

Ας θεωρήσουμε $n_0 = [1/\epsilon] + 1$.

Τότε για κάθε $n > n_0$ ισχύει ότι $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$, επομένως $\lim(1/n) = 0$.

Παράδειγμα 2

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $a_n = (-1)^{n+1}$ αποκλίνει.

Απόδειξη: Οι όροι της (a_n) είναι: $1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots$. Διαισθητικά βλέπουμε ότι δεν είναι δυνατόν οι όροι της να πλησιάζουν απείρως κοντά σε κάποιον αριθμό l .

Θα το αποδείξουμε και αυστηρά με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιον αριθμό l . Ας επιλέξουμε $\epsilon = 1/2$.

Τότε θα υπάρχει ένας $n_0 \in \mathbb{N}$: $|a_n - l| < 1/2$, για κάθε $n > n_0$.

Παρατηρήστε ότι κάθε δεύτερος όρος της ακολουθίας είναι ίσος με 1, άρα θα πρέπει η απόσταση του 1 από τον l να είναι μικρότερη από $\epsilon = 1/2$. Δηλαδή,

$$|l - 1| < 1/2 \Leftrightarrow 1/2 < l < 3/2.$$

Εντελώς ανάλογα και ο αριθμός -1 εμφανίζεται άπειρες φορές στην ακολουθία με αυθαίρετα μεγάλο δείκτη. Άρα θα πρέπει

$$|l - (-1)| < 1/2 \Leftrightarrow -3/2 < l < -1/2.$$

Έτσι όμως, $l \in (-3/2, -1/2)$ και $l \in (1/2, 3/2)$, **ταυτόχρονα! ΑΤΟΠΟ**.

Επομένως δεν υπάρχει τέτοιο όριο l και έτσι η ακολουθία $(-1)^{n+1}$ αποκλίνει.

(Φυσικά, το ίδιο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιονδήποτε αριθμό $0 < \epsilon < 1$ και όχι μόνον για $\epsilon = 1/2$.)

Ορισμός

Η ακολουθία (a_n) αποκλίνει στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $n > n_0$ ισχύει $a_n > M$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \text{ή} \quad a_n \rightarrow +\infty.$$

Ανάλογα, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $n > n_0$ ισχύει $a_n < -M$, τότε λέμε ότι η ακολουθία (a_n) αποκλίνει στο $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \quad \text{ή} \quad a_n \rightarrow -\infty.$$

Βεβαίως, μια ακολουθία είναι δυνατόν να αποκλίνει χωρίς να αποκλίνει προς το $+\infty$ ή το $-\infty$.

Π.χ., η ακολουθία $1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \dots$

Υπολογισμός ορίων ακολουθιών

Θεώρημα

Έστω (a_n) και (b_n) είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $a_n \rightarrow l$ και $b_n \rightarrow m$, όπου $l, m \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = l \pm m$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (c a_n) = c \cdot l, \quad \text{όπου } c \text{ τυχόν αριθμός}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = l \cdot m,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}, \quad \text{αν } b_n \neq 0 \text{ για κάθε } n, \text{ και } m \neq 0.$$

Υπολογισμός ορίων ακολουθιών

Θεώρημα («σάντουιτς» για ακολουθίες)

Έστω (a_n) , (b_n) και (c_n) είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αν ισχύει

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{για κάθε } n \text{ από κάποιο δείκτη } n_0 \text{ και μετά,}$$

και αν $a_n \rightarrow l$ και $c_n \rightarrow l$, όπου $l \in \mathbb{R}$, τότε και $b_n \rightarrow l$.

Θεώρημα (συνεχούς συνάρτησης για ακολουθίες)

Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \rightarrow l$, όπου $l \in \mathbb{R}$. Αν f είναι μια συνάρτηση που ορίζεται σε όλα τα a_n και είναι συνεχής στο l , τότε $f(a_n) \rightarrow f(l)$ ή, ισοδύναμα,

$$\lim_n f(a_n) = f(\lim_n a_n).$$

Υπολογισμός ορίων ακολουθιών

Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη για κάθε $x \geq n_0$ και ότι η (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n = f(n)$ για $n \geq N$. Τότε

$$\lim_n a_n = l \quad \text{οποτεδήποτε} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένας αριθμός $M > 0$:

$$|f(x) - l| < \epsilon \quad \text{όταν} \quad x > M.$$

Έστω ένας φυσικός n_0 που είναι μεγαλύτερος από τον μεγαλύτερο από τους M και N .

