

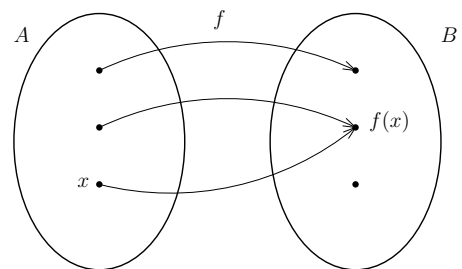
Συναρτήσεις - Όρια - Συνέχεια

Δ.Α. Μητσούδης

Συνάρτηση

Συνάρτηση $f : A \rightarrow B$: είναι ένας κανόνας που σε κάθε στοιχείο του A αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο του B .

$$x \mapsto f(x) = y$$



- A : πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- x : ανεξάρτητη μεταβλητή
- y : εξαρτημένη μεταβλητή, $y = f(x)$ εικόνα του x μέσω της f
- $f(A)$: σύνολο τιμών

Προσοχή: Δεν είναι κατ' ανάγκην κάθε στοιχείο του B εικόνα κάποιου στοιχείου του A . Όταν συμβαίνει αυτό δηλ. όταν $f(A) = B$ λέμε ότι η f είναι επί.

Παραδείγματα

- ❶ Εμβαδό κύκλου ακτίνας r : $E = \pi r^2$. Πεδίο ορισμού $A = (0, +\infty)$.
- ❷ $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$.
- ❸ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$.

Προσοχή: Οι f και g δεν είναι οι ίδιες συναρτήσεις.

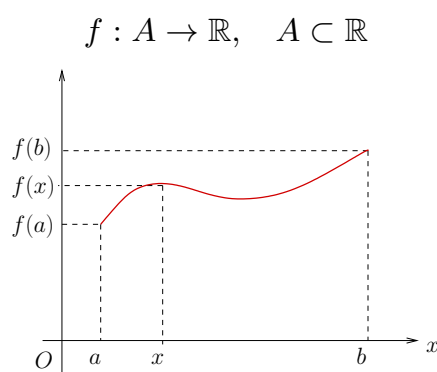
Έχουν τον ίδιο τύπο αλλά ορίζονται σε διαφορετικά πεδία ορισμού.

Προφανώς, ταυτίζονται στο $[0, 1]$.

Θα ασχοληθούμε με πραγματικές συναρτήσεις ($B \subset \mathbb{R}$) πραγματικής μεταβλητής ($A \subset \mathbb{R}$).

Όταν σε μια συνάρτηση δεν δίνεται το πεδίο ορισμού της, εννοείται ως πεδίο ορισμού όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ο τύπος της συνάρτησης έχει νόημα.

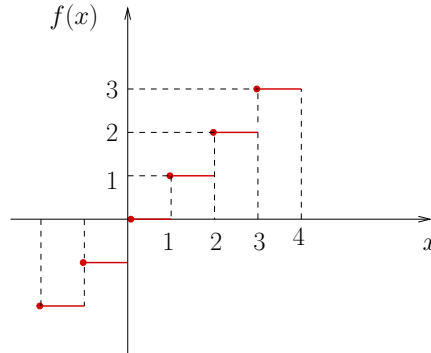
Γραφική παράσταση



Κανονικά, θα έπρεπε να έχω «άπειρα» σημεία (x, y) για να σχεδιάσω τη γραφική παράσταση. Υπό προϋποθέσεις αν έχω «αρκετά» σημεία μπορώ να μαντέψω τα ενδιάμεσα και να φτιάξω μια προσέγγιση του γραφήματος της f .

Παραδείγματα

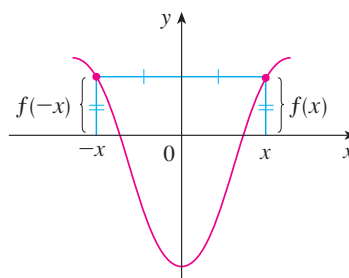
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = [x]$, **ακέραιο μέρος** του x : ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του x .



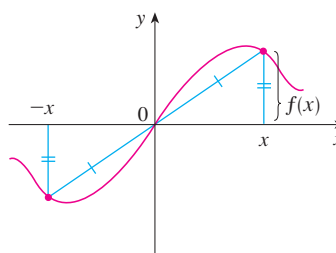
Ορισμοί

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

- Η f είναι **άρτια** αν $x, -x \in A$ και $f(-x) = f(x)$. (συμμετρία ως προς y')



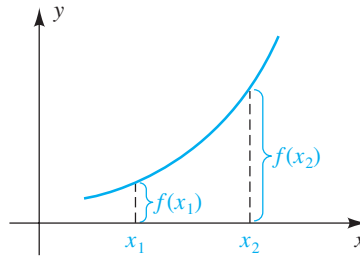
- Η f είναι **περιττή** αν $x, -x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$. (συμμετρία ως προς O)



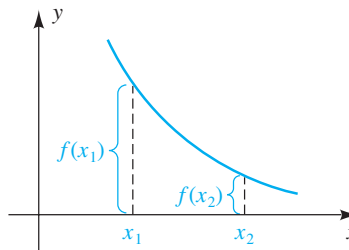
Π.χ. $f(x) = x^2$ άρτια, $g(x) = x^3$ περιττή.

Ορισμοί

- Η f είναι **αύξουσα** σ' ένα υποσύνολο του π.ο. της αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.



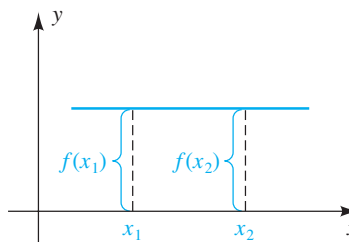
- Η f είναι **φθίνουσα** σ' ένα υποσύνολο του π.ο. της αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.



Π.χ. $f(x) = x^2$ είναι γν. αύξουσα στο $[0, \infty)$ και γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Ορισμοί

- Η f είναι **σταθερή** σ' ένα υποσύνολο του π.ο. της αν $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

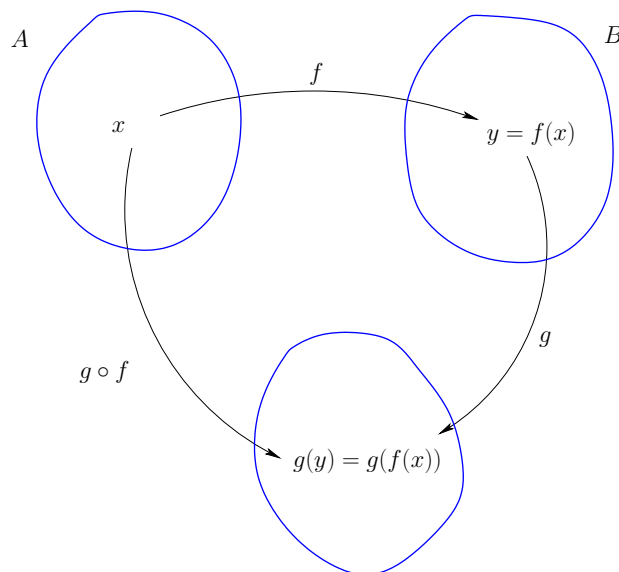


- Η f είναι **1-1** αν για κάθε x_1, x_2 στο π.ο. της με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Π.χ. $f(x) = x^2$ δεν είναι 1-1.

