

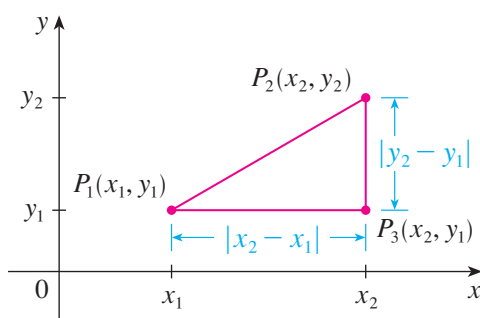
Στοιχεία αναλυτικής γεωμετρίας στο επίπεδο

Δ.Α. Μητσούδης

Απόσταση δύο σημείων

Αν έχουμε δύο σημεία του επιπέδου $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$, η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (1)$$



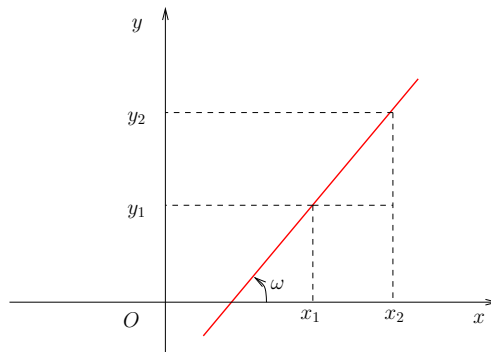
Σχήμα: Απόσταση δύο σημείων P_1 και P_2 .

Η ευθεία

Ο **συντελεστής διεύθυνσης** (ή κλίση) της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ ορίζεται ως

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2)$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης **δεν** ορίζεται για κατακόρυφες ευθείες.



Σχήμα: Ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) .

- Ο συντελεστής διεύθυνσης ερμηνεύεται και ως ένα μέτρο του ρυθμού μεταβολής του y καθώς μεταβάλλεται το x .
- Επίσης, μπορεί να οριστεί ως η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει ο άξονας των x με την ευθεία.

Ένα σημείο $P(x, y)$ με $x \neq x_1$ ανήκει στην ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης m που διέρχεται από ένα δεδομένο σημείο $P_1(x_1, y_1)$, αν και μόνον αν ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία P και P_1 είναι ίσος με m . Δηλαδή

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1).$$

Άρα αν γνωρίζουμε **το συντελεστή διεύθυνσης m** μιας ευθείας **και ένα σημείο της $P_1(x_1, y_1)$** , τότε η εξίσωσή της είναι

$$y = m(x - x_1) + y_1. \quad (3)$$

Παράδειγμα. Βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(-3, 1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης -1 .

$$y - 1 = -1(x - (-3)) \Rightarrow y - 1 = -x - 3 \Rightarrow y = -x - 2.$$

- Αν μια ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης m και τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, b)$, τότε η εξίσωσή της είναι

$$y = mx + b.$$

- Μια οριζόντια ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $m = 0$, άρα η εξίσωσή της θα είναι της μορφής

$$y = b,$$

όπου $(0, b)$ είναι το σημείο τομής της με τον άξονα των y .

- Μια κατακόρυφη ευθεία δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης, αλλά η εξίσωσή της είναι

$$x = a,$$

όπου $(a, 0)$ είναι το σημείο τομής της με τον άξονα των x .

- Δύο μη κατακόρυφες ευθείες είναι **παράλληλες** αν και μόνον αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.
- Δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης m_1 και m_2 είναι **κάθετες** αν και μόνον αν

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Γενική μορφή ευθείας. Γενικά, κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

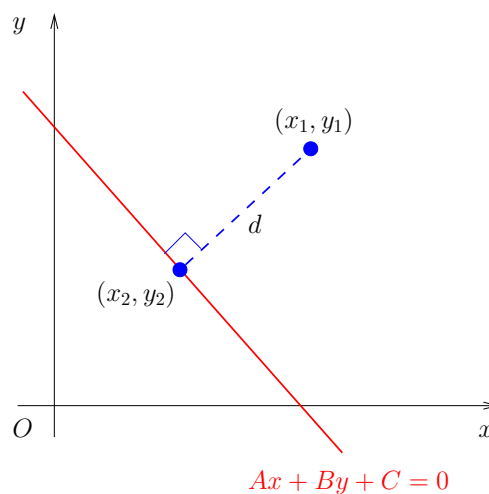
$$Ax + By + C = 0, \quad \text{όπου } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0. \quad (4)$$

