

Εισαγωγή - Μαθηματική Ανάλυση I

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Δημήτρης Μητσούδης

Πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$

- Φυσικοί $\mathbb{N}$: $1, 2, \dots$
- Ακέραιοι $\mathbb{Z}$: $0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Ρητοί $\mathbb{Q}$: οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{m}{n}$, όπου m, n είναι ακέραιοι και $n \neq 0$.
- Άρρητοι: οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί
π.χ., το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με κάθετη πλευρά μήκους 1.

- ❶ Αν $x < y$, τότε $x + z < y + z$.
- ❷ Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $x + z < y + w$.
- ❸ Αν $x < y$ και $z > 0$, τότε $xz < yz$.
- ❹ Αν $x < y$ και $z < 0$, τότε $xz > yz$.
- ❺ Αν $0 < x < y$, τότε $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

Απόλυτες τιμές

Απόλυτη τιμή ενός αριθμού x :

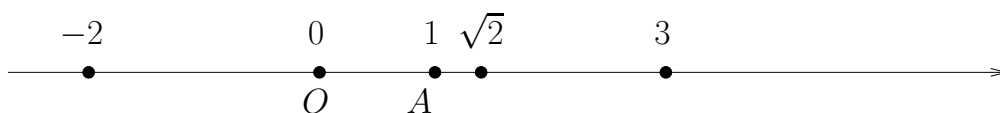
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Ιδιότητες:

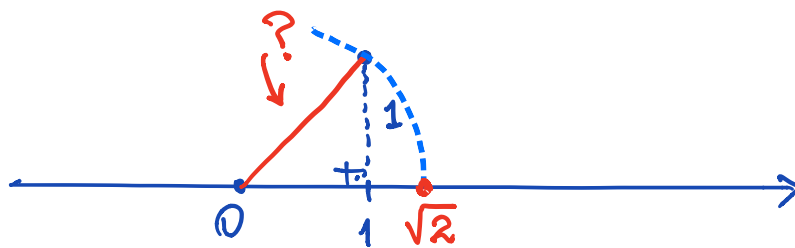
- ❶ $|xy| = |x||y|$, και $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ αν $y \neq 0$.
- ❷ $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ (τριγωνική ανισότητα).
- ❸ Έστω $a > 0$. Τότε
 - $|x| = a$ αν και μόνον αν $x = \pm a$.
 - $|x| < a$ αν και μόνον αν $-a < x < a$.
 - $|x| > a$ αν και μόνον αν $x > a$ ή $x < -a$.

Η πραγματική ευθεία

Θεωρούμε μια ευθεία και ένα αυθαίρετο σημείο O το οποίο αναπαριστά τον αριθμό 0. Θεωρώ ένα άλλο αυθαίρετο σημείο A το οποίο αναπαριστά τον αριθμό 1. Τότε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OA παίζει το ρόλο της μονάδας μέτρησης στην ευθεία. Τώρα πια μπορούμε να αναπαραστήσουμε οποιονδήποτε άλλον αριθμό x με ένα σημείο X πάνω στην ευθεία.



Ερώτηση: Πώς βάζουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$ πάνω στην ευθεία;



Διαστήματα: συγκεκριμένα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών που αντιστοιχούν γεωμετρικά σε μέρη της ευθείας. Π.χ.

- Αν $a < b$, ορίζουμε $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ και το ονομάζουμε ανοικτό διάστημα,
- αν $a < b$, ορίζουμε $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ και το ονομάζουμε κλειστό διάστημα,
- $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$, $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$,
- $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$.
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.



Δυνάμεις και ρίζες

Αν $n > 0$ ακέραιος, ορίζουμε

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n.$$

Το a λέγεται **βάση** και το n **εκθέτης**.

Αν, επιπλέον, $a \neq 0$, τότε ορίζουμε

$$a^0 = 1 \quad \text{και} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Ταυτότητα: Αν $n \geq 2$ είναι φυσικός, τότε

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Ορίζουμε ως **παραγοντικό** ενός $n \in \mathbb{N}$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \quad \text{και} \quad 0! = 1.$$

Διωνυμικοί συντελεστές:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad m, n \text{ φυσικοί}$$

Διωνυμικός τύπος του Newton:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

Ειδικές περιπτώσεις:

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\(x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

Ρίζες

Αν $n > 0$ ακέραιος, και $a \geq 0$, ονομάζουμε **n -οστή ρίζα** του a , και συμβολίζουμε

$$\sqrt[n]{a},$$

τη μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = a$.

