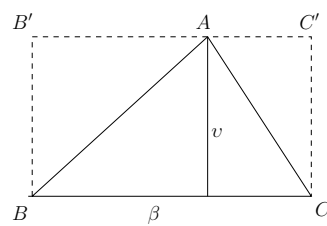
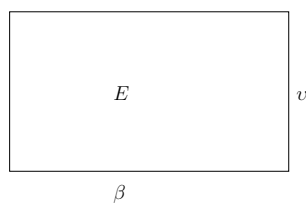


Ολοκληρώματα

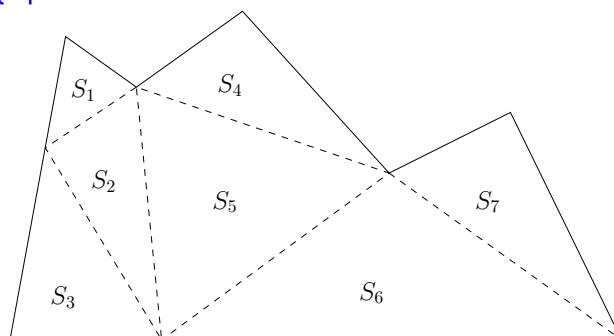
Δ.Α. Μητσούδης

Εμβαδά

Εμβαδό ορθογωνίου και εμβαδό τριγώνου.

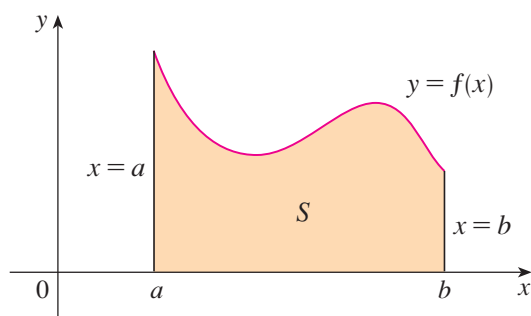


Εμβαδό πολυγωνικού χωρίου.



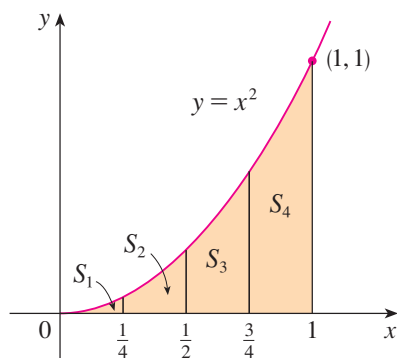


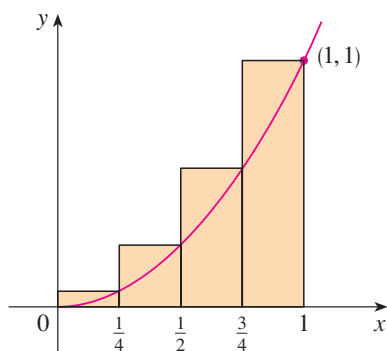
Πώς όμως υπολογίζουμε το εμβαδόν μιας επιφάνειας με βάση ένα διάστημα $[a, b]$ πάνω στον x -άξονα, και πάνω πλευρά το γράφημα μιας συνάρτησης $y = f(x)$ για $a \leq x \leq b$;



Παράδειγμα

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το εμβαδό του παραβολικού χωρίου που ορίζουν η παραβολή $y = x^2$ μεταξύ των $x = 0$ και $x = 1$, και ο x άξονας.

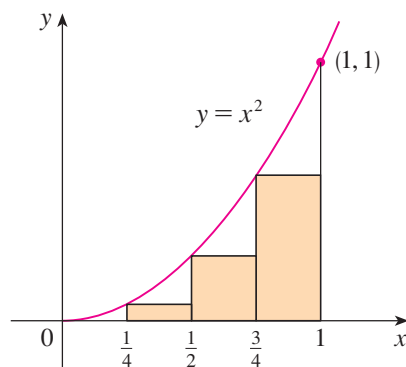




$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32}.$$

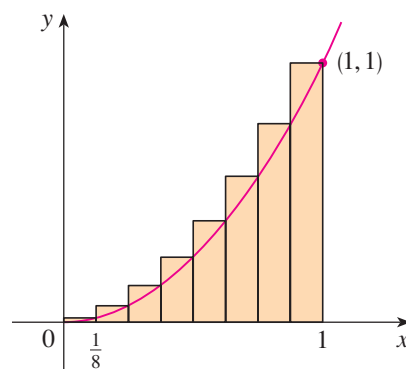
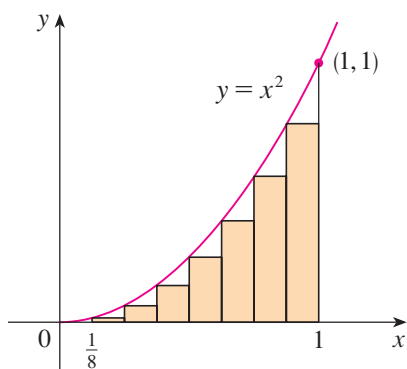
Άρα βρήκαμε την ακόλουθη εκτίμηση:

$$0.21875 = \frac{7}{32} \leq A \leq \frac{15}{32} = 0.46875$$



$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32}.$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία διπλασιάζοντας το πλήθος των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίζουμε το $[0, 1]$



και βρίσκουμε ότι

$$0.2734375 \leq A \leq 0.3984375.$$

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Παρατηρήστε ότι για $n = 1000$ υποδιαστήματα, βρίσκουμε

$$0.3328335 \leq E \leq 0.3338335$$

ενώ η ακριβής τιμή, όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι $\frac{1}{3} = 0.333 \dots$

Το ολοκλήρωμα Riemann

Θα εφαρμόσουμε τώρα αυτή την ιδέα σε ένα γενικό χωρίο.

Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε αρκετά μικρά διαδοχικά υποδιαστήματα με τη βοήθεια μιας επιλογής διαδοχικών σημείων

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Τα διαδοχικά υποδιαστήματα είναι, επομένως, τα

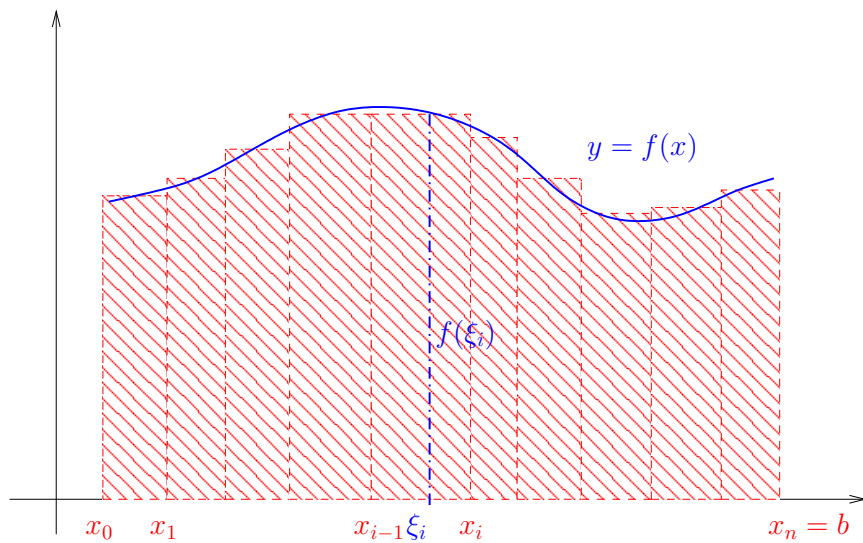
$$\underbrace{[a, x_1]}_{\text{πρώτο}}, \quad \underbrace{[x_1, x_2]}_{\text{δεύτερο}}, \quad \dots, \quad \underbrace{[x_{i-1}, x_i]}_{i\text{-οστό}}, \quad \dots, \quad \underbrace{[x_{n-1}, x_n]}_{n\text{-οστό}}.$$

Τα σημεία $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ ονομάζονται **διαιρετικά σημεία**, και το σύνολό τους $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ ονομάζεται **διαμέριση** του διαστήματος $[a, b]$. Γενικά, το i -οστό διάστημα ($1 \leq i \leq n$) είναι το $[x_{i-1}, x_i]$.

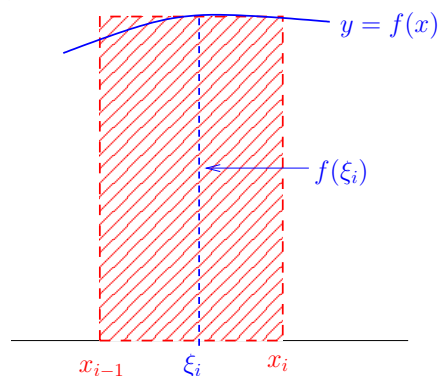
Γενικά, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις του διαστήματος $[a, b]$, διότι

- α) υπάρχουν άπειρες επιλογές του πλήθους n των υποδιαστημάτων που ορίζονται από τη διαμέριση και,
- β) για κάθε $n \geq 2$ υπάρχουν άπειρες επιλογές διαιρετικών σημείων $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Χωρισμός σε κατακόρυφες στοιχειώδεις επιφάνειες



Η επιφάνεια S_i είναι περίπου ίδια με το ορθογώνιο που έχει κάτω πλευρά το διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ και ύψος ίσο με $f(\xi_i)$



Άρα

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Το άθροισμα στο δεξί μέλος λέγεται **άθροισμα Riemann** της $y = f(x)$, που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη διαμέριση Δ και στη συγκεκριμένη επιλογή ενδιάμεσων σημείων ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Ορισμός

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υπάρχει αριθμός A τον οποίο προσεγγίζουν απεριορίστα τα αθροίσματα Riemann της συνάρτησης καθώς το πλήθος των σημείων της διαμέρισης αυξάνει και καθώς τα μήκη των διαστημάτων μικραίνουν, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Ο αριθμός A λέγεται **(ορισμένο) ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$** και τον συμβολίζουμε

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Θεώρημα

- Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
- Επίσης, αν η $y = f(x)$ είναι μονότονη στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι μια συνάρτηση $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, είναι ολοκληρώσιμη, τότε μπορούμε να βρούμε το $\int_a^b f(x) dx$ επιλέγοντας κατάλληλες διαμερίσεις και κατάλληλα ενδιάμεσα σημεία.

Συνήθως επιλέγουμε διαμερίσεις του $[a, b]$ σε **διαστήματα ίσου μήκους**, δηλαδή αν n είναι το πλήθος των διαστημάτων, τότε το μήκος του κάθε διαστήματος είναι

$$h = \frac{b - a}{n},$$

και τα διαιρετικά σημεία της διαμέρισης είναι τα

$$x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_i = a + ih, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)h, x_n = a + nh = b.$$

Επίσης, ως ενδιάμεσα σημεία ξ_i επιλέγουμε συχνά (αλλά όχι πάντα)

- το αριστερό άκρο $\xi_i = x_{i-1}$,
- ή το δεξί άκρο $\xi_i = x_i$,
- ή το μέσο $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Παραδείγματα υπολογισμού ολοκληρωμάτων Riemann

Παράδειγμα 1. Δείξτε ότι για τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \geq 0$, ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ έχουμε

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a).$$

Παράδειγμα 2. Δείξτε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x$, ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ ($0 \leq a \leq b$) έχουμε

$$\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων Riemann

Πρόταση

Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, και λ είναι οποιοσδήποτε αριθμός. Τότε

(1) $\int_a^a f(x) \, dx = 0.$

(2) $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx.$

(3) η $y = \lambda f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b (\lambda f(x)) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx.$$

(4) η $y = f(x) + g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

(5) η $y = f(x)g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, αλλά **δεν** υπάρχει τύπος που να συνδέει το $\int_a^b (f(x)g(x)) \, dx$ με τα $\int_a^b f(x) \, dx$ και $\int_a^b g(x) \, dx$.

Πρόταση

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στα $[a, b]$ και $[b, c]$. Τότε η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Πρόταση

Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, και ότι ισχύει $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$. Τότε

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Πρόταση

- (1) Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και u είναι ένα άνω φράγμα της $y = f(x)$ στο $[a, b]$, δηλ. $f(x) \leq u, \forall x \in [a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx \leq (b - a)u.$$

- (2) Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και l είναι ένα κάτω φράγμα της $y = f(x)$ στο $[a, b]$, δηλ. $f(x) \geq l, \forall x \in [a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx \geq (b - a)l.$$

Πρόταση

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε και η $y = |f(x)|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

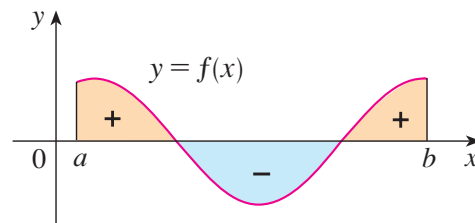
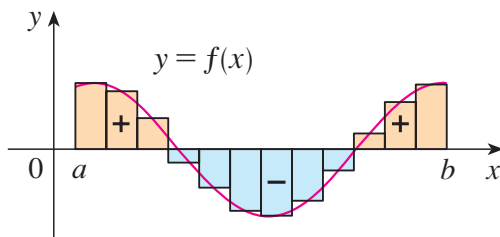
Παρατήρηση:

Αν η f παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές, τότε το άθροισμα Riemann είναι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται πάνω από τον x άξονα και των αντίθετων των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται κάτω από τον x άξονα.