Επειδή $a_n = f(n)$, έχουμε ότι για κάθε $n > n_0$, θα ισχύει

$$|a_n - l| = |f(n) - l| < \epsilon,$$

δηλαδή η (a_n) συγκλίνει στον l .

qed

Το προηγούμενο θεώρημα συνδέει το όριο μιας ακολουθίας με το όριο μιας κατάλληλης συνάρτησης.

Αυτό, π.χ., θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα l' Hôpital για να υπολογίσουμε τα όρια κάποιων ακολουθιών.

Πρόταση

- (i) Αν μία ακολουθία συγκλίνει τότε αυτή είναι φραγμένη.
- (ii) Αν μία ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$ τότε αυτή είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.
- (iii) Αν μία ακολουθία αποκλίνει στο $-\infty$ τότε αυτή είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.

Απόδειξη. (i) Έστω $a_n \rightarrow l$. Αν το n γίνει αρκετά μεγάλο τότε θα ισχύει $|a_n - l| < 1$ και άρα $a_n \in [l - 1, l + 1]$. Έτσι έξω από αυτό το διάστημα βρίσκονται μόνο κάποιοι αρχικοί όροι της ακολουθίας και επομένως η ακολουθία είναι φραγμένη.

(ii) Έστω $a_n \rightarrow +\infty$. Αν το n γίνει αρκετά μεγάλο τότε θα ισχύει $a_n > 1$ και άρα το $a_n \in [1, +\infty)$. Έτσι έξω από αυτό το διάστημα βρίσκονται μόνο κάποιοι αρχικοί όροι της ακολουθίας οπότε η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη.

Επίσης, για κάθε u θα ισχύει $a_n > u$ αν το n γίνει αρκετά μεγάλο, οπότε το u δεν είναι άνω φράγμα της (a_n) . Άρα η (a_n) δεν μπορεί να έχει κανένα άνω φράγμα.

(iii) Ανάλογη με την απόδειξη του (ii).

qed

Τα αντίστροφα των τριών μερών της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύουν. Π.χ.

- Η ακολουθία $((-1)^{n+1})$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει.
- Η ακολουθία $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, \dots$, είναι κάτω φραγμένη (από το μηδέν) και όχι άνω φραγμένη. Όμως η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$.
- Ομοίως, η ακολουθία $-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, 0, \dots$, είναι άνω φραγμένη (από το μηδέν), δεν είναι κάτω φραγμένη και δεν αποκλίνει στο $-\infty$.

Θεώρημα

Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο. Συγκεκριμένα:

- (i) Αν η ακολουθία είναι αύξουσα τότε είτε δεν είναι άνω φραγμένη και αποκλίνει στο $+\infty$ ή είναι άνω φραγμένη και συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.
- (ii) Αν η ακολουθία είναι φθίνουσα τότε είτε δεν είναι κάτω φραγμένη και αποκλίνει στο $-\infty$ ή είναι κάτω φραγμένη και συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.

Σημασία:

- Αν εξασφαλίσουμε ότι μια ακολουθία είναι μονότονη, τότε έχει οπωσδήποτε όριο: ή θα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό ή θα αποκλίνει στο $\pm\infty$.
- Παρατηρήστε ότι για να αποδείξουμε με τον ορισμό του ορίου ότι μία ακολουθία έχει όριο *πρέπει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων (ή να μαντέψουμε) το υποψήφιο όριό της* ώστε, στη συνέχεια, να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι η απόσταση του n -οστού όρου της από αυτό θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό.
- Π.χ., *αν αποδείξουμε ότι μια ακολουθία είναι μονότονη και φραγμένη, τότε το θεώρημα αυτό μας εξασφαλίζει ότι θα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό, χωρίς όμως να μας προσφέρει έναν τρόπο υπολογισμού του ορίου*. Κάποιες φορές, εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία ότι μία συγκεκριμένη ακολουθία έχει όριο, μπορεί να καταφέρουμε να υπολογίσουμε και την τιμή του ορίου.

