

Παράγωγοι

Δ.Α. Μητσούδης

Ένα γεωμετρικό πρόβλημα: εφαπτομένη καμπύλης

Θεωρούμε μια καμπύλη $C : y = f(x)$, που είναι το γράφημα μιας συνάρτησης f . Αναζητούμε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από ένα σημείο της καμπύλης $P(a, f(a))$ και εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο αυτό.

Θεωρούμε ένα γειτονικό σημείο $Q(x, f(x))$, με $x \neq a$, και υπολογίζουμε το συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) της τέμνουσας ευθείας PQ

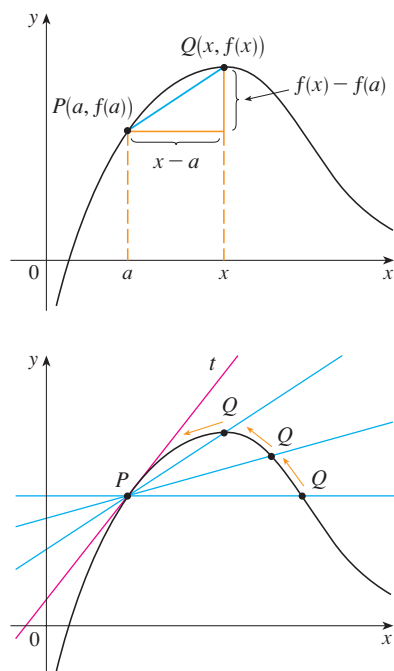
$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

Τώρα, καθώς το x πλησιάζει το a , το σημείο Q πλησιάζει στο σημείο P .

Αν η κλίση m_{PQ} τείνει σε κάποιο αριθμό m , καθώς το $x \rightarrow a$, τότε ορίζουμε ως **εφαπτόμενη ευθεία** της καμπύλης C στο σημείο P , την ευθεία t που διέρχεται από το σημείο P και έχει συντελεστή διεύθυνσης m .

Με άλλα λόγια, η εφαπτόμενη ευθεία είναι η “οριακή θέση” της τέμνουσας ευθείας PQ καθώς το Q πλησιάζει προς το P

Εφαπτομένη καμπύλης



Εφαπτομένη καμπύλης

Ορισμός

Η εφαπτόμενη ευθεία t της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $P(a, f(a))$, είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο P και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει.

Στιγμιαία ταχύτητα

Ένα όχημα κινείται πάνω σε έναν ευθύ δρόμο με μεταβαλλόμενη ταχύτητα.

Η ταχύτητα δεν είναι γνωστή – το ταχύμετρο είναι χαλασμένο – αλλά δουλεύει το ρολόι και ο δείκτης χιλιομετρικών αποστάσεων.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του οχήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Μετράμε τις αποστάσεις $s(t_1)$ και $s(t_2)$ του οχήματος από κάποιο σταθερό σημείο της ευθείας σε δυο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 .

Τότε η μέση ταχύτητα ανάμεσα στις δυο αυτές χρονικές στιγμές είναι ίση με

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Για να υπολογίσουμε τη στιγμιαία ταχύτητα σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή τ (υπό την προϋπόθεση ότι η ταχύτητα του οχήματος δεν παρουσιάζει απότομες μεταβολές σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα) θεωρούμε τη χρονική μεταβλητή t να πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε στο τ .

Τότε ορίζουμε ως **στιγμιαία ταχύτητα** $v(\tau)$ το όριο της μέσης ταχύτητας

$$v(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau}.$$

Πίσω και από τα δύο αυτά παραδείγματα κρύβεται η έννοια του ρυθμού μεταβολής.

Παράγωγος

Ορισμός

Η **παράγωγος** μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο ξ , συμβολίζεται με $f'(\xi)$, και είναι ίση με

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

εφ' όσον το όριο αυτό υπάρχει.

Άλλοι συμβολισμοί:

$$Df(\xi) \quad \text{ή} \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\xi} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Παράγωγος

Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $h = x - \xi \Leftrightarrow x = \xi + h$, τότε ένας άλλος ισοδύναμος τρόπος για να γράψουμε την παράγωγο είναι

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}.$$

Αν η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι αριθμός και όχι $\pm\infty$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη στον ξ .

Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της, τότε λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο (a, b) και $a < \xi < b$.

Αν η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στο ξ , τότε έχει παραγώγους στο ξ και από τα δεξιά του και από τα αριστερά του, και αυτές οι πλευρικές παράγωγοι στο ξ είναι ίσες με την παράγωγο στο ξ , δηλαδή

$$f'_-(\xi) = f'_+(\xi) = f'(\xi).$$

Αντιστρόφως, αν η $y = f(x)$ έχει παραγώγους στο ξ και από τα δεξιά του και από τα αριστερά του και αυτές είναι ίσες, τότε η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στο ξ ίση με την κοινή τιμή των δυο πλευρικών παραγώγων.

- 1 Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 8x + 9$ στον ξ .
- 2 Η $f(x) = |x|$ ορίζεται στο $(-\infty, \infty)$. Ελέγξτε σε ποιά διαστήματα είναι παραγωγίσιμη.

Παράγωγος συνάρτηση

Ορισμός

Αν θεωρήσουμε το σύνολο όλων των ξ στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ στους οποίους αυτή είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή όλων των ξ για τους οποίους υπάρχει ο $f'(\xi)$ και είναι αριθμός, τότε με αυτό το σύνολο ως πεδίο ορισμού ορίζεται η **παράγωγος συνάρτηση** της $y = f(x)$, η οποία συμβολίζεται

$$f'(x) \quad \text{ή} \quad Df(x) \quad \text{ή} \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx}.$$

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο ξ , τότε η f είναι συνεχής στο ξ .

Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος **δεν ισχύει**.

Γεωμετρική ερμηνεία της έννοιας της παραγώγου

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο (a, b) , ότι $a < \xi < b$ και ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στον ξ .

Τότε η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι ίση με $f'(\xi)$, οπότε:

εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας: $y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi), \quad (f'(\xi) \neq \pm\infty).$

Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ και $f'(\xi) = +\infty$ ή $f'(\xi) = -\infty$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο $(\xi, f(\xi))$ είναι κατακόρυφη και

εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας: $x = \xi, \quad (f'(\xi) = \pm\infty).$

Παραδείγματα παραγώγων - Α΄

- ❶ Αν $f(x) = c$, είναι η σταθερή συνάρτηση, τότε $f'(x) = 0$.
- ❷ Αν $f(x) = x$, τότε $f'(x) = 1$.
- ❸ Αν $f(x) = x^n$, τότε $f'(x) = nx^{n-1}$.
- ❹ Αν $f(x) = \sin x$, τότε $f'(x) = \cos x$.
- ❺ Αν $f(x) = \cos x$, τότε $f'(x) = -\sin x$.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c, c \in \mathbb{R}$ σταθ.	0	e^x	e^x
x	1	a^x	$a^x \ln a$
x^n, n ακέραιος	nx^{n-1}	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x^p, p ρητός, $x > 0$	px^{p-1}	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Πράξεις με παραγώγους

Πρόταση

Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στον ξ . Τότε το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και, αν $g(\xi) \neq 0$, ο λόγος των δυο συναρτήσεων, είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στον ξ και ισχύουν οι τύποι:

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(\xi) &= f'(\xi) \pm g'(\xi), \\ (fg)'(\xi) &= f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) &= \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}.\end{aligned}$$

(Τα ίδια ισχύουν και για τις πλευρικές παραγώγους.)

Πρόταση (Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης – Κανόνας της αλυσίδας)

Έστω ότι ορίζεται η σύνθεση $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ των $y = f(x)$ και $z = g(y)$. Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και η $z = g(y)$ είναι παραγωγίσιμη στον $\eta = f(\xi)$, τότε η $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi) = g'(f(\xi))f'(\xi).$$

Χρησιμοποιώντας τους εναλλακτικούς συμβολισμούς μας για την παράγωγο, ο κανόνας της αλυσίδας (για τον γενικό x , αντί του ειδικού ξ) γράφεται ως

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(x) &= Dg(f(x))Df(x), \\ \frac{dg(f(x))}{dx} &= \frac{dg(y)}{dy} \Big|_{y=f(x)} \frac{df(x)}{dx}, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy} \Big|_{y=f(x)} \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

Παραδείγματα παραγώγων

Παράδειγμα 1. Αν $f(x) = \tan x$, τότε $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2. Αν $f(x) = a^x$, τότε $f'(x) = a^x \ln a$.

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a. \end{aligned}$$

Παραδείγματα παραγώγων

Παράδειγμα 3. Αν $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, τότε

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Παράδειγμα 4. Αν $f(x) = \sin(x^2 + 3)$, τότε $f'(x) = 2x \cos(x^2 + 3)$.

$$f(x) = (g \circ h)(x), \quad \text{όπου } g(x) = \sin x, \quad h(x) = x^2 + 3.$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \cos(h(x)) \cdot (x^2 + 3)' = \cos(x^2 + 3) \cdot 2x = 2x \cos(x^2 + 3).$$

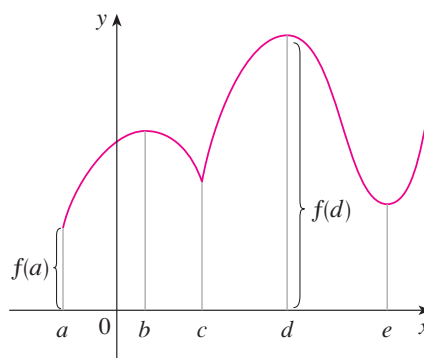
Σημαντικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού

Ορισμός

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο (a, b) και έστω $\xi \in (a, b)$. Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού μεγίστου** της $y = f(x)$ αν $f(\xi) \geq f(x)$, για “ x κοντά στο ξ ”. (Αυτό σημαίνει ότι $f(\xi) \geq f(x)$, για όλα τα x σε κάποιο ανοιχτό διάστημα που περιέχει το ξ .)

Ανάλογα, ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ελαχίστου** της $y = f(x)$ αν $f(\xi) \leq f(x)$, για x κοντά στο ξ .

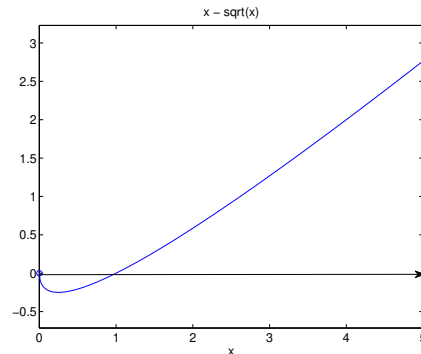
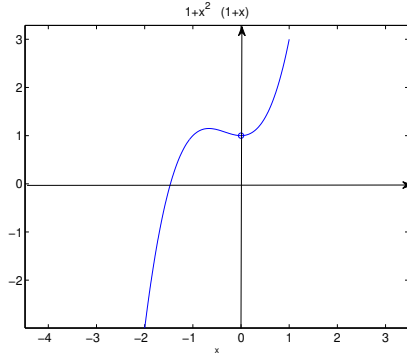
Λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο τοπικού ακροτάτου** της $y = f(x)$ αν είναι σημείο είτε τοπικού μεγίστου είτε τοπικού ελαχίστου.