Σύνθεση συναρτήσεων

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad g : B \rightarrow \mathbb{R}$$



Σύνθεση των f και g :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ορίζεται για εκείνα τα $x \in A$ για τα οποία $f(x) \in B$.

Παράδειγμα

$f(x) = x^2 - 16$, $g(x) = \sqrt{x}$. Ορίστε τις $f \circ g$ και $g \circ f$.

Π.Ο της $f = \mathbb{R}$, Π.Ο. της $g = [0, +\infty)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 16 = x - 16, \text{ για } x \in [0, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 16) = \sqrt{x^2 - 16}.$$

Π.Ο. της $g \circ f$ είναι τα $x \in \mathbb{R}$: $x^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

Αντίστροφη συνάρτηση

Κάποιες φορές, οι δυο μεταβλητές της $y = f(x)$ μπορούν, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, να αλλάξουν ρόλους, δηλαδή η y να είναι η ανεξάρτητη και η x να είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή η x να είναι συνάρτηση της y .

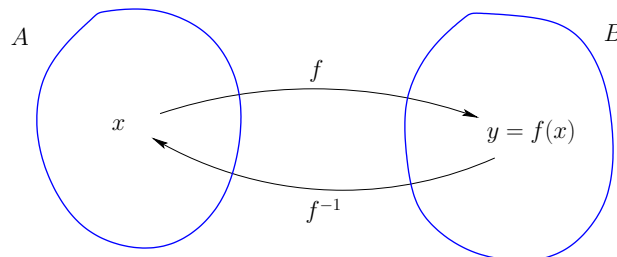
Για να συμβεί αυτό πρέπει για κάθε τιμή της y από το σύνολο τιμών η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο x να έχει μια μοναδική λύση από το πεδίο ορισμού.

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x), \text{ για κάθε } x \text{ στο Π.Ο., και κάθε } y \text{ στο σύνολο τιμών της } f.$$

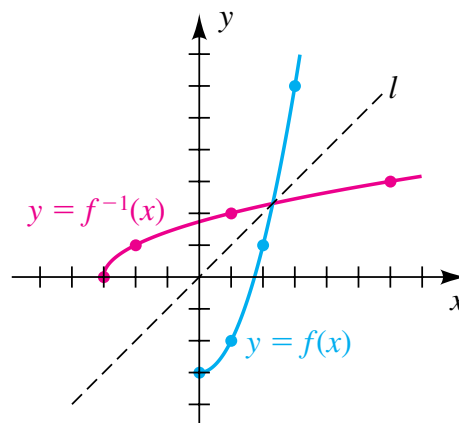
Για να μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης f θα πρέπει η f να είναι 1-1.

Αντίστροφη συνάρτηση

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ 1-1 και επί.



$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$



Υπολογισμός αντίστροφης συνάρτησης

Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Γράφουμε την $y = f(x)$.
- Λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς x (αν αυτό είναι εφικτό).
- Για να εκφράσουμε την f^{-1} ως συνάρτηση του x , εναλλάσσουμε τα x και y . Η εξίσωση που θα προκύψει θα είναι η $y = f^{-1}(x)$.

Παράδειγμα. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 2$. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Για να βρούμε την αντίστροφη γράφουμε

$$y = x^3 + 2$$

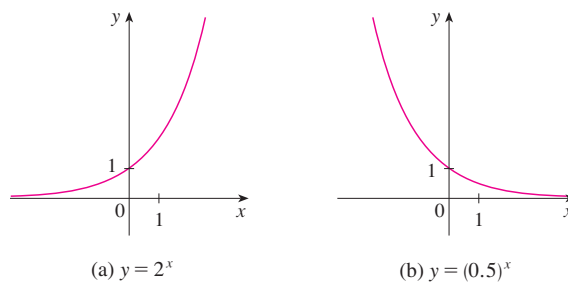
και λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς x :

$$x^3 = y - 2 \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{y-2}, & \text{αν } y \geq 2 \\ -\sqrt[3]{2-y}, & \text{αν } y < 2 \end{cases}.$$

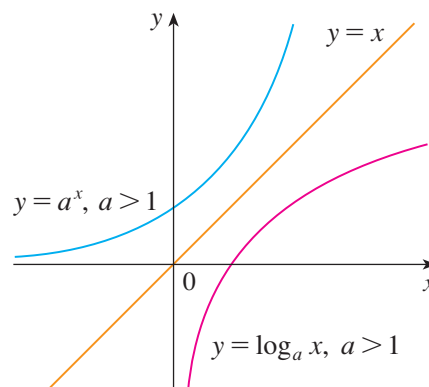
Τέλος, εναλλάσσουμε τα x και y , και έχουμε

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2}, & \text{αν } x \geq 2 \\ -\sqrt[3]{2-x}, & \text{αν } x < 2 \end{cases}.$$

Εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, ($a \neq 1$).



Λογαριθμική συνάρτηση $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$.



Πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

Ρητές συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}$$

Περιοδικές συναρτήσεις

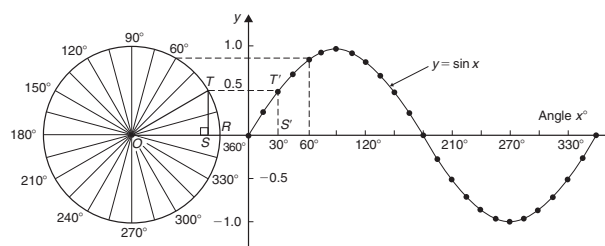
$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in A, \quad x + T \in A, \quad f(x + T) = f(x).$$

Π.χ. $f(x) = \sin x$.

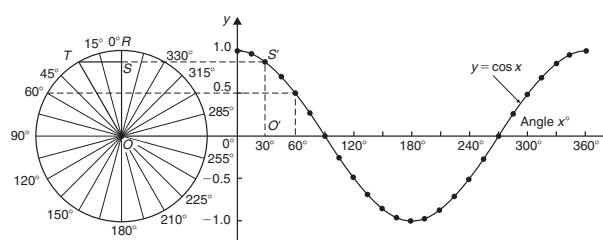
Τότε $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$f(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