Μερικά όρια που εμφανίζονται συχνά

$$(1) \quad \lim_n \frac{\ln n}{n} = 0$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \frac{\ln n}{n}$ και τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Η f ορίζεται για κάθε $x > 0$ και $f(n) = a_n$ για κάθε φυσικό $n \geq 1$.

Άρα σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα

$$\lim_n \frac{\ln n}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x},$$

εφόσον το τελευταίο υπάρχει.

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του l' Hôpital και έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$(2) \lim_n \sqrt[n]{n} = 1$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$. Παίρνοντας όριο οδηγούμαστε σε απροσδιοριστία.

Ένας τρόπος να υπολογίσουμε το όριο αυτό είναι να θεωρήσουμε τον φυσικό λογάριθμο του a_n :

$$\ln a_n = \ln n^{1/n} = \frac{1}{n} \ln n = \frac{\ln n}{n}.$$

Επομένως, το όριο της καινούργιας μας ακολουθίας $(\ln a_n)$ είναι:

$$\lim_n \ln a_n = \lim_n \frac{\ln n}{n} \stackrel{(1)}{=} 0.$$

Επειδή $\ln a_n \rightarrow 0$ και η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι συνεχής, έχουμε από προηγούμενο Θεώρημα ότι:

$$f(\ln a_n) \rightarrow f(0) \Rightarrow e^{\ln a_n} \rightarrow e^0 = 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 1.$$

$$(3) \lim_n x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$$

Άσκηση «για το σπίτι»

$$(4) \quad \lim_n x^n = 0 \quad (|x| < 1)$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < 1$. Θεωρούμε ένα $\epsilon > 0$ και θέλουμε ν.δ.ο. υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|x^n| < \epsilon \quad \text{για} \quad n > n_0.$$

Από την (2) έχουμε ότι η ακολουθία $(\epsilon^{1/n})$ συγκλίνει στο 1, $(\epsilon^{1/n} \rightarrow 1)$, άρα για κάποιο δείκτη n_0 ο όρος ϵ^{1/n_0} θα βρίσκεται πολύ κοντά στο 1. Σημειώστε ότι και $|x| \in (0, 1)$, άρα θα πρέπει $|x| < \epsilon^{1/n_0}$. Όμως

$$|x| < \epsilon^{1/n_0} \Leftrightarrow |x|^{n_0} < \epsilon.$$

Ο n_0 είναι ο φυσικός που ψάχνουμε διότι αν $|x| < 1$ τότε για κάθε $n > n_0$ έχουμε

$$|x^n| < |x^{n_0}| < \epsilon.$$

(Για την πρώτη ανισότητα στην παραπάνω σχέση σκεφτείτε ότι:

$$|x| < 1 \Rightarrow |x|^2 < |x| \Rightarrow |x|^3 < |x|^2 < |x|, \text{ κ.ό.κ.})$$

$$(5) \quad \lim_n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t \quad (t \text{ τυχαίο})$$

Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$, και παίρνοντας φυσικό λογάριθμο κατασκευάζουμε την ακολουθία $(\ln a_n)$ με

$$\ln a_n = \ln \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{t}{n}\right).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{t}{x}\right)$, η οποία παίρνοντας όριο για $x \rightarrow +\infty$ οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) \cdot 0$. Χρησιμοποιούμε κανόνα του Ι' Hôpital και έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{t}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{t}{x}} \cdot \left(-\frac{t}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{1 + \frac{t}{x}} = t$$

Άρα σύμφωνα με το γνωστό μας θεώρημα έχουμε ότι $\ln a_n \rightarrow t$. Στη συνέχεια,

$$\lim_n a_n = \lim_n e^{\ln a_n} = e^t.$$

$$(6) \quad \lim_n \frac{x^n}{n!} = 0$$

Αρχικά θα την αποδείξουμε για $x > 0$. Έστω λοιπόν $a_n = \frac{x^n}{n!}$, όπου $x \in \mathbb{R}$ με $x > 0$.