Παραδείγματα

- ❶ Έστω $f(x) = 1 + x^2(x + 1)$. Παρατηρήστε ότι το 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $f(x)$ αφού $1 + x^2(1 + x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$.

Το 0 δεν είναι σημείο ολικού ελαχίστου αφού, π.χ., για $x = -2$, το $f(-2) = -3 < 1 = f(0)$.



- ❷ Έστω $g(x) = x - \sqrt{x}$. Παρατηρήστε ότι το 0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $g(x)$ αφού $x - \sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(0)$ για κάθε $x \in [0, 1)$.

Το 0 δεν είναι σημείο ολικού μεγίστου αφού, π.χ., για $x = 4$, το $g(4) = 2 > 0 = g(0)$.

Θεώρημα του Fermat

Θεώρημα

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και έστω $\xi \in (a, b)$. Αν το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου της f , τότε

- (i) είτε δεν υπάρχει η παράγωγος της $y = f(x)$ στο ξ ,
- (ii) είτε υπάρχει η παράγωγος της $y = f(x)$ στο ξ και ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρικά το Θεώρημα του Fermat ερμηνεύεται ως εξής: Αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το ξ , που είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f , τότε είτε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$, είτε υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία και η κλίση της είναι ίση με 0 (δηλαδή είναι οριζόντια).

Συνέπειες Θεωρήματος Fermat:

Αν ψάχνουμε τα σημεία τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα, τότε αρκεί να τα αναζητήσουμε ανάμεσα στα παρακάτω σημεία:

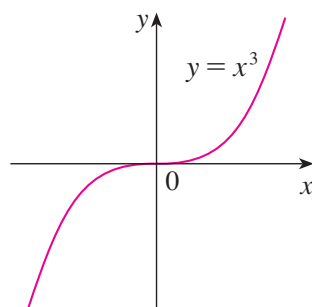
- Τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος,
- τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο, και
- τα σημεία στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0.

Κανένα άλλο σημείο δεν είναι υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παραδείγματα

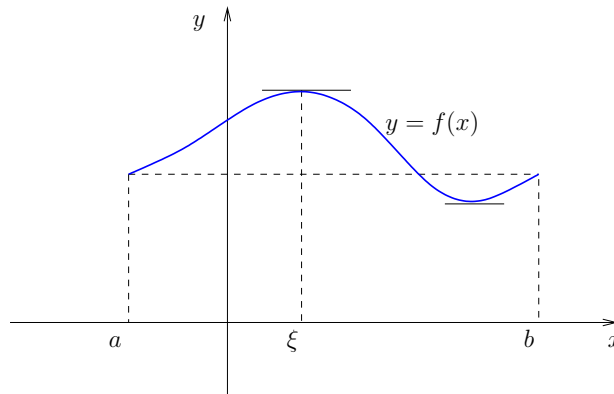
- 1 $f(x) = |x|$. Το 0 είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου, η οποία είναι ορισμένη σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$, αλλά η συνάρτηση αυτή δεν έχει παράγωγο στο 0.
- 2 $g(x) = x^2$. Το 0 είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης, η οποία είναι ορισμένη σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Η παράγωγος της συνάρτησης στο 0 είναι, πράγματι, $g'(0) = 0$.

Παρατήρηση: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$. Στο $\xi = 0$, $f'(\xi) = 0$, αλλά το $\xi = 0$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου. Άρα **δεν** ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος Fermat.



Θεώρημα

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και ότι έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (a, b) . Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει κάποιος $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.



Το Θεώρημα του Rolle εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $\xi \in (a, b)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$, αλλά δεν μας λέει τίποτα για το πώς να εντοπίσουμε ένα τέτοιο ξ .



Αν η f στο Θεώρημα του Rolle δεν έχει παράγωγο έστω και σε ένα μόνο σημείο του (a, b) , υπάρχει περίπτωση να μην υπάρχει κανένα ξ στο (a, b) ώστε $f'(\xi) = 0$.

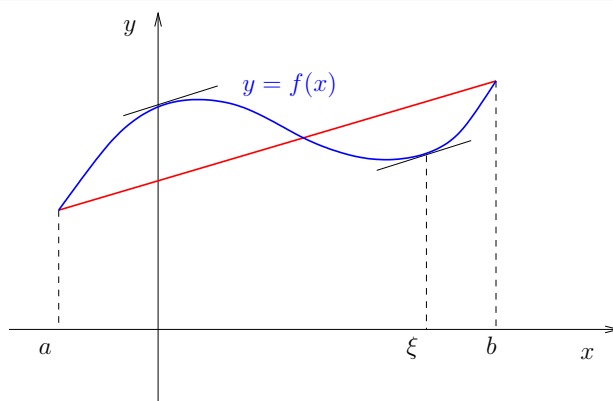
Παράδειγμα: Η $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ και $f(-1) = f(1) = 1$. Δεν υπάρχει όμως κανένα $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού

Θεώρημα (Lagrange)

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και ότι έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (a, b) . Τότε υπάρχει κάποιο $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Γεωμετρικά, το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) ερμηνεύεται ως εξής:

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) , τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημά της σε κάποιο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει την ίδια κλίση και, άρα, είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

Τι μας λέει η παράγωγος μιας συνάρτησης για τη συνάρτηση;

Πρόταση

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I . Τότε

- ❶ Η f είναι σταθερή στο $I \Leftrightarrow f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I .
- ❷ Η f είναι αύξουσα στο $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I .
(Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.)
- ❸ Η f είναι φθίνουσα στο $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I .
(Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.)