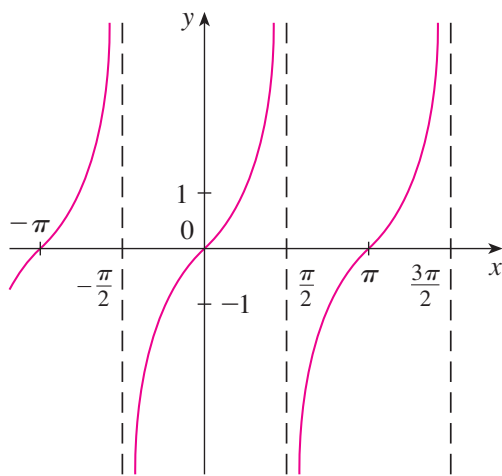


$$f(x) = \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

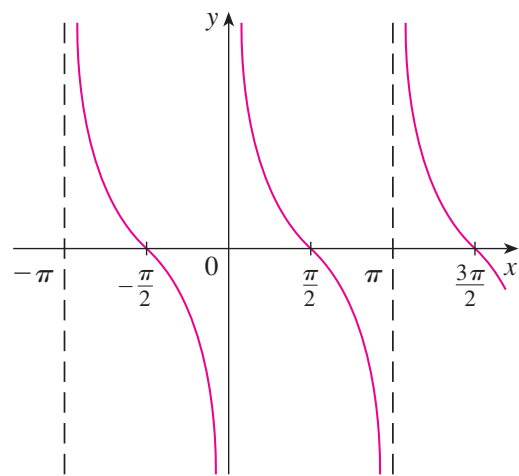


Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$f(x) = \tan(x), \quad g(x) = \cot(x)$$



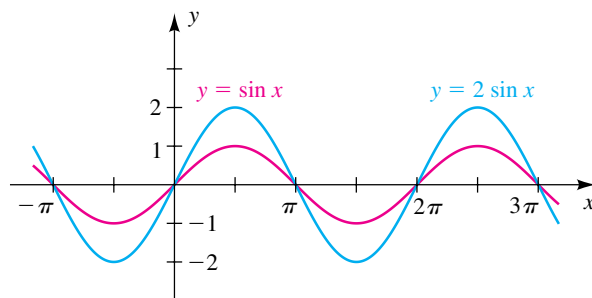
(a) $y = \tan x$



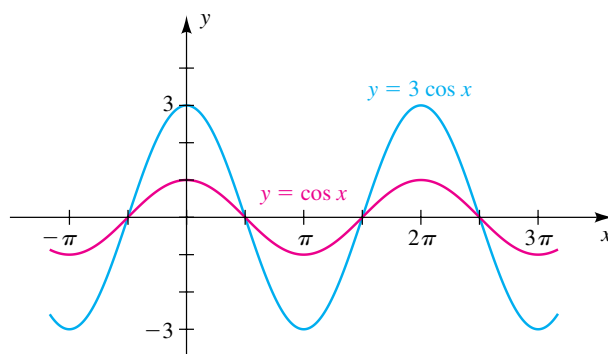
(b) $y = \cot x$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$f(x) = 2 \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

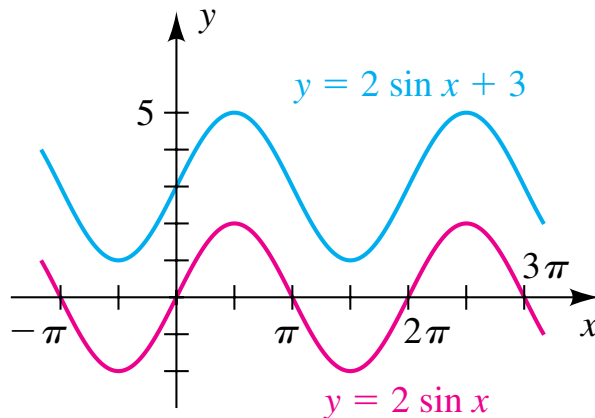


$$f(x) = 3 \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}$$



Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$f(x) = 2 \sin x + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

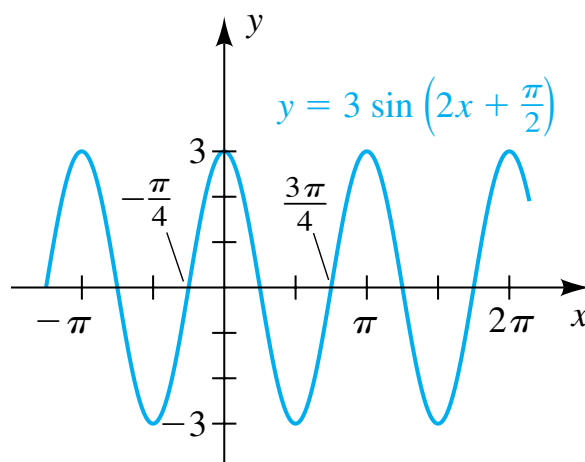


Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$f(x) = A \sin(\omega x + \phi), \quad x \in \mathbb{R}$$

- $|A|$: πλάτος, ω : κυκλ. συχνότητα, ϕ : φάση
- περίοδος: $2\pi/|\omega|$, διαφορά φάσης: $\phi/|\omega|$.
- Για να βρω έναν «κύκλο» λύνω την ανίσωση: $0 \leq \omega x + \phi \leq 2\pi$.

Π.χ. $f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$



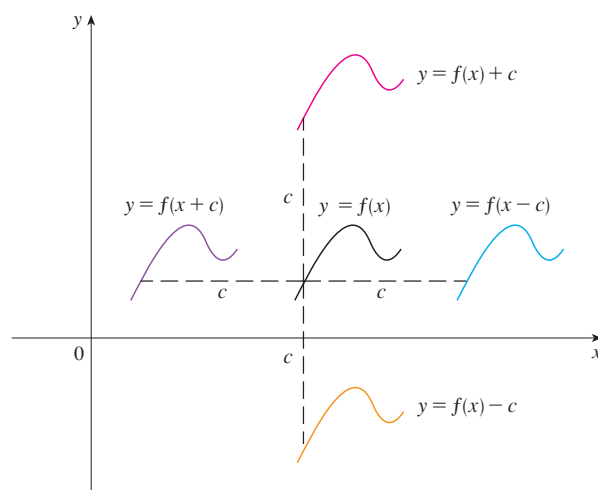
Πράξεις συναρτήσεων

Αν $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, για κάθε $x \in A$.
- Αν $a \in \mathbb{R}$, τότε $(af)(x) = af(x)$, για κάθε $x \in A$.
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$, για κάθε $x \in A$.
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, για κάθε $x \in A$ με $g(x) \neq 0$.

Μετασχηματισμοί συναρτήσεων

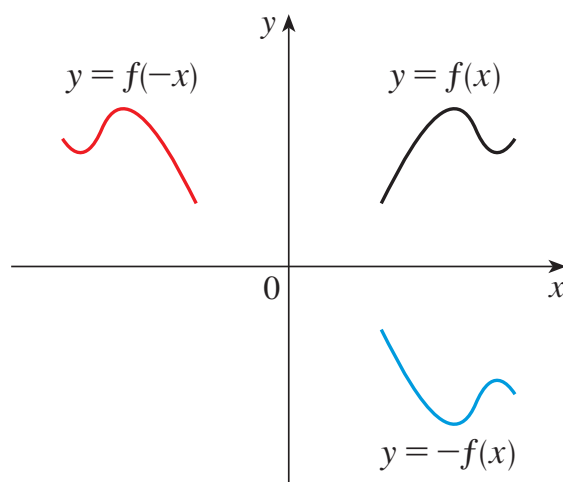
α) Μεταφορά



Έστω ένας αριθμός $c > 0$. Τότε για να βρούμε το γράφημα της

- $y = f(x) + c$, μεταφέρουμε το γράφ. της $y = f(x)$ κατά c μονάδες πάνω.
- $y = f(x) - c$, μεταφέρουμε το γράφ. της $y = f(x)$ κατά c μονάδες κάτω.
- $y = f(x - c)$, μεταφέρουμε το γράφ. της $y = f(x)$ κατά c μονάδες δεξιά.
- $y = f(x + c)$, μεταφέρουμε το γράφ. της $y = f(x)$ κατά c μονάδες αριστερά.