Λύση. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $4x + 6y + 5 = 0$ είναι $m = -2/3$. Άρα η ζητούμενη ευθεία, σύμφωνα με την (3), έχει εξίσωση

$$\begin{aligned} y - 2 &= -\frac{2}{3}(x - 5) \\ \Leftrightarrow 3y - 6 &= -2x + 10 \\ \Leftrightarrow 2x + 3y - 16 &= 0. \end{aligned}$$

Η απόσταση d του σημείου (x_1, y_1) από την ευθεία $Ax + By + C = 0$ είναι

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Απόδειξη

Θα κάνουμε την απόδειξη για την περίπτωση που $y_i > 0$. Έστω ακόμη ότι $x_1 < x_3 < x_2$ και ότι το σημείο (x_3, y_3) βρίσκεται πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα άλλα δύο σημεία. Θεωρούμε τότε τα ακόλουθα τραπέζια με κορυφές:

Τραπέζιο 1: $(x_1, 0), (x_1, y_1), (x_3, y_3), (x_3, 0)$.

Τραπέζιο 2: $(x_3, 0), (x_3, y_3), (x_2, y_2), (x_2, 0)$.

Τραπέζιο 3: $(x_1, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2, 0)$.

Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των δύο πρώτων τραπεζίων μείον το εμβαδόν του τρίτου τραπεζίου. Άρα

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \\ &= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2) \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Αν οι σειρά των κορυφών είναι διαφορετική, ή αν η κορυφή (x_3, y_3) δεν βρίσκεται πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα άλλα δύο σημεία, τότε ο προηγούμενος τύπος μπορεί να δώσει αρνητικό τιμή για το εμβαδό. Για να εξασφαλίσουμε ότι θα έχουμε θετικό εμβαδό βάζουμε την απόλυτη τιμή.

Συνευθειακά σημεία

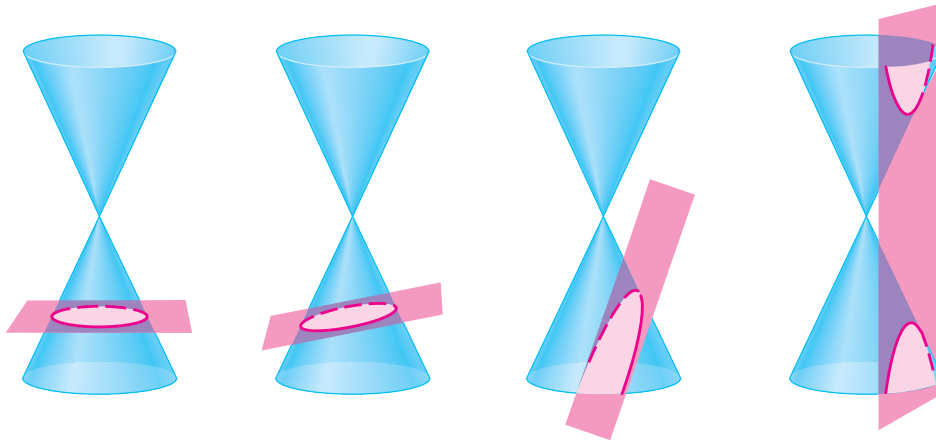
Τα σημεία $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$, είναι συνευθειακά (δηλ. ανήκουν στην ίδια ευθεία) αν και μόνον αν

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Αν τα τρία αυτά σημεία ανήκουν στην ίδια ευθεία, τότε το τρίγωνο που σχηματίζουν εκφυλίζεται σε ευθεία, επομένως το εμβαδόν του θα είναι μηδέν. Άρα έχουμε $E=0$ και από την προηγούμενη εξίσωση προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

Εξισώσεις 2ου βαθμού. (Κωνικές τομές)

Στη συνέχεια, θα δούμε τις εξισώσεις του κύκλου, της παραβολής, της έλλειψης, και της υπερβολής. Τα σχήματα αυτά λέγονται και κωνικές τομές, καθώς προκύπτουν ως τομές ενός κώνου και ενός επιπέδου.