Άρα, γενικά, το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης ορίζεται ως η διαφορά των εμβαδών

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2,$$

όπου A_1 είναι το εμβαδό των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον x άξονα, και A_2 είναι το εμβαδό των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον x άξονα.



Μέση τιμή συνάρτησης

Μέση τιμή αριθμών $y_1, y_2, \dots, y_n$: $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$.

Θα ορίσουμε μια ανάλογη έννοια μέσης τιμής για συναρτήσεις.

Έστω $y = f(x)$ ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και επιλέγουμε μια διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{b-a}{n}$, και οποιοδήποτε σύνολο $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων.

Θεωρούμε τις τιμές $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$.

Αν το h είναι αρκετά μικρό $\Leftrightarrow$ κάθε υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ είναι αρκετά μικρό, τότε τα σημεία x κάθε τέτοιου υποδιαστήματος είναι πολύ κοντά στο αντίστοιχο ξ_i , οπότε είναι εύλογο να δεχτούμε ότι κάθε τιμή $f(\xi_i)$ «εκπροσωπεί» τις τιμές $f(x)$ για $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Επομένως, οι τιμές $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ «εκπροσωπούν» όλες τις τιμές της συνάρτησης.

Ιδέα: Θεωρούμε τη μέση τιμή $\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\dots+f(\xi_n)}{n}$, και ελέγχουμε αν αυτή η μέση τιμή συγκλίνει σε κάποιον αριθμό αν το h γίνει αρκετά μικρό. Όμως,

$$\begin{aligned} \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n} &= \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{\frac{b-a}{h}} \\ &= \frac{1}{b-a} [f(\xi_1)h + f(\xi_2)h + \dots + f(\xi_n)h] = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)h. \end{aligned}$$

Αν παίρνουμε ολοένα και μεγαλύτερες τιμές του n , θα υπολογίζουμε τη μέση τιμή ενός μεγάλου αριθμού τιμών που βρίσκονται η μία πολύ κοντά στην άλλη. Η οριακή τιμή θα είναι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)h = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Όταν, λοιπόν, η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, ορίζουμε **τη μέση τιμή της f στο $[a, b]$** ως

$$\text{Μέση τιμή της } f \text{ στο } [a, b] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Αν η μέση τιμή της $y = f(x)$ στο $[a, b]$ είναι ο αριθμός ρ , τότε

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)\rho = \int_a^b \rho dx.$$

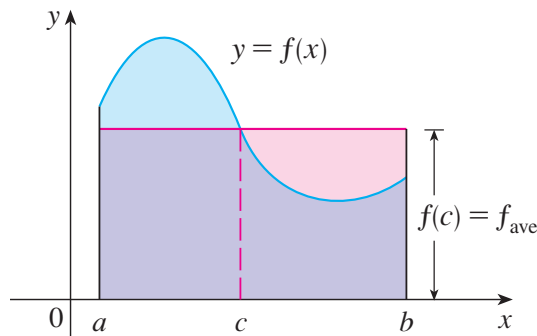
Άρα,

Η μέση τιμή της $y = f(x)$ στο $[a, b]$ είναι εκείνη η τιμή που οφείλει να έχει μια **σταθερή** συνάρτηση στο $[a, b]$ ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα της $y = f(x)$.

Θεώρημα (Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$. Τότε υπάρχει κάποιος c στο $[a, b]$ ώστε

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$



Γεωμετρική ερμηνεία: Για θετικές συνεχείς συναρτήσεις f , υπάρχει ένας αριθμός c τ.ω. το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση $[a, b]$ και ύψος $f(c)$ να είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που καθορίζεται από το γράφημα της f μεταξύ των $x = a$ και $x = b$, και του x -άξονα.

Αντιπαράγωγοι και αόριστα ολοκληρώματα

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα I . Αν μια άλλη συνάρτηση $y = F(x)$, ορισμένη στο ίδιο διάστημα I , έχει την ιδιότητα

$$F'(x) = f(x) \quad (x \text{ στο } I),$$

τότε η $y = F(x)$ ονομάζεται **αντιπαράγωγος** ή παράγουσα ή πρωτεύουσα συνάρτηση ή αρχική συνάρτηση της $y = f(x)$ στο διάστημα I .

Παραδείγματα.

- Αν $f(x) = \cos x$, τότε η $F(x) = \sin x$ είναι αντιπαράγωγος της f στο $\mathbb{R}$.
- Αν $f(x) = 2x$, τότε η $F(x) = x^2$ είναι αντιπαράγωγος της f στο $\mathbb{R}$.
- Αν $f(x) = 1/x$, τότε η $F(x) = \ln |x|$ είναι αντιπαράγωγος της f στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Αν $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, τότε η $F(x) = \arctan x$ είναι αντιπαράγωγος της f στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση

Έστω ότι η $y = F(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $y = f(x)$ στο διάστημα I . Τότε το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της $y = f(x)$ στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις της μορφής $y = F(x) + c$, όπου c είναι οποιοσδήποτε σταθερός αριθμός (δηλαδή ανεξάρτητος του x), και από καμιά άλλη συνάρτηση.

Δηλαδή, δύο οποιοσδήποτε αντιπαράγωγοι της f διαφέρουν κατά μια σταθερά.

Ορισμός

Το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται

$$\int f(x) dx.$$

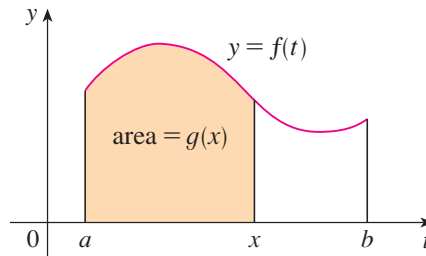
Παραδείγματα

- $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$
- $\int 2x \, dx = x^2 + C.$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C.$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C.$

Σχέση παραγώγου και ολοκληρώματος

Αν $y = f(t)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, ορίζουμε την g από τον τύπο

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1)$$

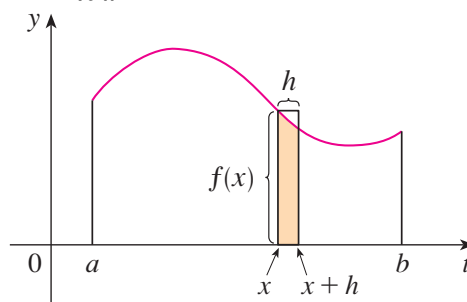


Αν η f είναι θετική, τότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη $g(x)$ ως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της f και τον άξονα των t , μεταξύ των a και x , και ενώ το x μεταβάλλεται μεταξύ a και b .

Θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της g που ορίζεται από την (1).

Έστω ότι η συνεχής συνάρτηση $y = f(t)$ είναι θετική, δηλ. $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$,

Θεωρούμε ένα $h > 0$. Τότε η διαφορά $g(x+h) - g(x)$ είναι το εμβαδό του χωρίου που σημειώνεται με μπεζ χρώμα στο σχήμα.



Αν όμως το h είναι αρκετά μικρό αναμένουμε το εμβαδό αυτού του χωρίου να προσεγγίζει το εμβαδό του ορθογωνίου με βάση h και ύψος $f(x)$. Άρα

$$g(x+h) - g(x) \approx h f(x) \Leftrightarrow \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x).$$

Διαισθητικά:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Θεώρημα

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα I , συνεχής, και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημά του. Παίρνουμε οποιοδήποτε a στο I και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Τότε η $y = F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \text{ στο } I.$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να το γράψουμε και ως εξής:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

όπου η f είναι συνεχής.

Άρα αν, αρχικά, ολοκληρώσουμε την f , και στη συνέχεια παραγωγίσουμε αυτό που θα προκύψει, τότε θα πάρουμε και πάλι την αρχική συνάρτηση f .

Δηλαδή, οι πράξεις της παραγωγίσιμης και της ολοκλήρωσης συναρτήσεων είναι, ουσιαστικά, αντίστροφες. Η μια αναιρεί την άλλη.

Άμεση συνέπεια του Θεμελιώδους Θεωρήματος

Πρόταση

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έστω $y = F(x)$ μια αντιπαράγωγος της $y = f(x)$ στο I . Τότε το ολοκλήρωμα της $y = f(x)$ σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[a, b]$ του I είναι ίσο με τη διαφορά των τιμών της $y = F(x)$ στα άκρα του $[a, b]$. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (a, b \text{ στο } I).$$

Σπουδαία πρακτική σημασία διότι μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ορισμένα ολοκληρώματα χωρίς να μπαίνουμε στη διαδικασία να υπολογίζουμε όρια αθροισμάτων Riemann.



Θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τη διάκριση μεταξύ του ορισμένου και το αόριστου ολοκληρώματος:

- το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ είναι **αριθμός**,
- το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x) dx$ είναι **συνάρτηση** (για την ακρίβεια άπειρες συναρτήσεις ταυτόχρονα).

Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων:

$$\int k dx = kx + C$$

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C, \quad x \neq k\pi$$

Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad x \neq 0$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad -1 < x < 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

Τρόποι υπολογισμού ολοκληρωμάτων

Μέθοδος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής

Πρόταση

Αν η $z = f(y)$ είναι συνεχής στο διάστημα J , η $y = g(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα I και οι τιμές της $y = g(x)$ περιέχονται στο J , τότε ορίζεται η σύνθεση $z = f(g(x))$ στο I , τότε

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(y) dy \Big|_{y=g(x)} \quad (x \text{ στο } I).$$

Επίσης,

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy \quad (a, b \text{ στο } I).$$

Παραδείγματα

- ❶ Υπολογίστε το $\int \cos(7x + 3) dx$.
- ❷ Υπολογίστε το $\int x^2 \sin(x^3) dx$.
- ❸ Υπολογίστε το $\int x \sqrt{2x + 1} dx$.
- ❹ Υπολογίστε το $\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$.

Πρόταση

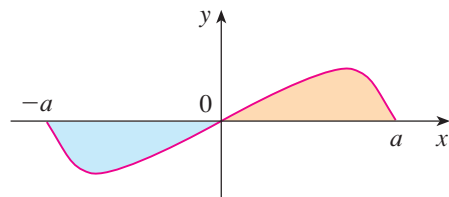
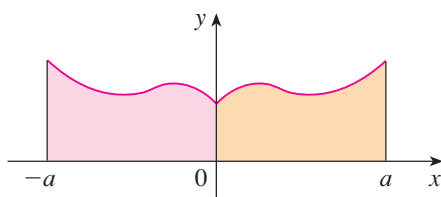
Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[-a, a]$.

(1) Αν η f είναι **άρτια** ($f(-x) = f(x)$), τότε

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(2) Αν η f είναι **περιττή** ($f(-x) = -f(x)$), τότε

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$



Πρόταση

Αν οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ έχουν συνεχή παράγωγο στο διάστημα I , τότε

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx \quad (x \text{ στο } I).$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) g'(x) dx &= \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) dx \quad (a, b \text{ στο } I). \end{aligned}$$

Παραδείγματα

- ❶ Υπολογίστε το $\int \ln x \, dx$.
- ❷ Υπολογίστε το $\int x e^x \, dx$.
- ❸ Υπολογίστε το $\int e^x \sin x \, dx$.

Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων (ανάλυση σε απλά κλάσματα)

Γενική μέθοδος υπολογισμού ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int f(x) dx, \quad \text{όπου } f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ με } p \text{ και } q \text{ πολυώνυμα.}$$

Αν

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_m \neq 0$$

και

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_n \neq 0$$

λέμε ότι ο βαθμός του $p(x) = m$, και ο βαθμός του $q(x) = n$.

ΒΗΜΑ 1:

Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή ($m \geq n$) κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων.

Δηλαδή, βρίσκουμε πολυώνυμα $s(x)$ και $r(x)$ τέτοια ώστε

$$p(x) = s(x) q(x) + r(x), \quad \text{με βαθμό } r(x) < \text{βαθμό } q(x).$$

Τότε

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{s(x) q(x) + r(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Άρα

$$\int f(x) dx = \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx,$$

όπου ο υπολογισμός του $\int s(x) dx$ είναι εύκολος (ολοκλήρωμα πολυωνυμικής συνάρτησης).

Παράδειγμα: Υπολογίστε το $\int \frac{x^3+x}{x-1} dx$.