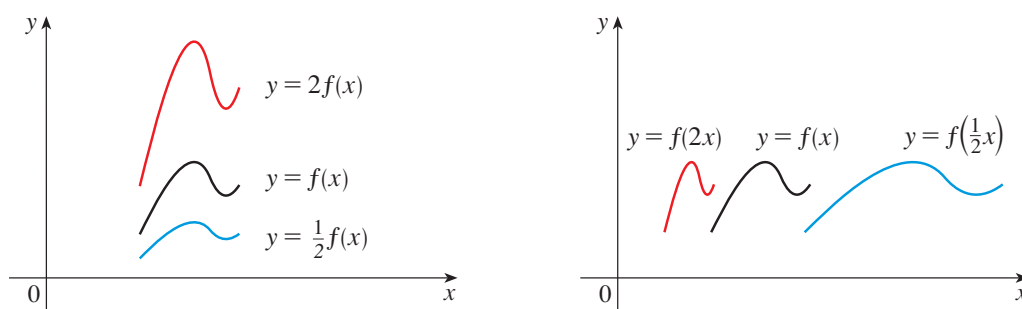
β) Ανάκλαση



Για να βρούμε το γράφημα της

- $y = -f(x)$, σχεδιάζουμε το συμμετρικό του γραφήματος της $y = f(x)$ ως προς τον x -άξονα.
- $y = f(-x)$, σχεδιάζουμε το συμμετρικό του γραφήματος της $y = f(x)$ ως προς τον y -άξονα.

γ) Ομοιοθεσία (stretching)



Έστω ένας αριθμός $c > 1$. Τότε για να βρούμε το γράφημα της

- $y = cf(x)$, “επιμηκύνουμε” το γράφημα της $y = f(x)$ κατακόρυφα κατά ένα συντελεστή c .
- $y = \frac{1}{c}f(x)$, “συμπιέζουμε” το γράφημα της $y = f(x)$ κατακόρυφα κατά ένα συντελεστή c .
- $y = f(cx)$, “συμπιέζουμε” το γράφημα της $y = f(x)$ οριζόντια κατά ένα συντελεστή c .
- $y = f(x/c)$, “επιμηκύνουμε” το γράφημα της $y = f(x)$ οριζόντια κατά ένα συντελεστή c .

Όρια συναρτήσεων

Όρια συναρτήσεων

Ορισμός (Μη αυστηρός)

Για μιά συνάρτηση $f(x)$ θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = L \quad (\text{ή} \quad f(x) \rightarrow L \quad \text{καθώς} \quad x \rightarrow \xi),$$

και θα λέμε

“το όριο της $f(x)$, καθώς το x τείνει στο ξ , είναι L ”

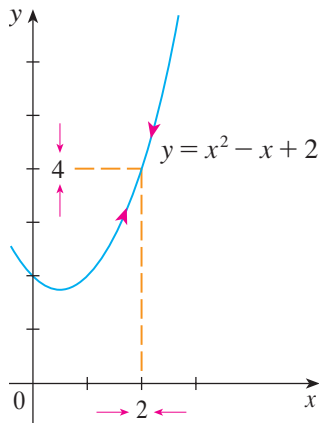
ή

“η συνάρτηση $f(x)$ συγκλίνει στο L , καθώς το x τείνει στο ξ ”

αν οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησής μας πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο L , για όλα τα x που βρίσκονται αρκούντως κοντά στο ξ (αλλά με $x \neq \xi$).

Παράδειγμα

Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 2$. Ενδιαφερόμαστε για τη συμπεριφορά της για τιμές του x κοντά στο 2.



x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.000	2.000000	3.000	8.000000
1.500	2.750000	2.500	5.750000
1.900	3.710000	2.100	4.310000
1.950	3.852500	2.050	4.152500
1.990	3.970100	2.010	4.030100
1.999	3.997001	2.001	4.003001

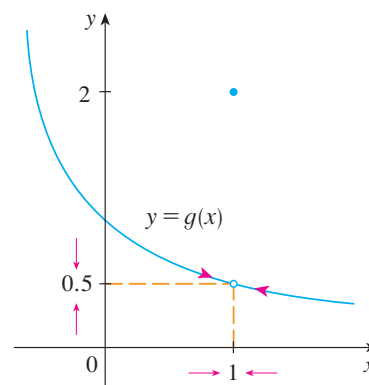
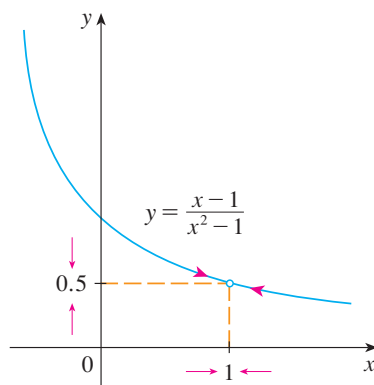
Παρατηρούμε ότι καθώς το x πλησιάζει στο 2, το $f(x)$ τείνει προς τον αριθμό 4, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2) = 4.$$

Παράδειγμα

Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}.$$



Οι γραφικές τους παραστάσεις (για $x > -1$) δίνονται στο Σχήμα. Η πρώτη δεν ορίζεται για $x = 1$, ενώ για τη δεύτερη έχουμε $g(1) = 2$. Όμως τόσο οι τιμές της f , όσο και οι τιμές της g , πλησιάζουν στο $\frac{1}{2}$ καθώς το x πλησιάζει οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο 1, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{2}$.

Πλευρικά όρια

Για μία συνάρτηση $f(x)$ θα λέμε ότι το όριο της $f(x)$, καθώς το x τείνει στο ξ από τα αριστερά, είναι L , και θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = L,$$

αν οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησής μας πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο L , για όλα τα x που βρίσκονται αρκούντως κοντά στο ξ , και είναι **μικρότερα** του ξ .

Ανάλογα, θα λέμε ότι το όριο της $f(x)$, καθώς το x τείνει στο ξ από τα δεξιά, είναι L , και θα γράφουμε

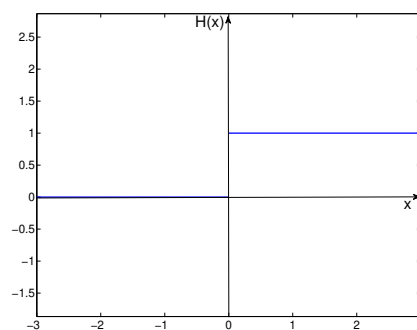
$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = L,$$

αν οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησής μας πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο L , για όλα τα x που βρίσκονται αρκούντως κοντά στο ξ , και είναι **μεγαλύτερα** του ξ .