Καταρχάς, ελέγχουμε αν η (a_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Έχουμε:

$$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{x^n}{n!} \Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{x^n} \leq \frac{(n+1)!}{n!} \Leftrightarrow x \leq n+1 \Leftrightarrow x-1 \leq n.$$

Επομένως, η ακολουθία (a_n) θα είναι φθίνουσα όταν ο δείκτης n γίνεται μεγαλύτερος από $x-1$, που είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός. Άρα αν παραλείψουμε κάποιους όρους από εκεί και πέρα η (a_n) είναι **φθίνουσα**. Όμως η (a_n) είναι και **κάτω φραγμένη** αφού, προφανώς, $a_n \geq 0$. Άρα, η ακολουθία (a_n) θα συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό l με $l \geq 0$.

Ποιός όμως είναι ο l ;

Παρατηρούμε ότι:

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n x}{n! (n+1)} = \frac{x}{n+1} \cdot \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n+1} a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{x}{n+1} a_n.$$

Προφανώς, για $n \rightarrow +\infty$, $a_n \rightarrow l$, $a_{n+1} \rightarrow l$ και $\frac{x}{n+1} \rightarrow 0$, άρα παίρνοντας όρια στην παραπάνω ισότητα, έχουμε:

$$l = 0 \cdot l \Rightarrow l = 0.$$

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι αν $x > 0$: $\lim_n \frac{x^n}{n!} = 0$.

Όταν $x = 0$, τότε η (a_n) είναι η μηδενική ακολουθία, οπότε προφανώς $a_n \rightarrow 0$.

Όταν $x < 0$, τότε $|a_n| = \frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0$, αφού $|x| > 0$. Άρα και $a_n \rightarrow 0$ (γιατί;).

Λυμένες ασκήσεις

1. Αποδείξτε με τη βοήθεια του «αυστηρού» ορισμού ότι $\lim_n \frac{n}{n+1} = 1$. Στη συνέχεια, αποδείξτε το με ιδιότητες ορίων ακολουθιών.

Απόδειξη. (Με χρήση του ορισμού.) Έστω δεδομένο $\epsilon > 0$. Πρέπει ν.δ.ο. υπάρχει ένας $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0.$$

Όμως, $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{|n-n-1|}{n+1} = \frac{1}{n+1}$, άρα

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

Επομένως, αρκεί να επιλέξουμε ως n_0 τον φυσικό $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon} - 1 \right] + 1$.

(Με ιδιότητες ορίων.) Προφανώς,

$$\lim_n \frac{n}{n+1} = \lim_n \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \lim_n \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

2. Αποδείξτε με τη βοήθεια του «αυστηρού» ορισμού ότι $\lim_n \frac{n^3-1}{n^3+n+1} = 1$.

Απόδειξη. Έστω δεδομένο $\epsilon > 0$. Πρέπει ν.δ.ο. υπάρχει ένας $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{n^3-1}{n^3+n+1} - 1 \right| < \epsilon \quad \text{για κάθε } n > n_0.$$

Όμως,

$$\left| \frac{n^3-1}{n^3+n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n^3-1-n^3-n-1}{n^3+n+1} \right| = \frac{n+2}{n^3+n+1}.$$

Άρα

$$\left| \frac{n^3-1}{n^3+n+1} - 1 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{n+2}{n^3+n+1} < \epsilon.$$

Παρατηρήστε ότι δεν είναι εύκολο να λύσουμε την τελευταία ανίσωση ως προς n . Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να δείξουμε ότι $\frac{n+2}{n^3+n+1} < A$, για κάποια ποσότητα A , και στη συνέχεια να λύσουμε την $A < \epsilon$ (ως προς n). Η ποσότητα A πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε:

- α) να είναι μεγαλύτερη από την αρχική ποσότητα,
- β) η ανισότητα $A < \epsilon$ να επιλύεται εύκολα,
- γ) να γίνεται απεριόριστα μικρή.