Σχήμα: Κωνικές τομές: κύκλος, έλλειψη, παραβολή, υπερβολή.

Κύκλος

Ο κύκλος ορίζεται ως το σύνολο των σημείων $P(x, y)$ του επιπέδου που η απόστασή τους από ένα σταθερό σημείο $C(x_0, y_0)$ είναι σταθερή, ίση με r . Επομένως

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

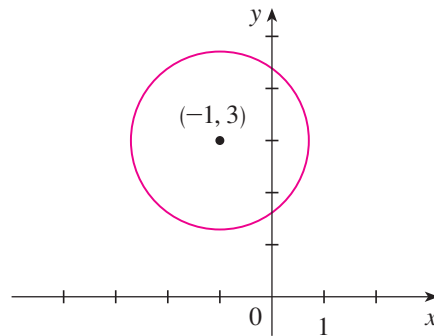
Το σημείο $C(x_0, y_0)$ λέγεται **κέντρο του κύκλου** και το r **ακτίνα**.

Επομένως, η εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο $C(x_0, y_0)$ και ακτίνα r είναι

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (5)$$

Παράδειγμα

Σχεδιάστε την καμπύλη με εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$.



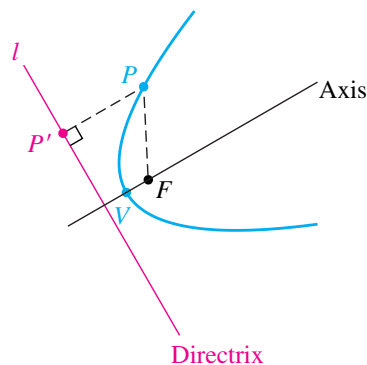
Λύση. Κάνοντας συμπλήρωση τετραγώνου, έχουμε

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 3. \end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη καμπύλη είναι κύκλος με κέντρο το $(-1, 3)$ και ακτίνα $\sqrt{3}$.

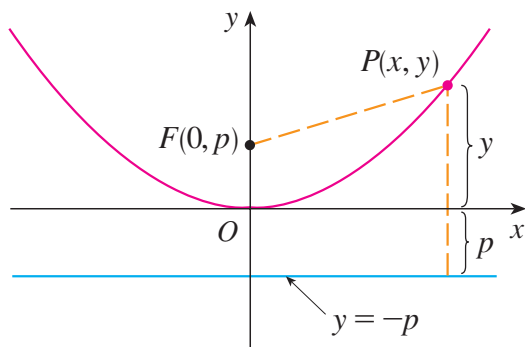
Παραβολή

Είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο F που λέγεται **εστία** και από μια δεδομένη ευθεία l , που λέγεται **διευθετούσα**.



Η ευθεία που διέρχεται από την εστία και είναι κάθετη στην διευθετούσα λέγεται **άξονας** της παραβολής. Το σημείο V που βρίσκεται στο μέσον του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα την εστία, και το σημείο τομής της διευθετούσας με τον άξονα, λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια παραβολή που η κορυφή της είναι στο $O(0, 0)$ και η διευθετούσα της είναι παράλληλη στον άξονα των x και έχει εξίσωση $y = -p$. Τότε η εστία F έχει συντεταγμένες $(0, p)$.



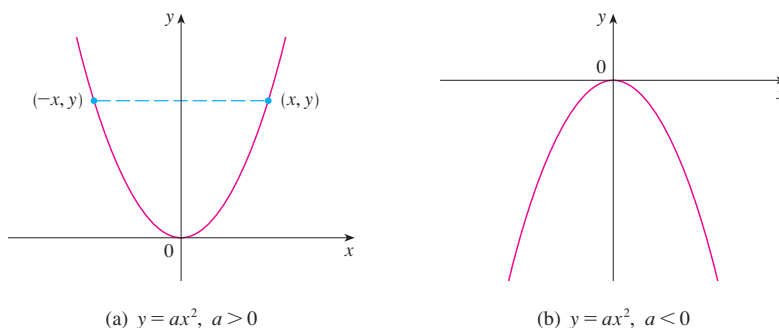
Από τον ορισμό, το σημείο $P(x, y)$ θα ανήκει στην παραβολή $\Leftrightarrow |FP| = |PP'|$, όπου P' είναι η προβολή του σημείου P στην ευθεία $y = -p$. Άρα το σημείο P' έχει συντεταγμένες $(x, -p)$. Δηλαδή

$$\begin{aligned} |FP| = |PP'| &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4py \Leftrightarrow y = \frac{1}{4p}x^2. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $a = 1/(4p)$, τότε προκύπτει ότι η εξίσωση της παραβολής είναι