Π.χ., για $n = 2$:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a \text{ και } x \geq 0.$$

Δυνάμεις με ρητούς εκθέτες

Έστω $a > 0$ και $p = \frac{m}{n}$ ένας ρητός αριθμός με m ακέραιο και n φυσικό. Τότε ορίζουμε

$$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και για κάθε $a \geq 0$, ισχύει

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Για κάθε θετικό ρητό $p > 0$ ορίζουμε $0^p = 0$.

Ανακεφαλαίωση

Ο a^x **ορίζεται**

- αν $a > 0$ και ο x είναι ρητός,
- αν $a = 0$ και ο x είναι θετικός ρητός,
- αν $a < 0$ και ο x είναι ακέραιος.

Ο a^x **δεν ορίζεται**

- αν $a = 0$ και $x \leq 0$,
- αν $a < 0$ και ο x δεν είναι ακέραιος.

Παράδειγμα. Οι ακόλουθοι αριθμοί ορίζονται:

$$1.4^{-\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{1.4})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{1.4})^2}, \quad 0^{3/4} = 0, \quad (-2.5)^3 = (-2.5)(-2.5)(-2.5).$$

Δεν ορίζονται οι αριθμοί: $(-2)^{\frac{2}{3}}$, $(-1.4)^{1.2}$, 0^{-3} , 0^0 .

Ιδιότητες των δυνάμεων

Αν $a, b > 0$ και x, y είναι ρητοί, τότε

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Αν $0 < a < b$ και $x > 0$, τότε $a^x < b^x$

Αν $0 < a < b$ και $x < 0$, τότε $a^x > b^x$

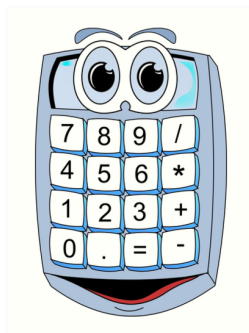
Αν $x < y$ και $a > 1$, τότε $a^x < a^y$

Αν $x < y$ και $0 < a < 1$, τότε $a^x > a^y$.

Δυνάμεις με άρρητους εκθέτες

Διαισθητική προσέγγιση

$$2^{\sqrt{2}} \quad \text{?????}$$



$$2^{\sqrt{2}} \approx 2.665\,144\,143$$

$$\sqrt{2} \approx 1.414\,213\,562$$

x	1	1.4	1.41	1.414	1.4142	...
2^x	2	2.639016	2.657372	2.664750	2.665119	...

$$2^{\sqrt{2}} \approx 2.665\,144\,143$$

$2^{\sqrt{2}}$ είναι ο αριθμός εκείνος στον οποίο «θα πλησιάζουμε» όταν παίρνουμε όλο και ακριβέστερες ρητές προσεγγίσεις του άρρητου $\sqrt{2}$.

Οι ιδιότητες των δυνάμεων που είδαμε προηγουμένως για ρητούς εκθέτες ισχύουν και για πραγματικούς!

Λογάριθμοι

Πρόταση: Αν $a > 0$ και $a \neq 1$, τότε για κάθε $y > 0$ υπάρχει μοναδικός αριθμός x τέτοιος ώστε

$$a^x = y.$$

Ορισμός

Ορίζουμε ως **λογάριθμο** του y με **βάση** a τη μοναδική λύση της εξίσωσης $a^x = y$ και τη συμβολίζουμε

$$\log_a y.$$

Δηλαδή, αν $a > 0$, $a \neq 1$, και $y > 0$:

$$x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y.$$

Ιδιότητες των λογαρίθμων

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \text{για κάθε } x, y > 0.$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \text{για κάθε } x, y > 0.$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a x \quad \text{για κάθε } x > 0 \text{ και οποιοδήποτε } y.$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{και} \quad \log_a a = 1.$$

Έστω $0 < x < y$ και $a > 1$. Τότε $\log_a x < \log_a y$.