Π.χ., για το κλάσμα $\frac{n+2}{n^3+n+1}$ μπορούμε ταυτόχρονα να μεγαλώσουμε τον αριθμητή και να μικρύνουμε τον παρονομαστή έτσι ώστε:

$$\frac{n+2}{n^3+n+1} < \frac{n+2n}{n^3} = \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}.$$

Επομένως, αν $\frac{3}{n^2} < \epsilon$, τότε και η $\frac{n+2}{n^3+n+1} < \epsilon$. Άρα:

$$\frac{3}{n^2} < \epsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{3}{\epsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{3}{\epsilon}}.$$

Για να ισχύει η τελευταία για κάθε $n > n_0$, αρκεί να επιλέξουμε $n_0 = \lceil \sqrt{3/\epsilon} \rceil + 1$.

3. Θεωρήστε την ακολουθία $a_n = n^4 + n^3 + 2$. Αποδείξτε με τη βοήθεια του «αυστηρού» ορισμού ότι $\lim_n a_n = +\infty$.

Απόδειξη. Έστω $M > 0$. Αναζητούμε ένα n_0 τέτοιο ώστε $a_n > M$ για κάθε $n > n_0$. Όμως

$$a_n > M \Leftrightarrow n^4 + n^3 + 2 > M.$$

Παρατηρήστε ότι δεν μπορούμε να λύσουμε την τελευταία ανίσωση ως προς n , μπορούμε όμως να μικρύνουμε κατάλληλα την ποσότητα $n^4 + n^3 + 2$. Π.χ.,

$$n^4 + n^3 + 2 > n^4.$$

Άρα αν βρούμε n_0 τέτοιο ώστε $n^4 > M$ για κάθε $n > n_0$, τότε προφανώς θα ισχύει και ότι $n^4 + n^3 + 2 > M$.

Επομένως, επειδή $n^4 > M \Leftrightarrow n > \sqrt[4]{M}$, αρκεί να επιλέξουμε $n_0 = \lceil \sqrt[4]{M} \rceil$.

4. Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας (a_n) με $a_n = \frac{2-5n^7}{n^7+4}$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\lim_n \frac{2-5n^7}{n^7+4} = \lim_n \frac{\frac{2}{n^7} - 5}{1 + \frac{4}{n^7}} = \frac{\lim_n \frac{2}{n^7} - 5}{1 + \lim_n \frac{4}{n^7}} = \frac{0 - 5}{1 + 0} = -5.$$

5. Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας (a_n) με: (α) $a_n = \frac{\cos n}{n}$, (β) $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Απόδειξη. (α) Προφανώς $-1 \leq \cos n \leq 1$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Άρα

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Όμως $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$, άρα από το Θεώρημα sandwich, έχουμε ότι αναγκαστικά και $\frac{\cos n}{n} \rightarrow 0$.

(β) Αρχικά βεβαιωθείτε ότι για κάθε $n = 1, 2, \dots$, ισχύει

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Εφόσον $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ έχουμε και πάλι από το Θεώρημα sandwich, ότι $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$.

(Παρατηρήστε ότι προκύπτει και ως άμεσο συμπέρασμα του τύπου (4):

$$\lim_n x^n = 0 \quad (|x| < 1) \text{ για } x = 1/2.)$$

6. Ελέγξτε αν συγκλίνει η ακολουθία (a_n) με $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$; Αν ναι, βρείτε το όριο $\lim_n a_n$.