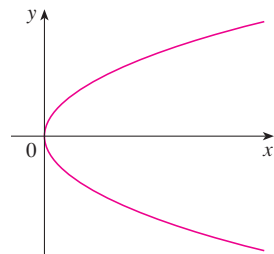
$$y = ax^2. \quad (6)$$

Αν $a > 0$ η παραβολή “ανοίγει” προς τα πάνω, ενώ αν $a < 0$ “ανοίγει” προς τα κάτω.

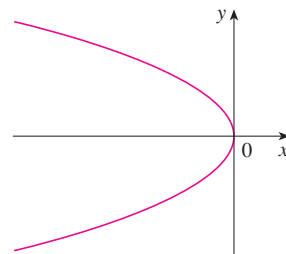


Επίσης, αν βάλουμε στη θέση του x το $-x$, έχουμε $a(-x)^2 = ax^2 = y$, άρα η παραβολή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y .

Αν τώρα εναλλάξουμε το ρόλο των x και y θα πάρουμε την παραβολή $x = ay^2$, που θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των x , και για $a > 0$ θα “ανοίγει” προς τα δεξιά, ενώ για $a < 0$ θα “ανοίγει” προς τα αριστερά.

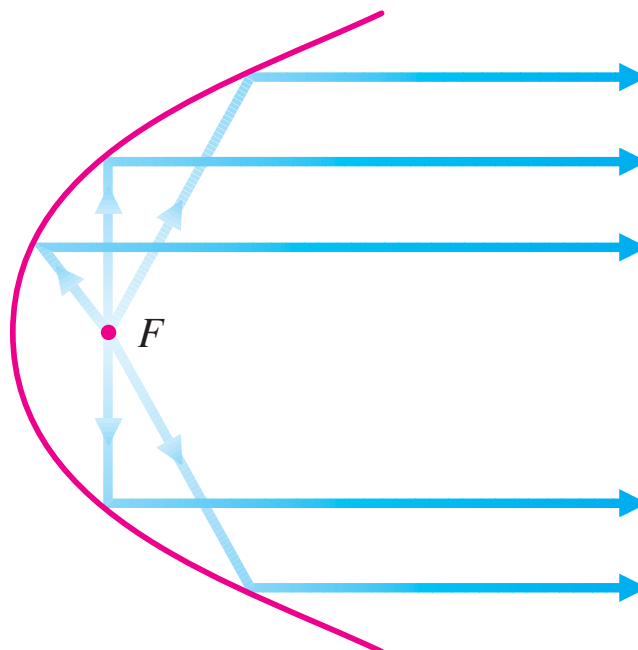


(a) $x = ay^2, a > 0$



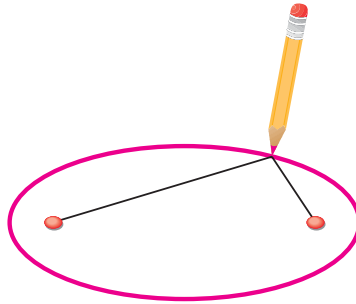
(b) $x = ay^2, a < 0$

Παραβολή και ανάκλαση



Έλλειψη

Είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου που το άθροισμα των αποστάσεων τους από δύο δεδομένα σταθερά σημεία F_1 και F_2 είναι μία σταθερά. Τα σημεία F_1 και F_2 λέγονται **εστίες** της έλλειψης.

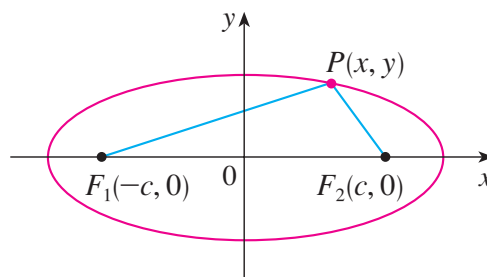


Για να βρούμε την απλούστερη εξίσωση της έλλειψης τοποθετούμε τις εστίες στον άξονα των x στα σημεία $F_1(-c, 0)$ και $F_2(c, 0)$.