Τι μας λέει η παράγωγος μιας συνάρτησης για τη συνάρτηση;

Πρόταση

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα (a, b) , και $\xi \in (a, b)$.

- ❶ Αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f .
- ❷ Αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f .

Παράδειγμα

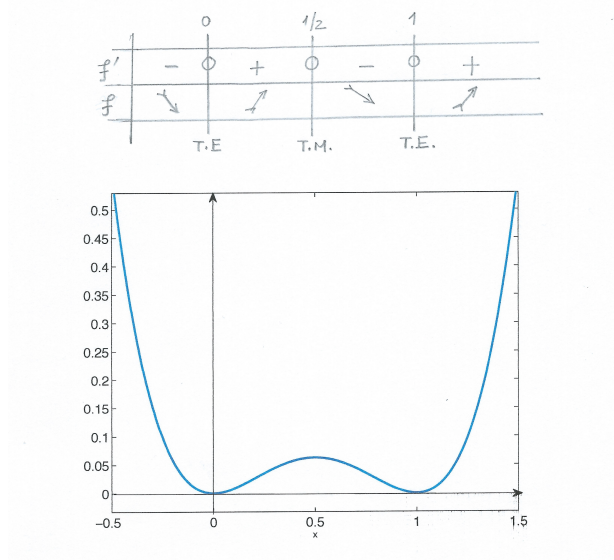
Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^2(x-1)^2$.

Τότε $f'(x) = 2x(x-1)(2x-1)$.

Άρα $f'(x) < 0$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (1/2, 1)$, ενώ $f'(x) > 0$ για $x \in (0, 1/2) \cup (1, +\infty)$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(1/2, 1)$, και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0, 1/2)$ και $(1, +\infty)$



Δεύτερη παράγωγος

Ορισμός

Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το ξ , και η παράγωγος $y = f'(x)$ έχει και αυτή παράγωγο στο ξ , δηλαδή υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi},$$

τότε το όριο αυτό λέγεται δεύτερη παράγωγος της f στο ξ .

Συμβολίζουμε τη δεύτερη παράγωγο ως

$$f''(\xi) \quad \text{ή} \quad D^2 f(\xi) \quad \text{ή} \quad \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=\xi} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}.$$

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Ανάλογα ορίζουμε την τρίτη παράγωγο ως την πρώτη παράγωγο της δεύτερης παραγώγου και, γενικά ορίζουμε ως n -οστή παράγωγο την πρώτη παράγωγο της $(n-1)$ -οστής παραγώγου.

Για την n -οστή παράγωγο χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$f^{(n)}(\xi) \quad \text{ή} \quad D^n f(\xi) \quad \text{ή} \quad \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=\xi} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(\xi)}{x - \xi}.$$

Εφαρμογές δεύτερης παραγώγου

Πρόταση (Τοπικά ακρότατα συνάρτησης)

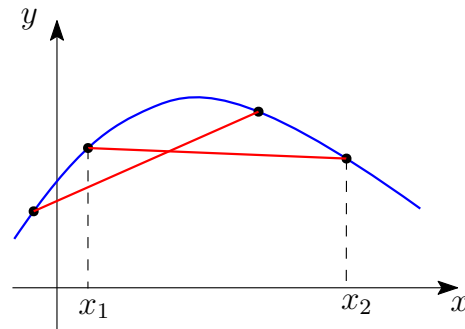
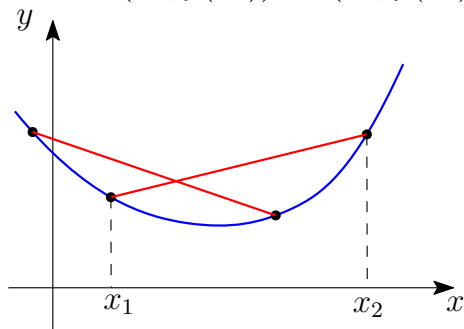
Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b) , $\xi \in (a, b)$ και η $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο στον ξ .

- ❶ Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.
- ❷ Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι **κυρτή** στο διάστημα I (ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) αν για κάθε x_1, x_2 στο I με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι **κοίλη** στο διάστημα I (ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) αν για κάθε x_1, x_2 στο I με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.



Κριτήρια

Πρόταση

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I .

- ❶ Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο $I \Leftrightarrow$ η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I .
- ❷ Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο $I \Leftrightarrow$ η f' είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του I .

Πρόταση

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει δεύτερη παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I .

- ❶ Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I .
- ❷ Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I .

Σημεία καμπής

Έστω ότι η $y = f(x)$ ορίζεται στο διάστημα (a, b) , $\xi \in (a, b)$, και η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ .

Αν η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο $(a, \xi]$ και κοίλη στο $[\xi, b)$ ή, αντιθέτως, αν είναι κοίλη στο $(a, \xi]$ και κυρτή στο $[\xi, b)$, τότε ο ξ είναι **σημείο καμπής** της συνάρτησης.

Πρόταση

Έστω ότι η $y = f(x)$ ορίζεται στο διάστημα (a, b) , $\xi \in (a, b)$, και η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ .

Αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε x στο $(a, \xi]$ και $f''(x) \leq 0$ για κάθε x στο $[\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.

Ανάλογα, αν $f''(x) \leq 0$ για κάθε x στο $(a, \xi]$ και $f''(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[\xi, b)$, τότε και πάλι ο ξ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.

Διαφορικό - 1



Ορίσαμε την παράγωγο μιας συνάρτησης $y = f(x)$ ως

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

όπου $\Delta x = h$ και $\Delta y = f(x+h) - f(x)$.

Σταθεροποιούμε το x , αφήνουμε το h να μεταβάλλεται και ορίζουμε την ποσότητα

$$\epsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x).$$

Προφανώς

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Διαφορικό - 2

Η ποσότητα $\Delta y = f(x + h) - f(x)$ εκφράζει τη μεταβολή που επιφέρουμε στην εξαρτημένη μεταβλητή y όταν μεταβάλλουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή x κατά την ποσότητα $\Delta x = h$.

$$\Delta y = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\text{ορ. } dy} + \underbrace{\epsilon \Delta x}_{\text{μικρό}}$$

$$\text{Διαφορικό: } dy = df(x) = f'(x) \Delta x$$

Άρα για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f και κάθε σταθερό x το διαφορικό είναι μια καλώς ορισμένη γραμμική συνάρτηση του $h = \Delta x$.

Διαφορικό - 3

Παράδειγμα: Για την $y = x^2$ έχουμε:

$$dy = d(x^2) = 2x \Delta x = 2xh.$$

Παράδειγμα: Για την $y = x$ έχουμε:

$$dy = dx = 1 \Delta x = \Delta x.$$

Άρα είναι συνεπές με τον ορισμό μας να γράφουμε dx αντί για Δx όταν το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή.

$$\text{Διαφορικό: } dy = df(x) = f'(x) dx$$

$$\Delta y = f'(x) dx + \epsilon dx = dy + \epsilon dx.$$

Διαφορικό - 4

Παράδειγμα: Για την $y = x^2$ έχουμε:

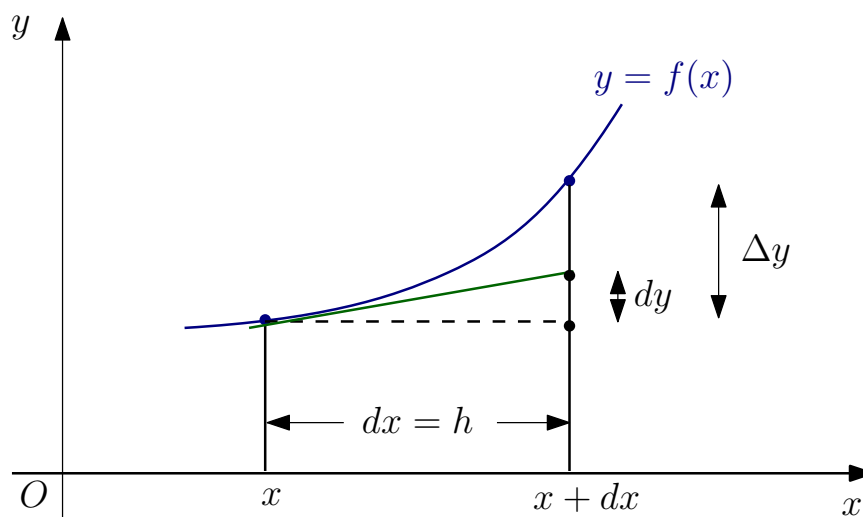
$$dy = 2x dx$$

και

$$\Delta y = (x + dx)^2 - x^2 = 2x dx + (dx)^2 = dy + \epsilon dx,$$

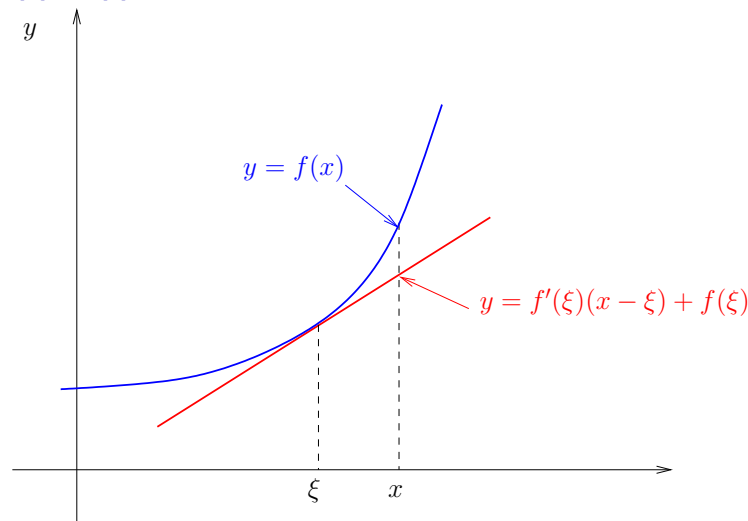
όπου $\epsilon = dx$.

Διαφορικό - 5



$$f(x + h) = f(x) + h f'(x) + \epsilon h$$

Θέματα προσέγγισης



$$f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi). \quad (1)$$



Αν γνωρίζουμε την τιμή μιας συνάρτησης $f(\xi)$ στο σημείο ξ , μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγίσεις των τιμών $f(x)$ της συνάρτησης για σημεία x που βρίσκονται κοντά στο ξ χρησιμοποιώντας την (1).