Παράδειγμα

Θεωρήστε τη συνάρτηση Heaviside με τύπο

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$



Παρατηρήστε ότι:

- καθώς το x πλησιάζει στο 0 από δεξιά (από θετικές τιμές), $H(x) \rightarrow 1$, ενώ
- καθώς το x πλησιάζει στο 0 από αριστερά (από αρνητικές τιμές), $H(x) \rightarrow 0$.

Όριο και πλευρικά όρια

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση

Το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = L$ αν και μόνον αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$ και είναι ίσα με L .

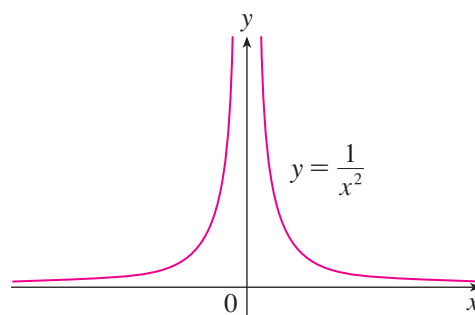
Παράδειγμα

Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Στον ακόλουθο πίνακα υπολογίζουμε μερικές τιμές της καθώς το $x \rightarrow 0$.

x	± 1	± 0.5	± 0.1	± 0.01	± 0.001
$f(x)$	1	4	100	10 000	1 000 000



Διαπιστώνουμε ότι καθώς το $x \rightarrow 0$, τότε και το $x^2 \rightarrow 0$, ενώ το $1/x^2$ παίρνει θετικές τιμές που ολοένα και μεγαλώνουν. Επομένως οι τιμές της $f(x)$ δεν προσεγγίζουν κάποιο συγκεκριμένο αριθμό καθώς το x πλησιάζει προς το 0, άρα το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Ορισμοί

Έστω f μια συνάρτηση που ορίζεται σε ένα διάστημα που περιέχει το ξ (χωρίς να ορίζεται κατ' ανάγκην στο ίδιο το ξ). Τότε, με το συμβολισμό

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty,$$

εννοούμε ότι οι τιμές της $f(x)$ μπορεί να γίνουν οσοδήποτε μεγάλες, καθώς το x πλησιάζει αρκούντως κοντά στο ξ , αλλά με $x \neq \xi$.

Ανάλογα, με το συμβολισμό

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty,$$

εννοούμε ότι οι τιμές της $f(x)$ μπορεί να γίνουν οσοδήποτε μεγάλες αρνητικές, καθώς το x πλησιάζει αρκούντως κοντά στο ξ , αλλά με $x \neq \xi$.

Λέμε ότι η ευθεία $x = \xi$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της καμπύλης $y = f(x)$ αν ισχύει τουλάχιστον ένα από τα ακόλουθα:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = -\infty$$

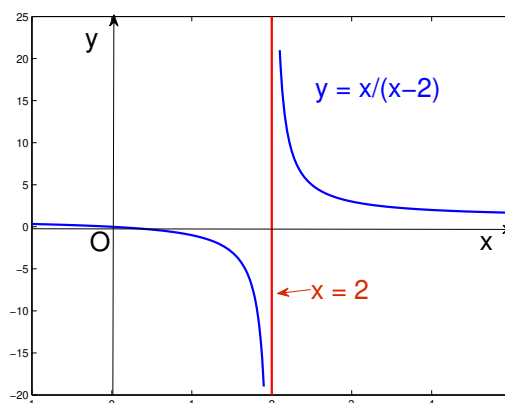
Παράδειγμα

Έστω

$$f(x) = \frac{x}{x-2}.$$

Διαισθητικά περιμένουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty.$$



Η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $(a, +\infty)$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

αν οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο L καθώς το x παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες θετικές τιμές.

Ανάλογα,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

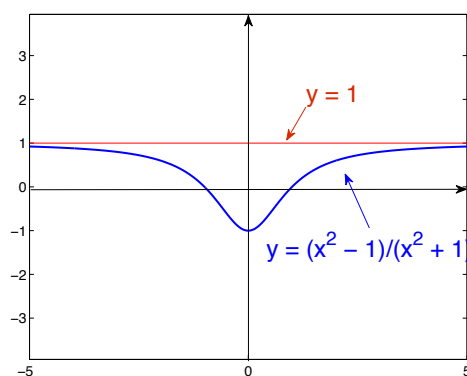
αν οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο L καθώς το x παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες κατ' απόλυτη τιμή, αρνητικές τιμές.

Αν συμβαίνει ένα από τα παραπάνω, τότε η ευθεία $y = L$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της καμπύλης $y = f(x)$.

Παράδειγμα

Έστω

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$



Παρατηρούμε ότι καθώς οι τιμές του x μεγαλώνουν, οι τιμές του $f(x)$ πλησιάζουν ολοένα και κοντύτερα στο 1. Το ίδιο συμβαίνει και καθώς το x παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες κατ' απόλυτη τιμή, αρνητικές τιμές. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1,$$

και η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

Πρόταση

- Αν υπάρχει το $\lim f(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim(-f(x))$ και

$$\lim(-f(x)) = -\lim f(x).$$

- Αν υπάρχουν τα $\lim f(x)$, $\lim g(x)$, και το $\lim f(x) \pm \lim g(x)$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το $\lim(f(x) \pm g(x))$ και

$$\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x).$$

- Αν υπάρχουν τα $\lim f(x)$, $\lim g(x)$, και το $\lim f(x) \lim g(x)$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το $\lim(f(x)g(x))$ και

$$\lim(f(x)g(x)) = \lim f(x) \lim g(x).$$

Ιδιότητες των ορίων (συνέχεια)

- Αν υπάρχει το $\lim f(x)$, και το $1/(\lim f(x))$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή, αν $\lim f(x) \neq 0$), τότε υπάρχει και το $\lim \frac{1}{f(x)}$ και

$$\lim \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim f(x)}.$$

Αν $\lim f(x) = 0$, και η $y = f(x)$ είναι θετική κοντά στο όριο του x , τότε $\lim \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Αν $\lim f(x) = 0$, και η $y = f(x)$ είναι αρνητική κοντά στο όριο του x , τότε $\lim \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

- Αν υπάρχουν τα $\lim f(x)$, $\lim g(x)$, και το $\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το $\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ και

$$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

- Αν υπάρχει το $\lim f(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim |f(x)|$ και

$$\lim |f(x)| = |\lim f(x)|.$$

$$\begin{aligned} &(+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty) \\ &(\pm\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (\pm\infty) \\ &\frac{a}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{\mp\infty} \end{aligned}$$

Ιδιότητες ορίων (συνέχεια)

Πρόταση (Πολυώνυμα)

Αν $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ είναι κάποια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi) = a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \cdots + a_1 \xi + a_0.$$

Πρόταση (Πηλίκα πολυωνύμων)

Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}, \quad \text{υπό την προϋπόθεση ότι } g(\xi) \neq 0.$$

Ιδιότητες ορίων (συνέχεια)

Πρόταση

Αν $f(x) = g(x)$ για $x \neq \xi$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$, δεδομένου ότι τα όρια αυτά υπάρχουν.