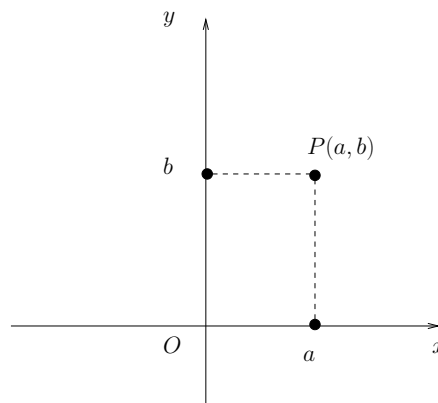
Έστω $0 < x < y$ και $0 < a < 1$. Τότε $\log_a x > \log_a y$.

Τύπος αλλαγής βάσης: Έστω $a, b > 0$ και $a, b \neq 1$. Τότε για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων

Αναπαράσταση διατεταγμένων ζευγών αριθμών (a, b) με σημεία του επιπέδου.

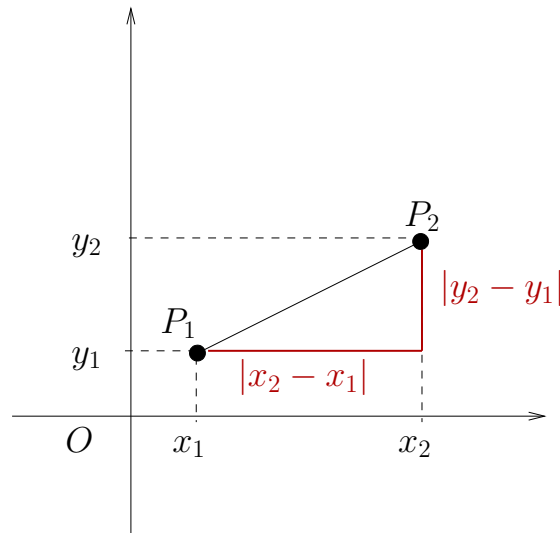


Σε κάθε σημείο του επιπέδου P μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό διατεταγμένο ζεύγος αριθμών ως εξής:

- Από το P φέρνουμε κάθετες προς τους άξονες των x και y και έστω ότι τους τέμνουν στα σημεία a και b , αντίστοιχα.
- Ο αριθμός a λέγεται **τετμημένη** του σημείου P , και ο b λέγεται **τεταγμένη** του σημείου P .
- Λέμε επίσης ότι το σημείο P έχει **συντεταγμένες** (a, b) , και γράφουμε $P(a, b)$.

Απόσταση των σημείων $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



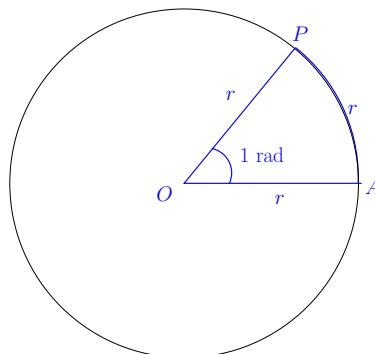
Ασκήσεις

- ❶ Για τις ανισότητες:
α) $|x - 1| > 2$, β) $|x - 2| \leq |x + 2|$, γ) $(x - 3)^2 \geq 9$,
γράψτε σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων το σύνολο των x για τις οποίες αληθεύουν.
- ❷ Μέσω της γεωμετρικής αναπαράστασης των αριθμών αιτιολογήστε την πρόταση:
αν $a \leq x \leq b$ και $a \leq y \leq b$, τότε $|x - y| \leq b - a$.
- ❸ Αποδείξτε ότι $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ και $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.
- ❹ Αν οι αριθμοί x, y δεν είναι και οι δυο 0, δείξτε ότι $x^2 + xy + y^2 > 0$.
- ❺ Αποδείξτε ότι $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ για κάθε $a, b \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;
- ❻ Υπολογίστε τους $\log_3 9$, $\log_{1/3} 3$, $\log_{1/3} 9$.
- ❼ Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι για κάθε $y > 0$: $\log_{1/a} y = -\log_a y$.
- ❽ Περιγράψτε και σχεδιάστε σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα χωρία που ορίζουν τα σύνολα: α) $\{(x, y) \mid x \geq 0\}$, β) $\{(x, y) \mid y = 1\}$, γ) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$.

Τριγωνομετρία

Γωνίες: Οι γωνίες μετριοούνται σε μοίρες ή σε ακτίνια (radians ή rad).

Ένα ακτίνιο είναι το μέτρο της επίκεντρης γωνίας ενός κύκλου που βαίνει σε ένα τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου



Μια πλήρης γωνία είναι ίση με 360° ή 2π ακτίνια. Άρα

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ, \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ, \quad \text{και} \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.017 \text{ rad}.$$

Επομένως,

- για να μετατρέψω μοίρες σε ακτίνια, πολλαπλασιάζω με $\pi/180$,
- για να μετατρέψω ακτίνια σε μοίρες, πολλαπλασιάζω με $180/\pi$.

Παράδειγμα

α) Βρείτε τη γωνία 60° σε ακτίνια.

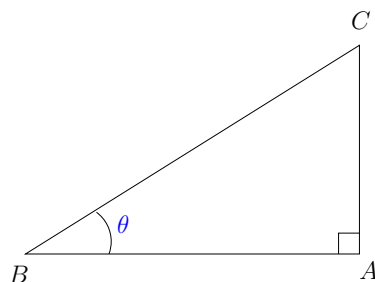
$$60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$

β) Εκφράστε τη γωνία $7\pi/4$ σε μοίρες.

$$\frac{7\pi}{4} \text{ rad} = \frac{7\pi}{4} \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 315^\circ.$$

Μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Ακτίνια	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών



Στο **ορθογώνιο** τρίγωνο ABC ορίζουμε

Ημίτονο της γωνίας θ :

$$\sin \theta = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{(AC)}{(BC)}.$$

Συνημίτονο της γωνίας θ :

$$\cos \theta = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{(AB)}{(BC)}.$$

Εφαπτομένη της γωνίας θ :

$$\tan \theta = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \frac{(AC)}{(AB)}.$$

Συνεφαπτομένη της γωνίας θ :

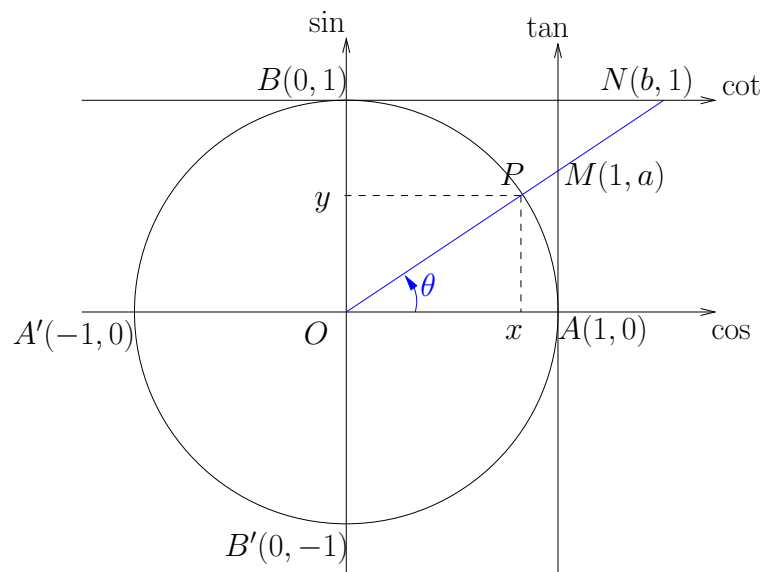
$$\cot \theta = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}} = \frac{(AB)}{(AC)}.$$

✓ αν $0 < \theta < \pi/2$



Τι γίνεται αν $\theta \geq \pi/2$ ή $\theta \leq 0$;

Ο τριγωνομετρικός κύκλος



$$\cos \theta = x, \quad \sin \theta = y, \quad \tan \theta = a, \quad \cot \theta = b$$

Ιδιότητες

- $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ και $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ ($\Leftrightarrow |\sin \theta| \leq 1, |\cos \theta| \leq 1$)
- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ (για $\theta \neq k\pi + \pi/2$), k ακέραιος.
- $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ (για $\theta \neq k\pi$), k ακέραιος.

Επίσης, για κάθε ακέραιο k ισχύει:

$$\begin{aligned} \sin(2k\pi + \theta) &= \sin \theta, & \cos(2k\pi + \theta) &= \cos \theta, \\ \tan(k\pi + \theta) &= \tan \theta, & \cot(k\pi + \theta) &= \cot \theta. \end{aligned}$$

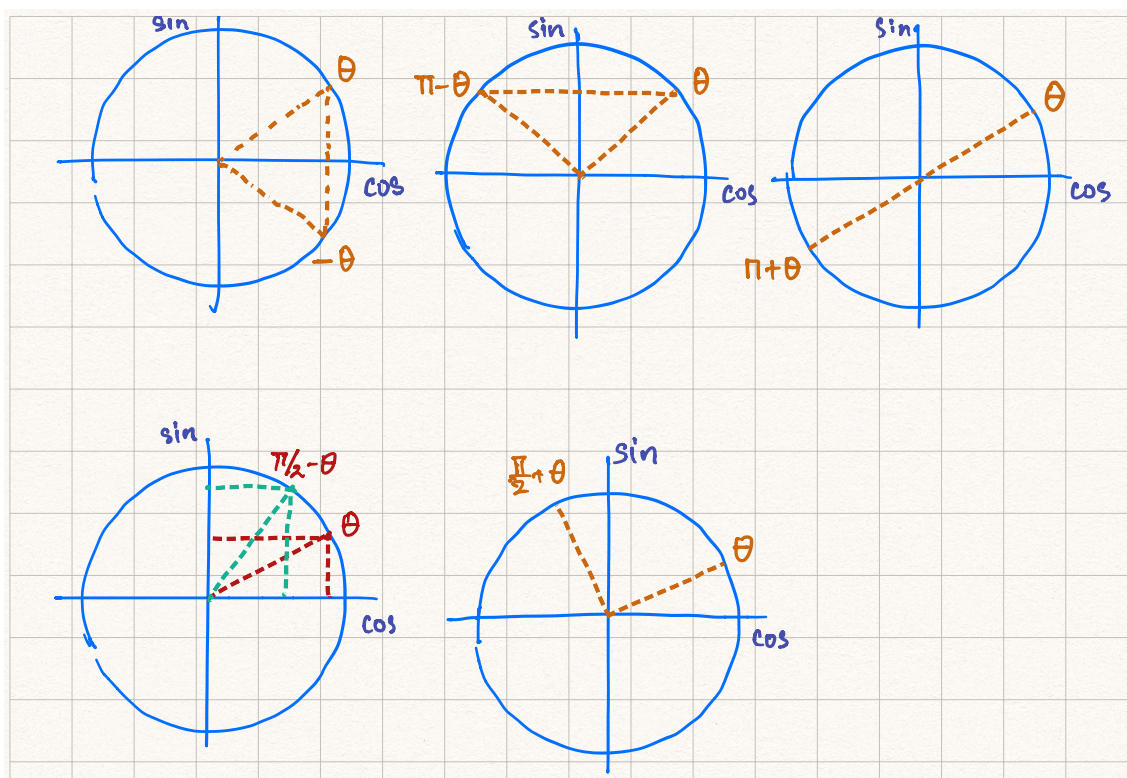
Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Σχέσεις αναγωγής στο πρώτο τεταρτημόριο:

Αντίθετες γωνίες	Συμπληρωματικές γωνίες	Παραπληρωματικές γωνίες
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$	$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$
$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$
$\cot(-\theta) = -\cot \theta$	$\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan \theta$	$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$

Γωνίες με διαφορά $\pi/2$	Γωνίες με διαφορά π
$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos \theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$
$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$
$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot \theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$
$\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan \theta$	$\cot(\pi + \theta) = \cot \theta$

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο με τη βοήθεια του τριγων. κύκλου



Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς γωνιών:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x & , & \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y & , & \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} & , & \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιων γωνιών:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}\end{aligned}$$

Τύποι μετασχηματισμού αθροισμάτων τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενα.

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}\end{aligned}$$

Τύποι μετασχηματισμού γινομένων τριγωνομετρικών αριθμών σε αθροίσματα.

$$\begin{aligned}\sin x \sin y &= \frac{1}{2} \left(\cos(x-y) - \cos(x+y) \right) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} \left(\cos(x-y) + \cos(x+y) \right) \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} \left(\sin(x-y) + \sin(x+y) \right)\end{aligned}$$

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

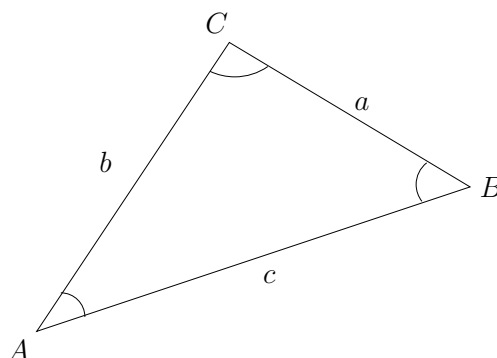
Έστω θ γνωστή γωνία.

- $\sin x = \sin \theta \Leftrightarrow x = 2k\pi + \theta \text{ ή } x = 2k\pi + \pi - \theta,$
- $\cos x = \cos \theta \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \theta,$
- $\tan x = \tan \theta \Leftrightarrow x = k\pi + \theta,$
- $\cot x = \cot \theta \Leftrightarrow x = k\pi + \theta,$

όπου $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Νόμος ημιτόνων και συνημιτόνων

Έστω τυχαίο τρίγωνο ABC



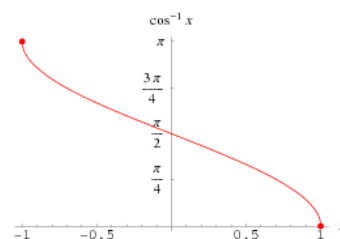
Νόμος ημιτόνων:
$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}.$$

Νόμος συνημιτόνων:
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(A). \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos(B). \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(C). \end{aligned}$$

Αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί

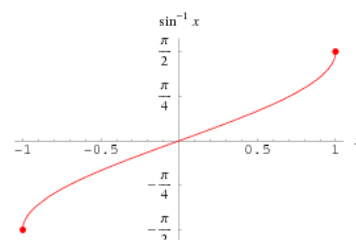
Έστω $x \in [-1, 1]$. Ορίζουμε ως **τόξο συνημιτόνου του x** ($\arccos x$ ή $\cos^{-1} x$) τη μοναδική λύση της εξίσωσης $\cos \theta = x$ στο διάστημα $[0, \pi]$. Δηλαδή

$$\theta = \arccos x \Leftrightarrow \cos \theta = x \text{ και } 0 \leq \theta \leq \pi.$$



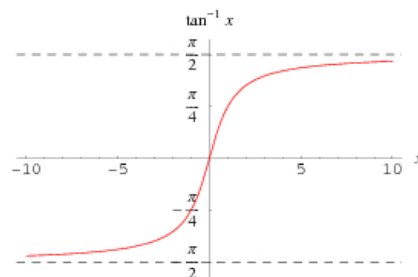
Έστω $y \in [-1, 1]$. Ορίζουμε ως **τόξο ημιτόνου του y** ($\arcsin y$ ή $\sin^{-1} y$) τη μοναδική λύση της εξίσωσης $\sin \theta = y$ στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Δηλαδή

$$\theta = \arcsin y \Leftrightarrow \sin \theta = y \text{ και } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$



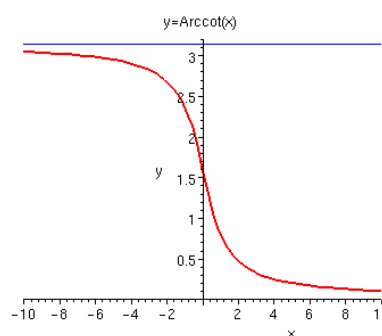
Έστω $a \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε ως **τόξο εφαπτομένης του a** ($\arctan a$ ή $\tan^{-1} a$) τη μοναδική λύση της εξίσωσης $\tan \theta = a$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Δηλαδή

$$\theta = \arctan a \Leftrightarrow \tan \theta = a \text{ και } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$



Έστω $b \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε ως **τόξο συνεφαπτομένης του b** ($\operatorname{arccot} b$ ή $\cot^{-1} b$) τη μοναδική λύση της εξίσωσης $\cot \theta = b$ στο διάστημα $(0, \pi)$. Δηλαδή

$$\theta = \operatorname{arccot} b \Leftrightarrow \cot \theta = b \text{ και } 0 < \theta < \pi.$$



Ασκήσεις

- ❶ Λύστε στο $[0, 2\pi]$ την εξίσωση: $\sin 2x = \cos x$.
- ❷ Αποδείξτε ότι: $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$.
- ❸ Αποδείξτε ότι: $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.
- ❹ Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC με αντίστοιχες πλευρές a, b, c ισχύει ότι

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tau(\tau - a)}{bc}},$$

όπου $\tau = \frac{a+b+c}{2}$ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.