Θέματα προσέγγισης

Η προσέγγιση (1) καλείται η **γραμμική προσέγγιση της f στο ξ** . Η γραμμική συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι η εφαπτομένη ευθεία, δηλαδή, η

$$\ell(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi),$$

λέγεται **γραμμικοποίηση της f στο ξ** .

Παράδειγμα. Υπολογίστε προσεγγιστικά την $\sqrt{3.98}$ γραμμικοποιώντας τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+3}$ στο $\xi = 1$.

Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$, επομένως

$$f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) = f(1) + f'(1)(x - 1) \Rightarrow f(x) \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 1).$$

Άρα

$$\sqrt{3.98} = \sqrt{0.98 + 3} = f(0.98) \approx 2 + \frac{1}{4}(0.98 - 1) = 1.995.$$

Η ακριβής τιμή είναι $\sqrt{3.98} = 1.99499373 \dots$

Τύπος του Taylor – I

Αποδεικνύεται ότι κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε το σφάλμα της προσέγγισης (1) .

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι αν f, f' είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα μεταξύ των ξ και x και υπάρχει η f'' στο ανοικτό διάστημα μεταξύ των ξ και x , τότε

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \frac{(x - \xi)^2}{2}f''(\eta), \quad (2)$$

όπου το η είναι ένας αριθμός μεταξύ των ξ και x .

Η (2) λέγεται **τύπος του Taylor με τετραγωνικό σφάλμα**.

Τύπος του Taylor – II

Ανάλογα, αν f, f', f'' είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα μεταξύ των ξ και x και υπάρχει η f''' στο ανοικτό διάστημα μεταξύ των ξ και x , τότε

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \frac{(x - \xi)^2}{2}f''(\xi) + \frac{(x - \xi)^3}{6}f'''(\nu), \quad (3)$$

όπου το ν είναι ένας αριθμός μεταξύ των ξ και x .

Η (3) λέγεται **τύπος του Taylor με κυβικό σφάλμα**.

Τύπος του Taylor – III

Ο γενικός τύπος του Taylor είναι

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \cdots + \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\xi) + \frac{(x - \xi)^n}{n!}f^{(n)}(\eta).$$

όπου το η είναι ένας αριθμός μεταξύ των ξ και x .

Παράδειγμα

$f(x) = e^x$ Taylor γύρω από το 0.

$$f(x) = f(0) + (x-0) \cdot f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} \cdot f''(0) + \cdots + \frac{(x-0)^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\eta)$$

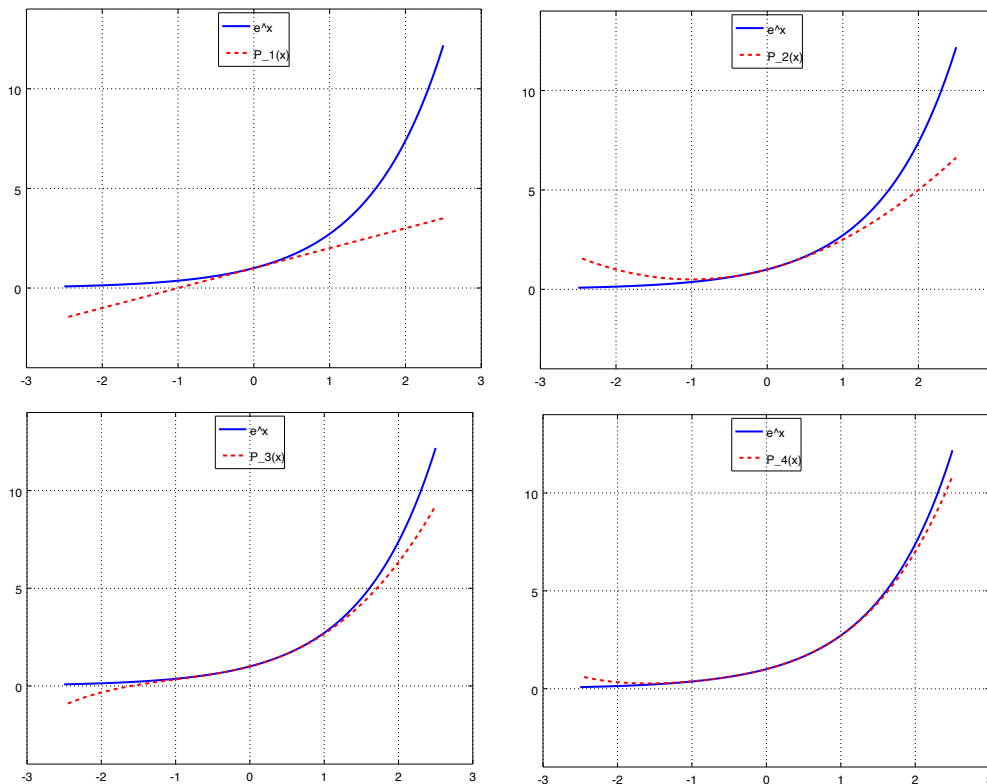
η μεταξί 0 και x .

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$P_n(x)$ πολυώνυμο Taylor

Π.χ. $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$

Προσέγγιση της e^x με πολυώνυμα Taylor



Προσοχή!

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει ο βαθμός του πολυωνύμου η προσέγγιση γίνεται ολοένα και καλύτερη **αλλά μόνον για τιμές του x κοντά στο 0**.