Έστω ότι το άθροισμα των αποστάσεων των σημείων της έλλειψης από τις εστίες είναι $2a > 0$.

Τότε το σημείο $P(x, y)$ θα ανήκει στην έλλειψη αν και μόνον αν

$$\begin{aligned} |PF_1| + |PF_2| = 2a &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

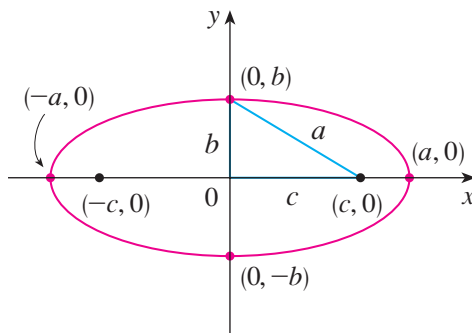


Μετά από πράξεις, και αφού θέσουμε

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$



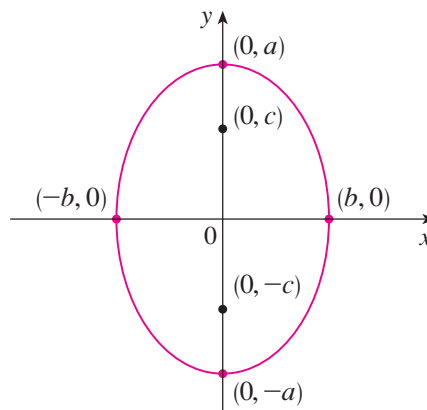
- Επειδή $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, έχουμε ότι $b < a$.
- Τα σημεία τομής της έλλειψης με τον άξονα των x είναι $(\pm a, 0)$, και λέγονται **κορυφές** της έλλειψης.
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις κορυφές λέγεται **μεγάλος άξονας**.
- Τα σημεία τομής της έλλειψης με τον άξονα των y είναι $(0, \pm b)$ και ονομάζονται **δευτερεύουσες κορυφές**,
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δευτερεύουσες κορυφές λέγεται **μικρός άξονας**.
- Η έλλειψη είναι συμμετρική και ως προς τον άξονα των x και ως προς τον άξονα των y .
- Αν οι δύο εστίες συμπίπτουν ($F_1 \equiv F_2$), τότε $c = 0$, και άρα $a = b$, οπότε η έλλειψη γίνεται ένας κύκλος με ακτίνα $r = a = b$.

Αν οι εστίες της έλλειψης βρίσκονται στον άξονα των y , η εξίσωσή της προκύπτει εναλλάσσοντας τα x και y στην (7). Συγκεκριμένα:

Η έλλειψη

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad a \geq b > 0 \quad (8)$$

έχει εστίες τα σημεία $(0, \pm c)$, όπου $c^2 = a^2 - b^2$, και κορυφές τα σημεία $(0, \pm a)$.

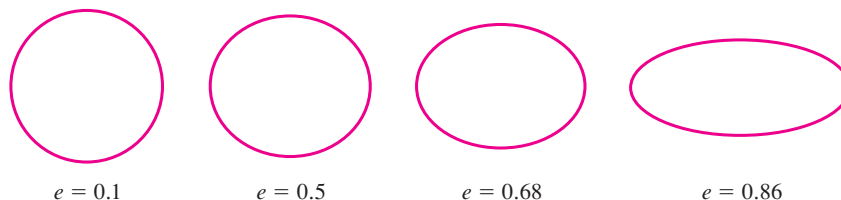


Έκκεντρότητα έλλειψης

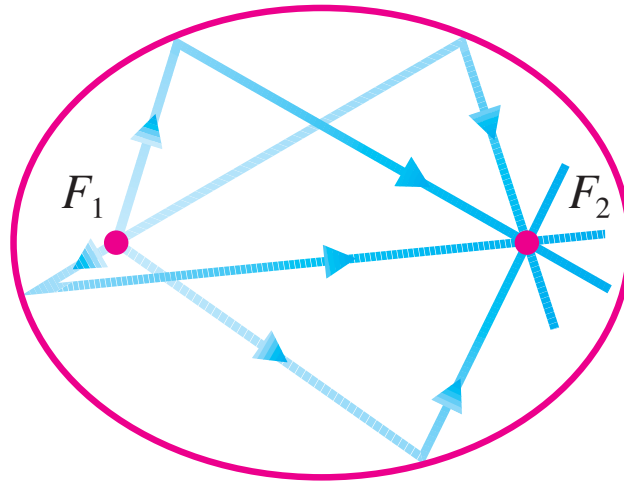
Για την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ή $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, (a > b > 0)$ η **εκκεντρότητα** e είναι ο λόγος

$$e = \frac{c}{a},$$

όπου $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Προφανώς $0 < e < 1$.