Απόδειξη. Παίρνοντας όριο οδηγούμαστε στην απροσδιόριστη μορφή 1^∞ . Για το λόγο αυτό θεωρούμε την ακολουθία $(\ln a_n)$:

$$\ln a_n = \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n = n \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \lim_n \ln a_n &= \lim_n n \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right) = \lim_n \frac{\ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right)}{\frac{1}{n}} \quad (\text{απροσδιοριστία } 0/0, \text{ κανόνας l' H\^opital}) \\ &= \lim_n \frac{-\frac{2}{n^2-1}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{2n^2}{n^2-1} = \lim_n \frac{2}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1-\lim_n \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1-0} = 2. \end{aligned}$$

Επειδή $\ln a_n \rightarrow 2$ και η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι συνεχής, έχουμε ότι:

$$f(\ln a_n) \rightarrow f(2) \Rightarrow e^{\ln a_n} \rightarrow e^2 \Rightarrow a_n \rightarrow e^2.$$

Άσκηση: Προσπαθήστε, εναλλακτικά, να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας τον τύπο (5):

$$\lim_n \left(1 + \frac{t}{n} \right)^n = e^t.$$

7. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ είναι φθίνουσα.

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι $a_{n+1} < a_n$. Άρα,

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\Leftrightarrow \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1] \\ &\Leftrightarrow n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \Leftrightarrow 1 < n^2+n. \end{aligned}$$

Επειδή $n \geq 1$ η τελευταία ανίσωση είναι αληθής, άρα $a_{n+1} < a_n$ και, επομένως, η ακολουθία (a_n) είναι φθίνουσα.

8. Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία (a_n) που ορίζεται μέσω του αναδρομικού τύπου

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \quad \text{για } n = 1, 2, 3, \dots$$

Απόδειξη. Για να πάρουμε μια ιδέα υπολογίζουμε μερικούς όρους της ακολουθίας. Προκύπτει ότι:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{1}{2}(2+6) = 4, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 5.5, \quad a_5 = 5.75, \quad a_6 = 5.875, \dots$$

Οι όροι αυτοί υποδεικνύουν ότι η ακολουθία είναι **αύξουσα** και, επιπλέον, φαίνεται ότι οι όροι της πλησιάζουν στο 6. Θα αποδείξουμε **επαγωγικά** ότι η ακολουθία είναι **γνησίως αύξουσα**, δηλαδή ότι $a_n < a_{n+1}$.

- Για $n = 1$ έχουμε ότι $a_1 = 2 < 4 = a_2$.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή ότι $a_k < a_{k+1}$ (**Επαγωγική υπόθεση**).
- Τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = k+1$, δηλαδή ότι $a_{k+1} < a_{k+2}$. Όμως

$$\begin{aligned} a_{k+1} < a_{k+2} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) \Leftrightarrow a_k + 6 < a_{k+1} + 6 \\ &\Leftrightarrow a_k < a_{k+1} \quad \text{που ισχύει λόγω της επαγωγικής υπόθεσης.} \end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας και πάλι επαγωγή, ότι η (a_n) είναι **άνω φραγμένη** από το 6, δηλαδή $a_n < 6$ για κάθε n .

(Παρατηρήστε ότι αφού η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα τότε σίγουρα είναι κάτω φραγμένη αφού, π.χ., $a_n \geq a_1 = 2$.)

- Για $n = 1$, ισχύει αφού $a_1 = 2 < 6$.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή ότι $a_k < 6$ (**Επαγωγική υπόθεση**).
- Τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$, δηλαδή ότι $a_{k+1} < 6$.

Ας ξεκινήσουμε από την επαγωγική υπόθεση $a_k < 6$. Τότε

$$a_k < 6 \Rightarrow a_k + 6 < 6 + 6 \Rightarrow \frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2}(12) \Rightarrow a_{k+1} < 6.$$

Άρα μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει ότι η (a_n) είναι **γνησίως αύξουσα** και **άνω φραγμένη**, άρα έχουμε ότι η ακολουθία (a_n) θα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό l με $l \leq 6$.

Παίρνοντας όρια στον αναδρομικό τύπο, και επειδή για $n \rightarrow +\infty$, $a_n \rightarrow l$, $a_{n+1} \rightarrow l$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} l &= \lim_n a_{n+1} = \lim_n \frac{1}{2}(a_n + 6) = \frac{1}{2}(\lim_n a_n + 6) = \frac{1}{2}(l + 6) \\ \Leftrightarrow l &= \frac{1}{2}(l + 6) \Leftrightarrow 2l = l + 6 \Leftrightarrow \mathbf{l = 6}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι $a_n \rightarrow 6$.