ΒΗΜΑ 2:

Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε πολυώνυμο q μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων (της μορφής $ax + b$) και ανάγωγων τετραγωνικών παραγόντων (της μορφής $ax^2 + bx + c$ με $b^2 - 4ac < 0$).

Παράδειγμα: Αν $q(x) = x^4 - 16$, τότε

$$q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

Αν $q(x) = x^4 + 16$, τότε

$$\begin{aligned} q(x) &= x^4 + 8x^2 + 16 - 8x^2 \\ &= (x^2 + 4)^2 - (\sqrt{8}x)^2 \\ &= (x^2 - \sqrt{8}x + 4)(x^2 + \sqrt{8}x + 4). \end{aligned}$$

ΒΗΜΑ 3:

Εκφράζουμε τη ρητή συνάρτηση $\frac{r(x)}{q(x)}$ ως ένα άθροισμα **απλών κλασμάτων** της μορφής

$$\frac{A}{(ax + b)^i} \quad \text{ή} \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^i}.$$

Ένα θεώρημα της Άλγεβρας μας εξασφαλίζει ότι αυτό είναι εφικτό.

Περίπτωση 1:

Ο παρονομαστής $q(x)$ είναι γινόμενο διακριτών γραμμικών παραγόντων.

Δηλ.

$$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_kx + b_k)$$

Τότε υπάρχουν σταθερές $A_1, A_2, \dots, A_k$ τ.ω.

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}.$$

Οι σταθερές $A_1, A_2, \dots, A_k$ προσδιορίζονται όπως θα δούμε στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx$.

Περίπτωση 2:

Ο παρονομαστής $q(x)$ είναι γινόμενο γραμμικών παραγόντων, μερικοί από τους οποίους επαναλαμβάνονται.

Έστω ότι ο πρώτος γραμμικός παράγοντας $(a_1x + b_1)$ επαναλαμβάνεται, π.χ., r φορές, δηλαδή εμφανίζεται το $(a_1x + b_1)^r$ ως παράγων του $q(x)$. Τότε εκτός του όρου $\frac{A_1}{a_1x + b_1}$ στην ανάλυση σε απλά κλάσματα χρησιμοποιούμε τους όρους:

$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}.$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} dx$.

Περίπτωση 3:

Ο παρονομαστής $q(x)$ περιέχει ανάγωγους τετραγωνικούς παράγοντες που δεν επαναλαμβάνονται.

Αν το $q(x)$ έχει έναν παράγοντα της μορφής $ax^2 + bx + c$, με $b^2 - 4ac < 0$, τότε το πηλίκο $\frac{r(x)}{q(x)}$ θα έχει κατά την ανάλυσή του σε απλά κλάσματα έναν όρο της μορφής

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

Τον όρο αυτό τον ολοκληρώνουμε κάνοντας συμπλήρωση τετραγώνου στον παρονομαστή και χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\int \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx = \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) + C. \quad (2)$$

Παράδειγμα 1. Υπολογίστε το $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$.

Παράδειγμα 2. Υπολογίστε το $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$.

Περίπτωση 4:

Ο παρονομαστής $q(x)$ περιέχει έναν επαναλαμβανόμενο ανάγωγο τετραγωνικό παράγοντα.

Αν το $q(x)$ έχει τον παράγοντα $(ax^2 + bx + c)^r$, με $b^2 - 4ac < 0$, τότε η ανάλυση σε απλά κλάσματα περιέχει ένα άθροισμα της μορφής

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}.$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx$.

Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να μετατρέψουμε τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων άρρητων συναρτήσεων σε υπολογισμό ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων.

Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$.

Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις σε ολοκληρώματα που περιέχουν τα $a^2 + x^2$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$

Μερικά ολοκληρώματα αυτού του τύπου προκύπτουν άμεσα, π.χ.

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$$

Γενικά,

- Όταν εμφανίζεται ο όρος $\sqrt{a^2 - x^2}$ δοκιμάζουμε την αντικατάσταση $x = a \sin \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
- Όταν εμφανίζεται ο όρος $\sqrt{a^2 + x^2}$ δοκιμάζουμε την αντικατάσταση $x = a \tan \theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.
- Όταν εμφανίζεται ο όρος $\sqrt{x^2 - a^2}$ δοκιμάζουμε την αντικατάσταση $x = a \sec \theta = \frac{a}{\cos \theta}$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ή $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$

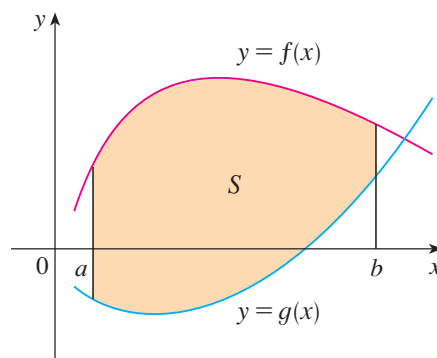
Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$, $|x| < a$, $a > 0$.

Εφαρμογές ολοκληρωμάτων

Εμβαδά επίπεδων χωρίων που περικλείονται από καμπύλες

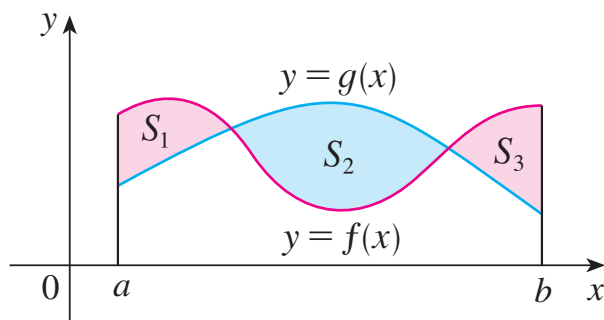
Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$, όπου οι f και g είναι συνεχείς με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$



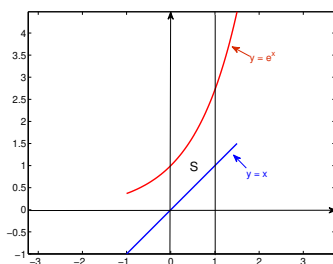
Αν δεν επιβάλλουμε τη συνθήκη $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$, όπου οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις, είναι:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

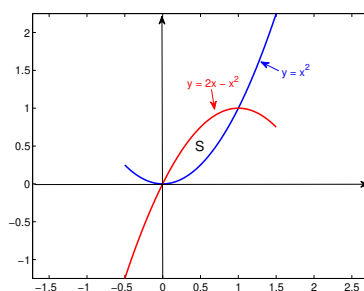


Παραδείγματα

- Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.



- Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές $y = x^2$ και $y = 2x - x^2$.



Μήκος επίπεδης καμπύλης

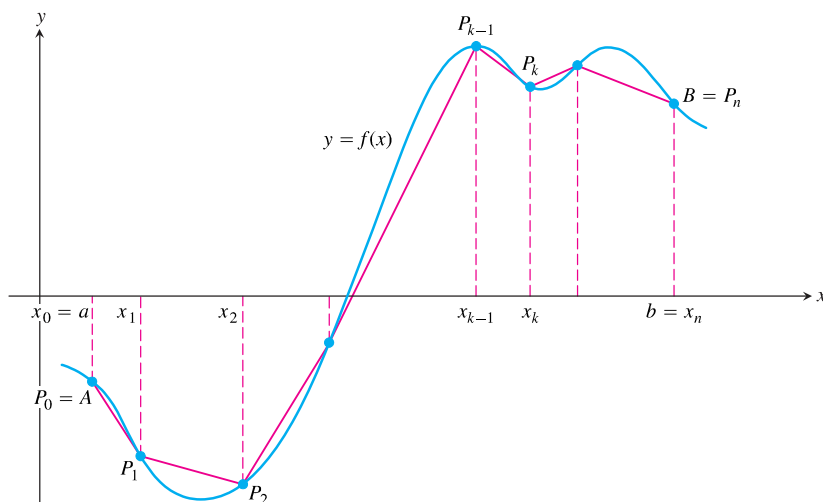
Έστω ότι η καμπύλη της οποίας θέλουμε να καθορίσουμε το μήκος είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$, με πεδίο ορισμού το $[a, b]$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η f έχει παράγωγο που είναι και αυτή συνεχής στο $[a, b]$.

Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται **ομαλή**, και η αντίστοιχη καμπύλη λέγεται **ομαλή καμπύλη** αφού δεν παρουσιάζει αιχμές, “σπασίματα”, γωνίες κλπ.

Θεωρούμε μια διαμέριση του $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

και συμβολίζουμε με P_k , $k = 0, 1, \dots, n$, τα σημεία της καμπύλης με συντεταγμένες $(x_k, y_k) = (x_k, f(x_k))$.

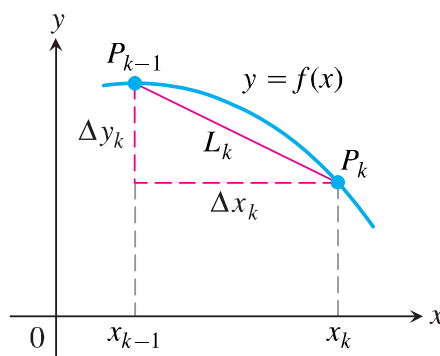


Τότε το μήκος της πολυγωνικής γραμμής $P_0P_1 \dots P_n$, προσεγγίζει το μήκος της καμπύλης.

Θέτουμε

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \text{και} \quad \Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1}),$$

και εστιάζουμε στο υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$



Τότε το μήκος του ευθ. τμήματος $P_{k-1}P_k$ είναι

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}. \quad (3)$$

Από ΘΜΤ $\exists \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$:

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k) \Leftrightarrow \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = f'(\xi_k) \Leftrightarrow \Delta y_k = f'(\xi_k) \Delta x_k. \quad (4)$$

Άρα μπορούμε να προσεγγίσουμε το μήκος της καμπύλης $y = f(x)$ από το σημείο A έως το B με το άθροισμα

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n L_k &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \stackrel{(4)}{=} \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(\xi_k) \Delta x_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k. \end{aligned}$$

Το άθροισμα αυτό είναι ένα **άθροισμα Riemann** της συνάρτησης $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$, που είναι συνεχής, επομένως αν πάρουμε όρια για $n \rightarrow \infty$ έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n L_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Ορισμός

Αν f' είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε το **μήκος της καμπύλης** $y = f(x)$ από το σημείο $A(a, f(a))$ έως το σημείο $B(b, f(b))$ είναι η τιμή του ολοκληρώματος

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (5)$$

Παράδειγμα. Βρείτε το μήκος της καμπύλης $y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2} - 1$ από το $x = 0$ μέχρι το $x = 1$.

Μερικές φορές είναι βολικό να εκφράσουμε το x ως συνάρτηση του y , π.χ. αν έχουμε $x = g(y)$, $a \leq y \leq b$. Τότε το μήκος της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \quad (6)$$

Τέλος, αν μια καμπύλη δίνεται παραμετρικά από τις εξισώσεις

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad t \in [t_a, t_b],$$

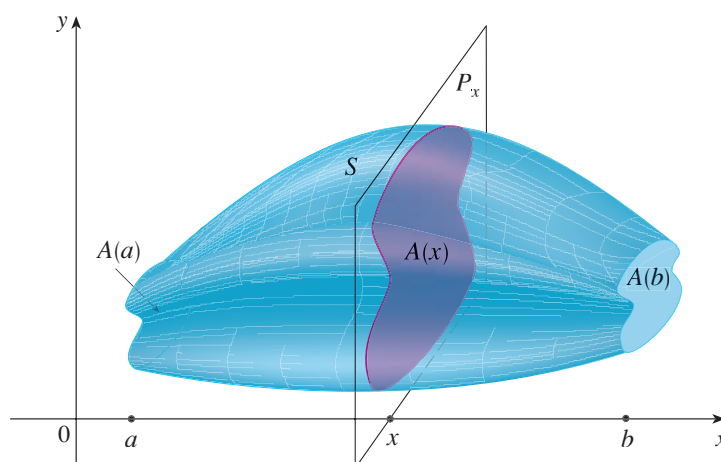
ισχύει:

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (7)$$

Παράδειγμα. Βρείτε το μήκος κύκλου ακτίνας ρ .

Υπολογισμός όγκου στερεού με χρήση του εμβαδού διατομής

Μια **διατομή** ενός στερεού S είναι το επίπεδο χωρίο που σχηματίζεται από την τομή του S με ένα επίπεδο

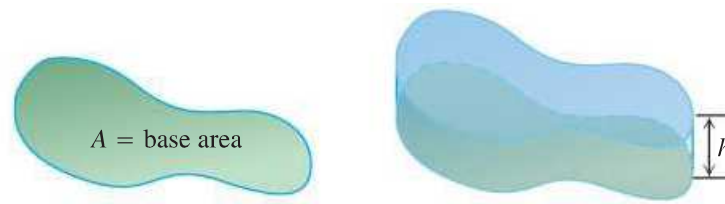


Π.χ. Το εμβαδόν $A(x)$ της διατομής του στερεού S που σχηματίζεται από την τομή του S με το επίπεδο P_x που είναι κάθετο στον x -άξονα και διέρχεται από το σημείο $(x, 0)$, $x \in [a, b]$.