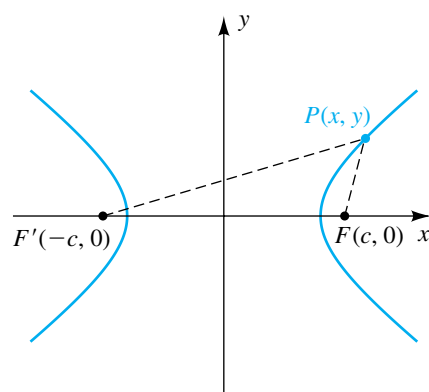


Έλλειψη και ανάκλαση



Υπερβολή

Είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου που η διαφορά των αποστάσεων τους από δύο δεδομένα σταθερά σημεία F και F' είναι μία σταθερά. Τα σημεία F και F' λέγονται **εστίες** της υπερβολής.



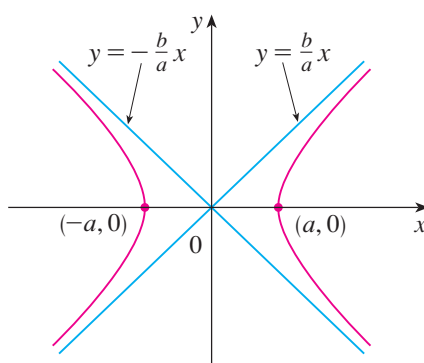
Αν οι εστίες της υπερβολής είναι στα σημεία $(\pm c, 0)$ του άξονα των x , και η διαφορά των αποστάσεων είναι

$$|PF| - |PF'| = \pm 2a,$$

τότε η εξίσωση της υπερβολής είναι

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (9)$$

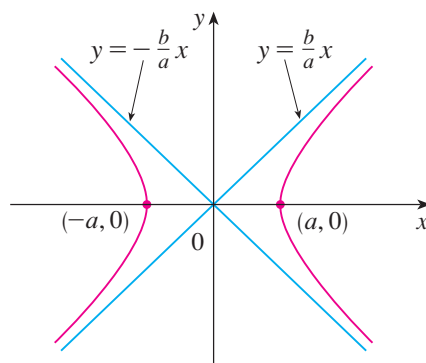
όπου $c^2 = a^2 + b^2$.



- Τα σημεία τομής της υπερβολής με τον άξονα των x είναι και πάλι τα $(\pm a, 0)$, που ονομάζονται κορυφές της υπερβολής.
- Αν βάλουμε $x = 0$ στην (9) θα πάρουμε $y^2 = -b^2$, που είναι αδύνατο. Άρα η υπερβολή δεν τέμνει τον άξονα των y .
- Η υπερβολή είναι συμμετρική και ως προς τους δύο άξονες.
- Από την (9) έχουμε

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow |x| \geq a \Rightarrow x \geq a \text{ ή } x \leq -a.$$

Άρα η υπερβολή αποτελείται από δύο κλάδους, έναν για $x \geq a$ και έναν για $x \leq -a$.



Για να σχεδιάσουμε μια υπερβολή είναι χρήσιμο να φέρουμε αρχικά τις ευθείες

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Οι ευθείες αυτές λέγονται **ασύμπτωτες** της υπερβολής και έχουν την εξής ιδιότητα:

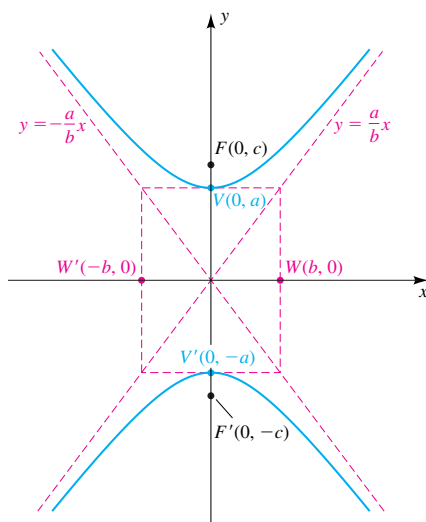
Και οι δύο κλάδοι της υπερβολής προσεγγίζουν τις ασύμπτωτες (δηλ. πλησιάζουν ολοένα και πιά κοντά στις ευθείες αυτές χωρίς να τις τέμνουν ποτέ).