Π.χ., αν προσεγγίσουμε την τιμή e^4 με το πολυώνυμο Taylor βαθμού 4 θα έχουμε:

$$e^4 = 54.59815 \approx 1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6} + \frac{4^4}{24} = 34.33333.$$

$$\begin{aligned} \text{Σχετικό σφάλμα} &= \frac{|\text{ακριβής τιμή} - \text{προσεγγιστική τιμή}|}{|\text{ακριβής τιμή}|} \\ &= \left| \frac{54.59815 - 34.33333}{54.59815} \right| \approx 0.3712 \approx \mathbf{37\%!!!} \end{aligned}$$

Απροσδιόριστες μορφές: Κανόνας Ι' Hopitâl

Απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$.

Πρόταση (Πρώτος Κανόνας Ι' Hopitâl)

Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα I (εκτός πιθανώς από το σημείο ξ που περιέχεται στο I) και ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0.$$

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή. Δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Απροσδιοριστία $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Πρόταση (Δεύτερος Κανόνας Ι' Hopitâl)

Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα I (εκτός πιθανώς από το σημείο ξ που περιέχεται στο I) και ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad -\infty.$$

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή. Δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Παραδείγματα

Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια.

- ❶ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2}$. Απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Πρώτος κανόνας l' Hopitâl

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x + x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0.$$

- ❷ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$. Απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3x^2} = +\infty.$$

- ❸ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$.

Για $x \rightarrow 0^+$ απροσδιοριστία $(+\infty) - (+\infty)$, ενώ για $x \rightarrow 0^-$ απροσδιοριστία $(-\infty) - (-\infty)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Παραμετρικές εξισώσεις καμπύλης

Έστω $x = f(t)$ και $y = g(t)$ συνεχείς σε κάποιο διάστημα I της μεταβλητής t .

Το σύνολο C των σημείων $(x, y) = (f(t), g(t))$ του επιπέδου, όταν η μεταβλητή t διατρέχει το διάστημα I , χαρακτηρίζεται **καμπύλη στο επίπεδο**.

Οι συναρτήσεις $x = f(t)$ και $y = g(t)$ που περιγράφουν την καμπύλη C λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης**, ενώ η μεταβλητή t ονομάζεται παράμετρος της καμπύλης.

Πολλές φορές η παράμετρος t δηλώνει χρόνο, οπότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε το σημείο $(x, y) = (f(t), g(t))$ ως τη θέση ενός κινούμενου σωματιδίου πάνω στην καμπύλη C στη χρονική στιγμή t .

Έστω x και y παραγωγίσιμες συναρτήσεις του t και $\frac{dx}{dt} \neq 0$ για $t \in I$.

Τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η $x = f(t)$ ορίζει έμμεσα το t ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x , ας πούμε $t = h(x)$.

Τότε η $y = g(t) = g(h(x))$ είναι επίσης παραγωγίσιμη συνάρτηση του x ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Παράδειγμα 1

Θεωρήστε την καμπύλη $x = 2t + 3$, $y = t^2 - 1$. Τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{2} = t = \frac{x-3}{2}.$$

$x = 2t + 3, y = t^2 - 1$
 $\Downarrow$
 $t = \frac{x-3}{2}$ Άρα $y = t^2 - 1 = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 1$
 $y(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 1$
 $y'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2(x-3) \Rightarrow y'(x) = \frac{x-3}{2}.$

Παράδειγμα 2

Σχεδιάστε την τροχιά που διαγράφει το σημείο $P(x, y)$ αν: $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t - \frac{1}{t}$, $t > 0$.

$$x = t + \frac{1}{t}, \quad y = t - \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$
$$\text{Άρα } x + y = t + \frac{1}{t} + t - \frac{1}{t} = 2t \Rightarrow t = \frac{x+y}{2} \quad (1)$$
$$x - y = t + \frac{1}{t} - t + \frac{1}{t} = \frac{2}{t} \Rightarrow x - y = \frac{2}{t} \quad (2)$$
$$(2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x - y = \frac{2}{\frac{x+y}{2}} \Rightarrow (x-y)(x+y) = 4 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4$$

Υπερβολή

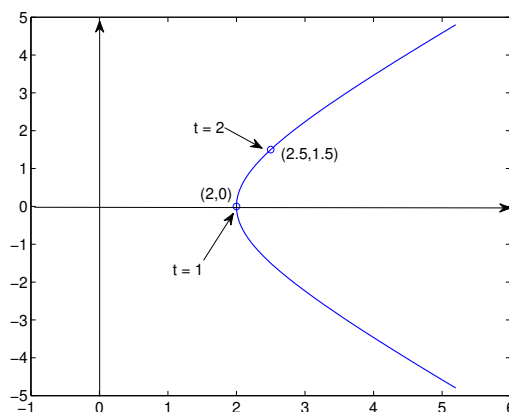
Έστω ότι αναζητώ την κλίση σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης εκτός από το $t=1$ (κατακόρυφη ασύμπτωτη).

Κανόνας αλυσίδας: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{1 - \frac{1}{t^2}} = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}.$

Παράδειγμα 2

Σχεδιάστε την τροχιά που διαγράφει το σημείο $P(x, y)$ αν

$$x = t + \frac{1}{t}, \quad y = t - \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

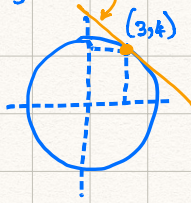


Παράδειγμα 3

Αν $x^2 + y^2 = 25$ υπολογίστε την $\frac{dy}{dx}$. Στη συνέχεια βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $(3, 4)$.

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = 25 \\ & \text{Έχουμε } \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0. \quad (*) \\ & \text{Προσοχή: Το } y \text{ είναι συνάρτηση του } x. \\ & \text{Άρα από κανόνα αλυσίδας: } \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2) \cdot \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} \\ & \text{Άρα } (*) \Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

... Παράδειγμα 3

$$\begin{aligned} & \text{Άρα στο σημείο } (3, 4) \text{ δηλ. για } x=3, y=4 \text{ έχουμε: } \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}. \\ & \text{Άρα η εφαπτομένη στον κύκλο στο σημείο } (3, 4) \text{ έχει εξίσωση:} \\ & y - 4 = -\frac{3}{4} \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} \Leftrightarrow 3x + 4y = 25 \end{aligned}$$


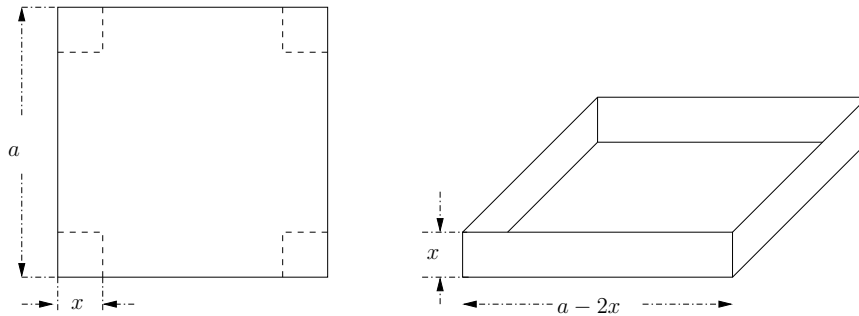
Εφαρμογές παραγώγων Προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων

Παράδειγμα 1

Βρείτε δύο αριθμούς των οποίων το άθροισμα είναι 20, και έχουν το μεγαλύτερο δυνατό γινόμενο.

Παράδειγμα 2

Έχουμε ένα τετράγωνο χαρτόνι πλευράς a . Από κάθε γωνία του, κόβουμε ένα τετράγωνο πλευράς x και το διπλώνουμε, όπως στο ακόλουθο σχήμα, ώστε να φτιάξουμε ένα κουτί. Ποιό πρέπει να είναι το μέγεθος του τετραγώνου που θα κόψουμε από κάθε γωνία έτσι ώστε το κουτί να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο όγκο;

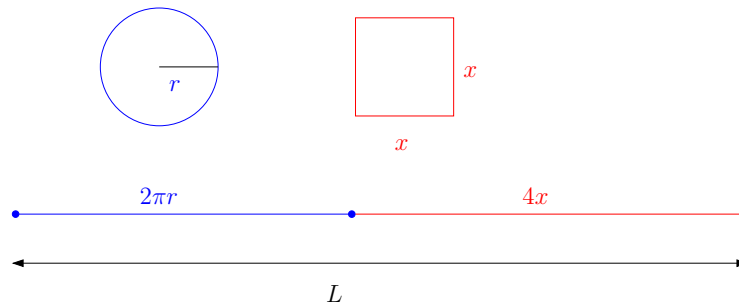


Παράδειγμα 3

Ένας παραγωγός μπορεί να πουλήσει έναν αριθμό x προϊόντων την εβδομάδα στην τιμή $P = 200 - 0.01x$ €, το ένα, ενώ το κόστος για την παραγωγή των x προϊόντων είναι $y = 50x + 20000$ €. Πόσα προϊόντα πρέπει να πουλήσει ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος;

Παράδειγμα 4

Ένα σύρμα μήκους L χρησιμοποιείται για να κατασκευάσουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο. Πώς να μοιράσουμε το σύρμα ώστε τα δύο σχήματα να έχουν το μέγιστο εμβαδόν;

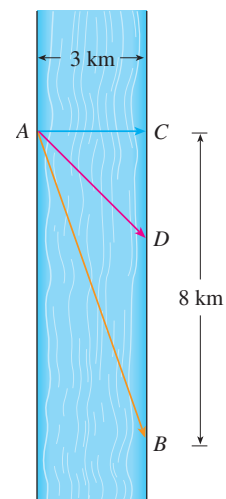


Παράδειγμα 5

Ένας άνθρωπος ξεκινά με τη βάρκα του από το σημείο A της όχθης ενός ποταμού (σε σχήμα λωρίδας) πλάτους 3 km, και θέλει να φτάσει στο σημείο που βρίσκεται 8 km νοτιότερα στην αντίθετη όχθη όσο το δυνατόν νωρίτερα.

Έχει δύο επιλογές, ή να κωπηλατήσει οριζόντια μέχρι το σημείο C και μετά να τρέξει μέχρι το σημείο B , ή να κωπηλατήσει σε ευθεία γραμμή μέχρι κάποιο σημείο D μεταξύ των C και B , και στη συνέχεια να τρέξει μέχρι το σημείο B .

Αν υποθέσουμε ότι κωπηλατεί με ταχύτητα 6 km/h και τρέχει με 8 km/h, σε ποιο σημείο θα πρέπει να αφήσει τη βάρκα ώστε να φτάσει στο B όσο το δυνατόν γρηγορότερα;



Ασκήσεις

- ❶ Αποδείξτε ότι $e^x \geq 1 + x$ για $x \geq 0$.
- ❷ Βρείτε ένα πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού μικρότερου ή ίσου του 3, που να έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ ίσο με 0, και τοπικό μέγιστο στο $x = -2$ ίσο με 3.
- ❸ Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$, και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.