Θεώρημα

Αν ισχύει $f(x) \leq g(x)$, για x κοντά στο ξ (εκτός ίσως από το ξ), και υπάρχουν τα όρια των f και g καθώς το $x \rightarrow \xi$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \xi} g(x).$$

Κριτήριο παρεμβολής ή “Θεώρημα Sandwich”

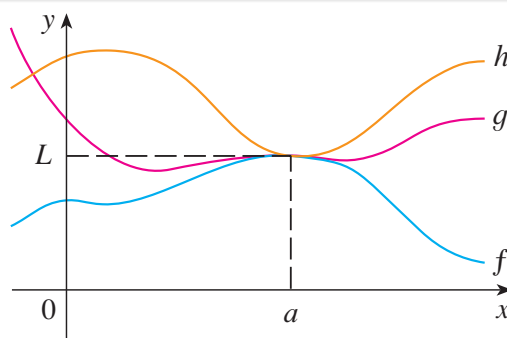
Θεώρημα

Αν $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, όταν το x είναι κοντά στο ξ (εκτός ίσως από το ξ), υπάρχουν τα όρια των f και h καθώς το $x \rightarrow \xi$, και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} h(x) = L,$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = L.$$



Παραδείγματα υπολογισμού ορίων

❶ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = ?$

❷ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = ?$

❸ Δείξτε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

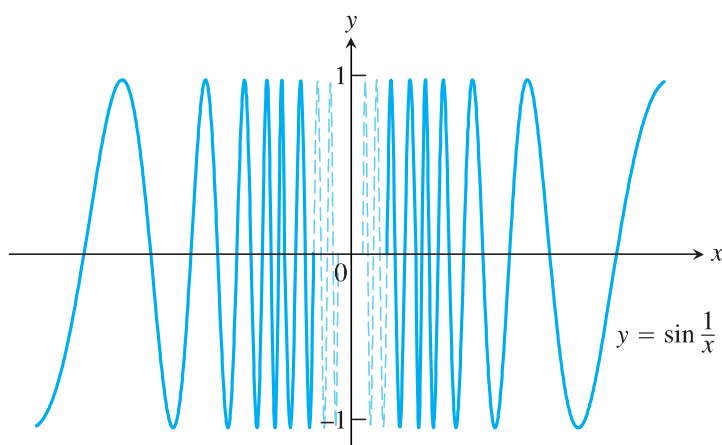
❹ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = ?$

❺ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = ?$

❻ Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

❼ Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

Η συνάρτηση $f(x) = \sin \frac{1}{x}$



Αυστηρός ορισμός του ορίου

Οι ορισμοί του ορίου που είδαμε μέχρι τώρα είναι **o.k.** για μια διαισθητική κατανόηση των βασικών εννοιών του Απειροστικού Λογισμού.



Αν όμως ο στόχος μας είναι η **βαθύτερη κατανόηση των εννοιών** και η **δυνατότητα να αποδεικνύουμε με αυστηρότητα διάφορα αποτελέσματα**, τότε θα πρέπει να καταφύγουμε στον **«αυστηρό» ορισμό του ορίου**.



Σύμφωνα με όσα είδαμε μέχρι τώρα, όταν λέμε ότι το όριο της $f(x)$ είναι L καθώς το x τείνει στο ξ , εννοούμε ότι οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησής μας πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο L , για όλα τα x που βρίσκονται αρκούντως κοντά στο ξ (αλλά με $x \neq \xi$).

Ένας ακριβέστερος ορισμός βασίζεται στο να προσδιορίσουμε με ακρίβεια **πόσο μικρή θα πρέπει να θεωρήσουμε την απόσταση $|x - \xi|$ έτσι ώστε η απόσταση $|f(x) - L|$ να γίνει μικρότερη από κάποιο δεδομένο αριθμό.**

Παράδειγμα

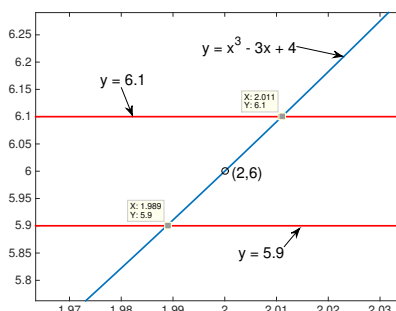
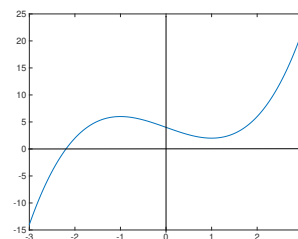
Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης βρείτε αριθμό δ τέτοιον ώστε

$$|(x^3 - 3x + 4) - 6| < 0.1 \quad \text{για κάθε } x \text{ που ικανοποιεί } |x - 2| < \delta.$$

Προφανώς

$$|(x^3 - 3x + 4) - 6| < 0.1 \Leftrightarrow 5.9 < x^3 - 3x + 4 < 6.1.$$

Επομένως, θέλουμε να προσδιορίσουμε τις τιμές του x για τις οποίες το γράφημα της $y = x^3 - 3x + 4$ βρίσκεται μεταξύ των οριζόντιων ευθειών $y = 5.9$ και $y = 6.1$.



«Ζουμάρουμε» στα γραφήματα της $y = x^3 - 3x + 4$ και των ευθειών $y = 5.9$ και $y = 6.1$ **κοντά στο σημείο $(2, 6)$.**

(Για $x = 1.989$ το $y \approx 5.9017$, ενώ για $x = 2.011$ το $y \approx 6.0977$.)

Άρα είναι ασφαλές να πούμε ότι

$$5.9 < x^3 - 3x + 4 < 6.1 \quad \text{για κάθε } x \text{ που ικανοποιεί την ανίσωση } 1.989 < x < 2.011,$$

ή, ισοδύναμα, ότι

$$|(x^3 - 3x + 4) - 6| < 0.1 \quad \text{για κάθε } x \text{ που ικανοποιεί } |x - 2| < 0.011.$$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε x απέχει από το 2 απόσταση μικρότερη από $\delta = 0.011$
 $\Rightarrow$ το $f(x)$ θα απέχει από το 6 απόσταση μικρότερη του 0.1.

Αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία αντικαθιστώντας τώρα τον αριθμό 0.1 με τον μικρότερο 0.05 θα βρούμε ότι

$$|(x^3 - 3x + 4) - 6| < 0.05 \quad \text{για κάθε } x \text{ που ικανοποιεί } |x - 2| < 0.0055.$$

$\vdots$

«Αυστηρός» ορισμός του ορίου

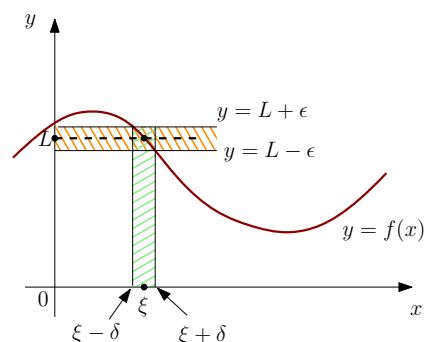
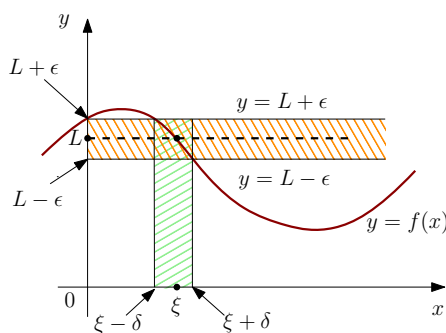
Ορισμός

Θα λέμε ότι η $y = f(x)$ συγκλίνει στον L (ή τείνει στον L ή έχει όριο τον L) καθώς ο x τείνει στον ξ , και θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = L,$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - L| < \epsilon$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$.

(Σημειώστε ότι η απαίτηση $0 < |x - \xi| \Leftrightarrow x \neq \xi$.)



- **Παράδειγμα.** Χρησιμοποιήστε τον «αυστηρό» ορισμό για να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

- **Πρόταση.** Αν τα $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = L_1$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = L_2$ υπάρχουν, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x))$ και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) + \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = L_1 + L_2.$$

Παράδειγμα

N.δ.ο $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ με τον "αυστηρό" ορισμό του ορίου.

Έστω $\varepsilon > 0$: Αναζητώ $\delta > 0$ τ.ω.

$|x^2 - 0| < \varepsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί $|x - 0| < \delta$

$\Leftrightarrow x^2 < \varepsilon \quad \text{---} \quad \text{---} \quad |x| < \delta.$

$x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}.$ Άρα αρκεί να επιλέξω $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

Πρόταση

Πρόταση Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = L_1$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = L_2$

Τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. Αναζητώ $\delta > 0$:

$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$ για κάθε x στο η.ο. της $f+g$
που ικανοποιεί $0 < |x - \xi| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| &= |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \stackrel{\text{τριγων. ανισοτ.}}{\leq} \\ &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|. \quad (*) \end{aligned}$$

...

Επειδή $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ & $f(x) \rightarrow L_1 \Rightarrow \exists \delta_1 : |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ όταν $|x - \xi| < \delta_1$

Επειδή $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ & $g(x) \rightarrow L_2 \Rightarrow \exists \delta_2 : |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ όταν $|x - \xi| < \delta_2$

Έστω $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$



Τότε αν $|x - \xi| < \delta \Rightarrow$ και $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$
 $|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

Αρα από την (*): $|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

✓

Όρια στο άπειρο

Ορισμός

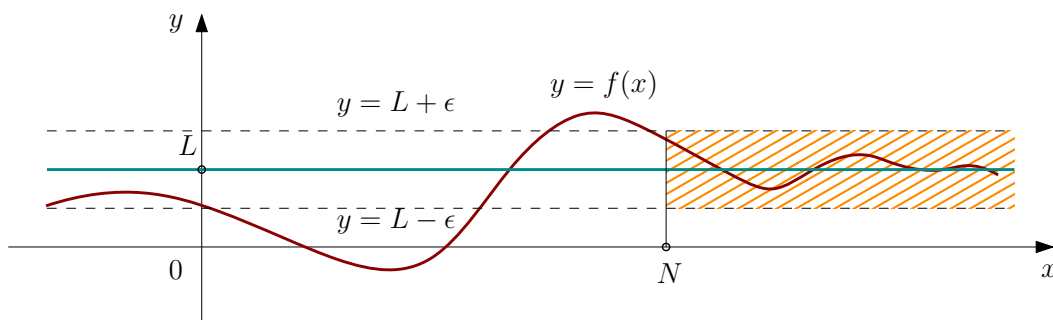
Έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος $N > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την $x > N$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

και λέμε ότι η $y = f(x)$ συγκλίνει στον L ή τείνει στον L ή έχει όριο τον L καθώς ο x τείνει στο $+\infty$.



Άπειρο όριο

Ορισμός

Έστω ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει κάποιος κατάλληλος $\delta > 0$ ώστε, αν $0 < |x - \xi| < \delta$ και ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε θα ισχύει $f(x) > M$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$$

και λέμε ότι η $y = f(x)$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή τείνει στο $+\infty$ ή έχει όριο το $+\infty$ καθώς ο x τείνει στον ξ .

Συνέχεια συναρτήσεων

Συνέχεια συναρτήσεων

Ορισμός

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο ξ του πεδίου ορισμού της, αν

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi).$$

Δηλ. η f είναι συνεχής στο ξ αν το $f(x)$ πλησιάζει το $f(\xi)$, καθώς το x πλησιάζει το ξ .

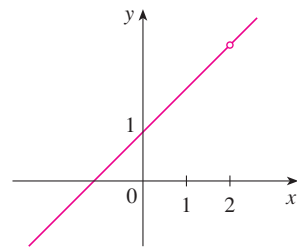
Επομένως, μια συνεχής συνάρτηση f έχει την ιδιότητα “μικρές μεταβολές” του x να επιφέρουν “μικρές μεταβολές” στο $f(x)$.

Απλούστερα: η συνάρτηση είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν το γράφημά της δεν “σπάει” στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

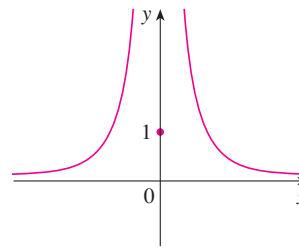
Αν η f ορίζεται σε όλα τα σημεία ενός ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το ξ , εκτός ίσως από το ίδιο το ξ , τότε θα λέμε ότι είναι ασυνεχής στο ξ αν δεν είναι συνεχής στο ξ .

Παράδειγμα

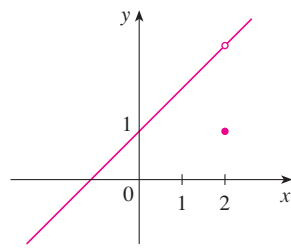
Εντοπίστε τα σημεία ασυνέχειας των ακόλουθων συναρτήσεων:



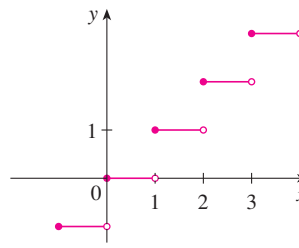
$$(a) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$



$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$



$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{if } x \neq 2 \\ 1 & \text{if } x = 2 \end{cases}$$



$$(d) f(x) = \|x\|$$

Το είδος της ασυνέχειας που εμφανίζεται στις περιπτώσεις (a) και (c) χαρακτηρίζεται ως **άρσιμη ασυνέχεια** επειδή θα μπορούσαμε να την αποφύγουμε, απλά, ορίζοντας διαφορετικά την f στο σημείο $x = 2$.