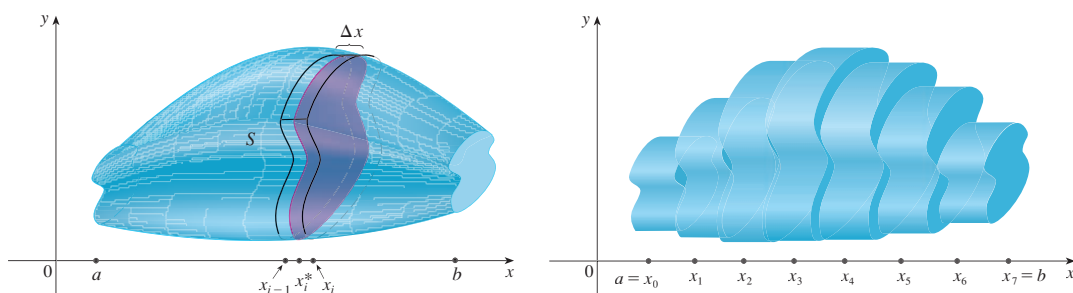
Αν γνωρίζουμε το εμβαδόν της βάσης ενός **κυλινδρικού στερεού**, έστω A , και το ύψος h , τότε ο όγκος του κυλινδρικού στερεού είναι

$$\text{Όγκος} = \text{βάση} \times \text{ύψος} = A \cdot h.$$



Χωρίζουμε το S σε n “φέτες” ίσου πάχους Δx .

Σε κάθε διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, επιλέγουμε ενδιάμεσα σημεία x_i^* και προσεγγίζουμε την i -οστή φέτα S_i από το κυλινδρικό στερεό με εμβαδό βάσης $A(x_i^*)$ και πάχος Δx :



Άρα μια προσέγγιση του όγκου της i -οστής φέτας S_i θα είναι

$$V(S_i) \approx A(x_i^*) \Delta x.$$

$$\therefore V \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x.$$

Αυτό όμως είναι ένα άθροισμα Riemann για τη συνάρτηση $A(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, επομένως αναμένουμε ότι καθώς λεπταίνουμε ολοένα και περισσότερο τη διαμέριση του $[a, b]$ θα έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx.$$

Ορισμός

Ο όγκος V ενός στερεού με εμβαδό διατομής που δίνεται από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $A(x)$, για $x \in [a, b]$, είναι

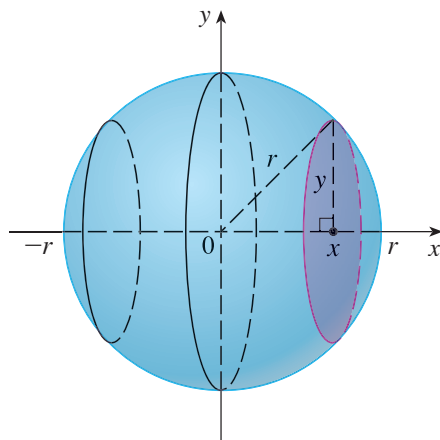
$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Επομένως στις περιπτώσεις που η $A(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και, ειδικότερα, συνεχής, υπολογίζουμε τον όγκο ενός στερεού εκτελώντας τα ακόλουθα βήματα:

- 1 Σχεδιάζουμε το στερεό και μια τυπική διατομή του.
- 2 Βρίσκουμε ένα τύπο για το εμβαδό μιας τυπικής διατομής $A(x)$.
- 3 Καθορίζουμε τα όρια ολοκλήρωσης a και b .
- 4 Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση $A(x)$ από a έως b για να βρούμε τον όγκο του στερεού.

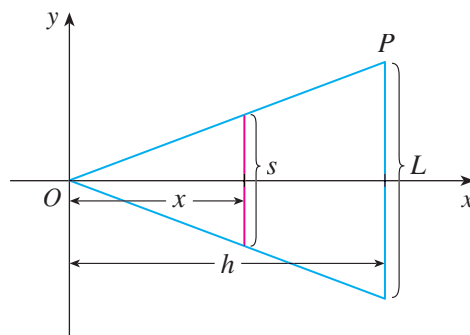
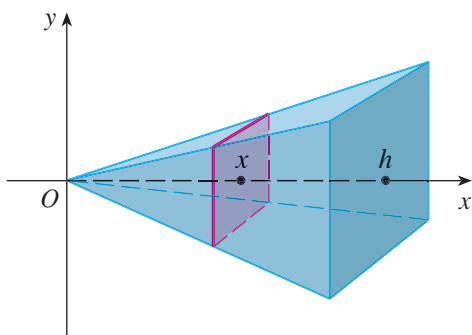
Παραδείγματα

- (1) Δείξτε ότι ο όγκος της σφαίρας με ακτίνα r είναι ίσος με $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

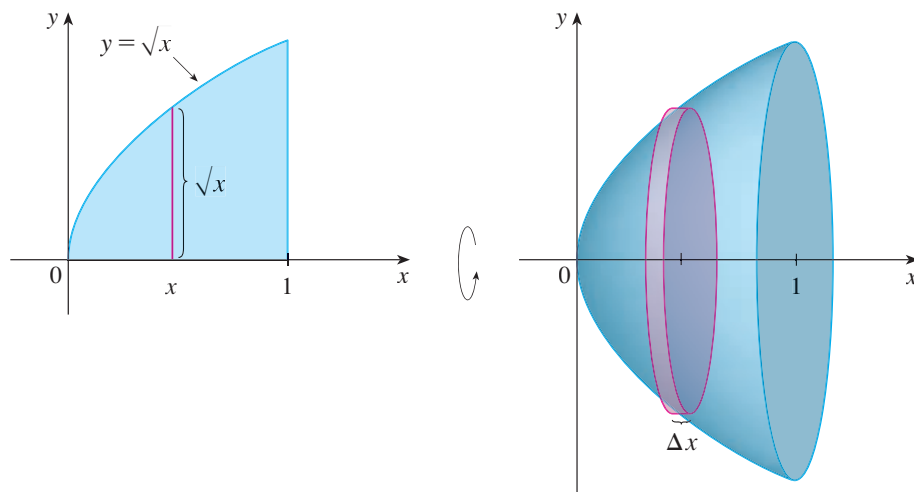


- (2) Βρείτε τον όγκο μιας πυραμίδας που η βάση της είναι τετράγωνο πλευράς L και το ύψος της είναι ίσο με h .