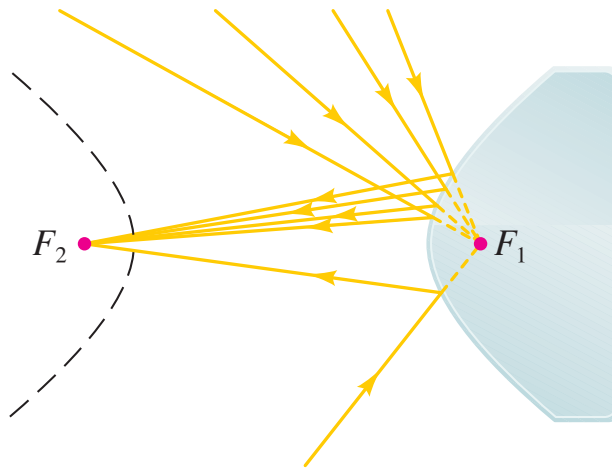
Αν, τώρα, οι εστίες της υπερβολής βρίσκονται στον άξονα των y , αντιστρέφουμε το ρόλο των x και y και έχουμε:

Η υπερβολή

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

έχει εστίες $(0, \pm c)$, όπου $c^2 = a^2 + b^2$, κορυφές $(0, \pm a)$, και ασύμπτωτες $y = \pm \frac{a}{b}x$.

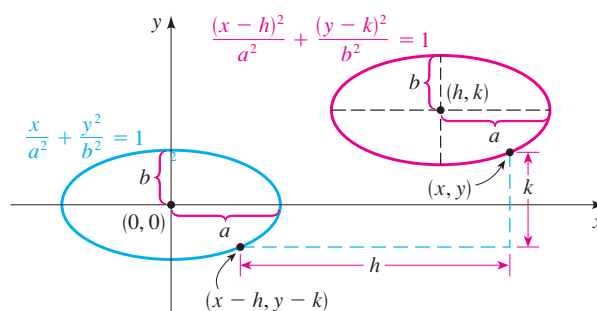




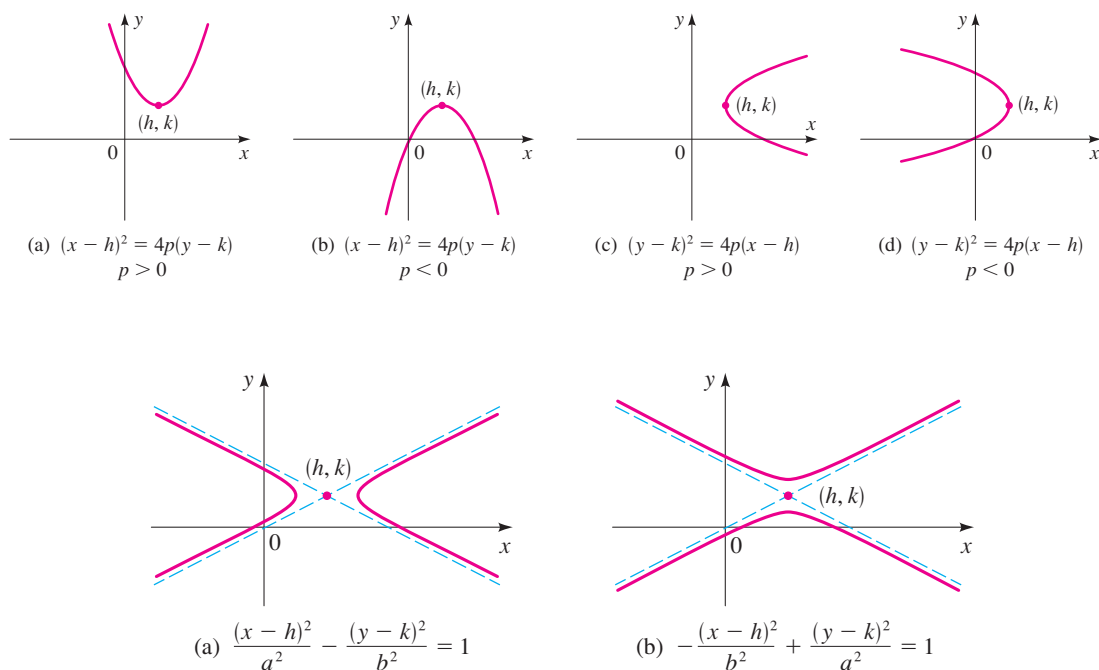
Μετατοπισμένες κωνικές τομές

Αν $h, k > 0$ τότε οι ακόλουθες αντικαταστάσεις επιφέρουν στα γραφήματα των εξισώσεων τα εξής αποτελέσματα:

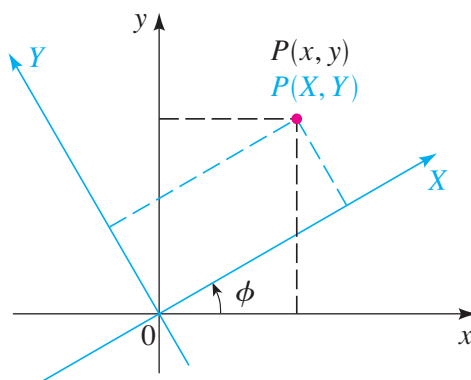
- Αν $x \leftarrow x - h \Rightarrow$ το γράφημα μετατοπίζεται h μονάδες προς τα δεξιά.
- Αν $x \leftarrow x + h \Rightarrow$ το γράφημα μετατοπίζεται h μονάδες προς τα αριστερά
- Αν $y \leftarrow y - k \Rightarrow$ το γράφημα μετατοπίζεται k μονάδες προς τα πάνω
- Αν $y \leftarrow y + k \Rightarrow$ το γράφημα μετατοπίζεται k μονάδες προς τα κάτω



Μετατοπισμένες κωνικές τομές



Στροφή αξόνων



Έστω ότι οι άξονες x και y στρέφονται κατά την οξεία γωνία ϕ και σχηματίζουν τους άξονες X και Y . Τότε οι συντεταγμένες (x, y) και (X, Y) ενός σημείου ως προς τα δύο συστήματα συντεταγμένων συνδέονται με τους τύπους

$$\begin{aligned} x &= X \cos \phi - Y \sin \phi & X &= x \cos \phi + y \sin \phi \\ y &= X \sin \phi + Y \cos \phi & Y &= -x \sin \phi + y \cos \phi \end{aligned}$$

ή

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

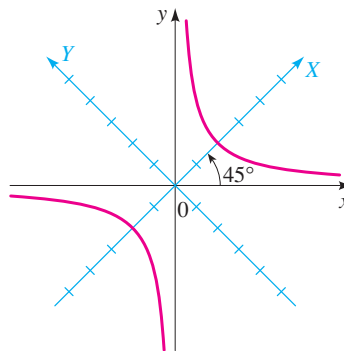
Παράδειγμα

Στρέψτε τους άξονες κατά $\pi/4$ για να δείξετε ότι η εξίσωση $xy = 2$ παριστάνει υπερβολή.

$$\begin{aligned}x &= X \cos \frac{\pi}{4} - Y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}} \\y &= X \sin \frac{\pi}{4} + Y \cos \frac{\pi}{4} = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Άρα

$$xy = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} \right) = 2 \Leftrightarrow \frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1.$$



Γενική μορφή κωνικών τομών

Το γράφημα της εξίσωσης

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

είναι είτε μια κωνική τομή ή μια εκφυλισμένη κωνική τομή. Στις μη εκφυλισμένες περιπτώσεις το γράφημα είναι:

- Παραβολή αν $B^2 - 4AC = 0$.
- Έλλειψη αν $B^2 - 4AC < 0$.
- Υπερβολή αν $B^2 - 4AC > 0$.

Η ποσότητα $B^2 - 4AC$ λέγεται διακρίνουσα της εξίσωσης.