Οι ασυνέχειες των περιπτώσεων (b) και (d) χαρακτηρίζονται ως **ασυνέχειες πρώτου είδους**. Ειδικότερα, οι ασυνέχειες όπως αυτές της περίπτωσης (d) χαρακτηρίζονται ως **ασυνέχειες άλματος**, αφού η τιμές της συνάρτησης “πηδάνε” από μια τιμή σε μια άλλη.

Τέλος, όταν δεν υπάρχει ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$, λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **ασυνέχεια δεύτερου είδους** ή **ουσιώδη ασυνέχεια** στο ξ .

Π.χ. η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases},$$

παρουσιάζει ουσιώδη ασυνέχεια στο 0, επειδή δεν υπάρχει το δεξί πλευρικό όριο στο 0

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής από δεξιά, σε ένα σημείο ξ του πεδίου ορισμού της, αν

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = f(\xi),$$

και λέμε ότι είναι συνεχής από αριστερά στο ξ , αν

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi).$$

Ορισμός

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα διάστημα αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος. (Αν η f ορίζεται μόνο από τη μία πλευρά ενός άκρου του διαστήματος, τότε με τον όρο συνεχής, εννοούμε συνεχής από δεξιά ή από αριστερά.)

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων - 1

Πρόταση

Έστω f και g συναρτήσεις συνεχείς στο ξ και λ μια πραγματική σταθερά. Τότε οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς στο ξ :

(1) $f \pm g$, (2) $|f|$, (3) λf , (4) fg , (5) $\frac{f}{g}$, αν $g(\xi) \neq 0$.

Πρόταση

(α) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

(β) Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

(γ) Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις ριζών είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.

(δ) Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Θεώρημα

Αν η f είναι συνεχής στο η και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \eta$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(g(x)) = f(\eta)$. Με άλλα λόγια,

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)\right).$$

Θεώρημα

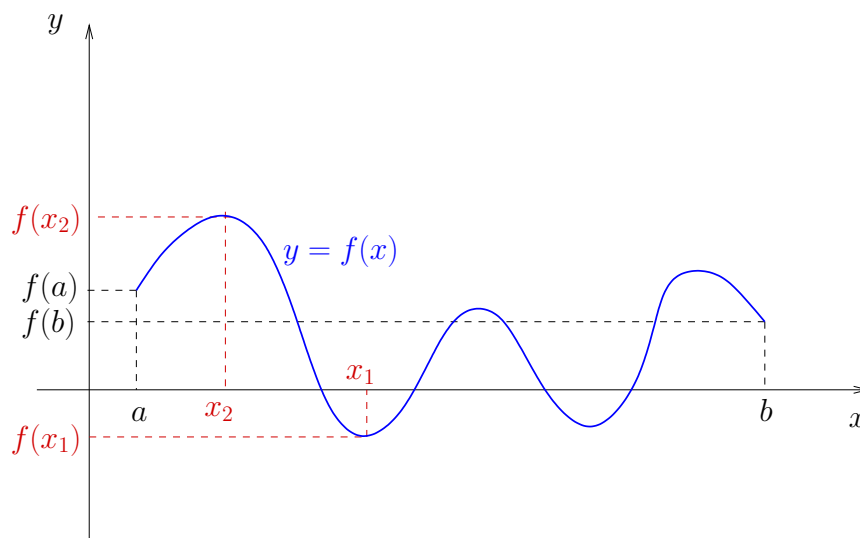
Αν η g είναι συνεχής στο ξ και η f είναι συνεχής στο $g(\xi)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ με $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ είναι συνεχής στο ξ .

Το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής

Θεώρημα

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$. Τότε υπάρχουν x_1, x_2 στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{για κάθε } x \text{ στο } [a, b].$$



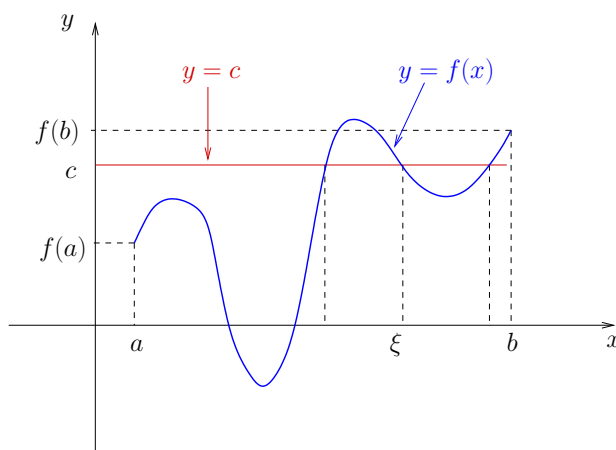
Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής

Θεώρημα

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$. Τότε κάθε αριθμός c , ο οποίος είναι ανάμεσα στις τιμές $f(a)$ και $f(b)$, είναι τιμή της συνάρτησης.

Δηλαδή για κάθε c με την ιδιότητα $f(a) \leq c \leq f(b)$ ή $f(b) \leq c \leq f(a)$ υπάρχει κάποιος ξ στο $[a, b]$ ώστε $f(\xi) = c$.

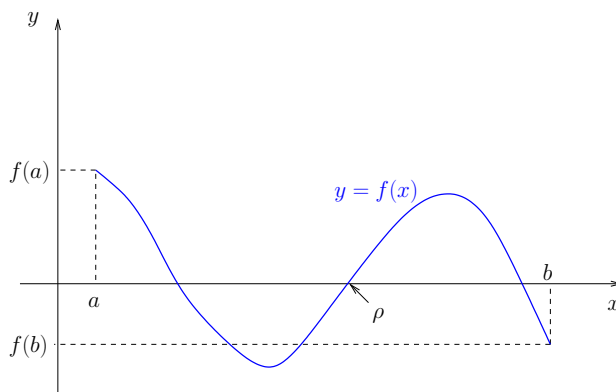
Με άλλα λόγια, για κάθε τέτοιον c η εξίσωση $f(x) = c$ έχει (τουλάχιστον μια) λύση ξ στο $[a, b]$.



Εφαρμογές του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής - 1

Θεώρημα (Bolzano)

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αν $f(a)f(b) < 0$ (δηλαδή οι τιμές της f στα άκρα του διαστήματος είναι ετερόσημες), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα ρ στο (a, b) ώστε $f(\rho) = 0$.



Θεώρημα (Ιδιότητα σταθερού προσήμου)

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I . Αν ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε x στο I , τότε είτε $f(x) > 0$ για κάθε x στο I , ή $f(x) < 0$ για κάθε x στο I .

Ασκήσεις

- ❶ Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{αν } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

Για ποιά τιμή της σταθεράς c η $f(x)$ είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$;

- ❷ Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα μεταξύ του 1 και του 2.

- ❸ Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 + x$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 10$.