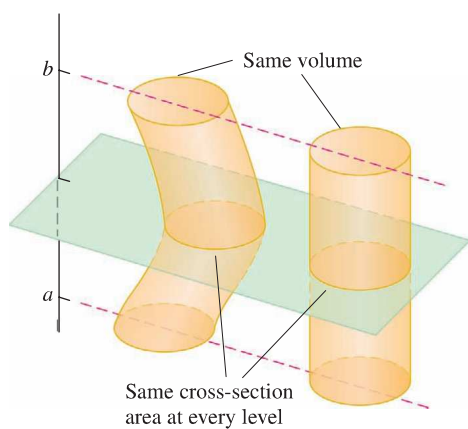
Τοποθετούμε την κορυφή της πυραμίδας στην αρχή των αξόνων έτσι ώστε ο κεντρικός της άξονας να βρίσκεται πάνω στον x -άξονα.



- (3) Βρείτε τον όγκο του στερεού του ακόλουθου σχήματος, που δημιουργείται αν περιστρέψουμε γύρω από τον x -άξονα το χωρίο που περικλείεται από το γράφημα της $y = \sqrt{x}$ και τον x -άξονα, για $0 \leq x \leq 1$.



- (4) **Αρχή του Cavalieri:** Ας υποθέσουμε ότι δύο στερεά περιέχονται μεταξύ δύο παράλληλων επιπέδων. Αν η τομή κάθε επιπέδου, που είναι παράλληλο προς τα επίπεδα αυτά, με τα στερεά ορίζει χωρία που έχουν ίσο εμβαδόν, τότε τα στερεά αυτά έχουν ίσο όγκο.



$$\int_1^{+\infty} x \, dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx$$



Στο πρώτο «ολοκλήρωμα» το διάστημα $[1, +\infty)$ δεν είναι κλειστό και φραγμένο.

Στο δεύτερο «ολοκλήρωμα» η συνάρτηση $y = 1/x$ δεν ορίζεται στο διάστημα $[0, 1]$ και, μάλιστα, δεν είναι καν φραγμένη στο διάστημα αυτό αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Τέτοιου τύπου «ολοκληρώματα», υπό ορισμένες προϋποθέσεις, ονομάζονται **γενικευμένα** ή **καταχρηστικά** ολοκληρώματα.

Τύπος Ι: «Άπειρα διαστήματα»

- ❶ Αν το $\int_a^t f(x) \, dx$ υπάρχει για οποιοδήποτε αριθμό $t \geq a$, τότε

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) \, dx,$$

αν υπάρχει το όριο αυτό.

- ❷ Αν το $\int_t^b f(x) \, dx$ υπάρχει για οποιοδήποτε αριθμό $t \leq b$, τότε

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) \, dx,$$

αν υπάρχει το όριο αυτό.

Αν υπάρχουν τα παραπάνω όρια θα λέμε ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ και $\int_{-\infty}^b f(x) \, dx$ συγκλίνουν, ενώ θα λέμε ότι αποκλίνουν αν τα όρια αυτά δεν υπάρχουν.

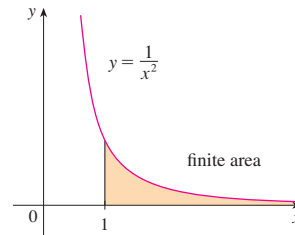
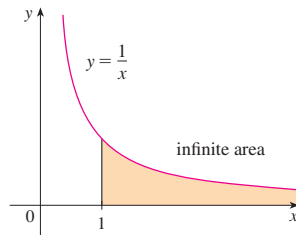
- ❸ Αν υπάρχουν τα $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ και $\int_{-\infty}^a f(x) \, dx$, τότε ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^a f(x) \, dx + \int_a^{+\infty} f(x) \, dx.$$

Παραδείγματα

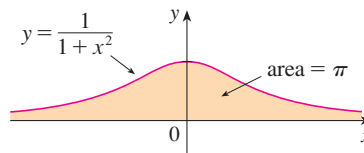
❶ Το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει;

❷ Το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει;



❸ Το $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει;

❹ Το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει;



Τύπος II: Ολοκληρώματα ασυνεχών συναρτήσεων

❶ Αν f είναι συνεχής στο $[a, b)$ και ασυνεχής στο b , τότε

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx,$$

αν υπάρχει το όριο αυτό.

❷ Αν f είναι συνεχής στο $(a, b]$ και ασυνεχής στο a , τότε

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx,$$

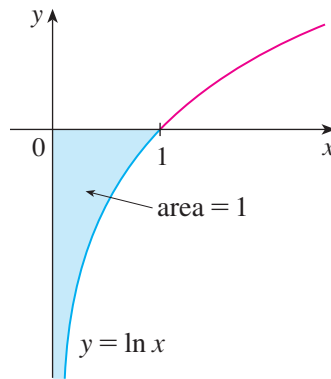
αν υπάρχει το όριο αυτό.

❸ Αν η f είναι ασυνεχής στο c , $a < c < b$, και τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^c f(x) dx$ και $\int_c^b f(x) dx$ συγκλίνουν, τότε

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Παραδείγματα

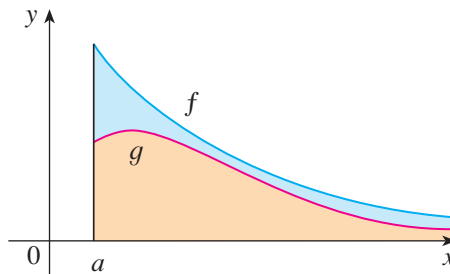
- ❶ Υπολογίστε το $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$ αν είναι δυνατόν.
- ❷ Υπολογίστε το $\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx$ αν είναι δυνατόν.
- ❸ Υπολογίστε το $\int_0^1 \ln x dx$ αν είναι δυνατόν.



Θεώρημα (σύγκρισης)

Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) \geq g(x)$, για $x \geq a$, τότε

- (i) Αν το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ συγκλίνει.
- (ii) Αν το $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ αποκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ αποκλίνει.



(Το θεώρημα αυτό διατυπώνεται για γενικευμένα ολοκληρώματα τύπου I, αλλά με τις κατάλληλες τροποποιήσεις ισχύει και για γενικευμένα ολοκληρώματα τύπου II.)

Παράδειγμα. Ελέγξτε αν το $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει.