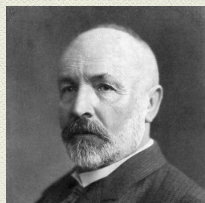


Μερικά στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

Σύνολο ονομάζουμε κάθε συλλογή M , (σαφώς) διακριτών αντικειμένων m (που ονομάζουμε «στοιχεία» του συνόλου M), της διαίσθησης ή της σκέψης μας, που θεωρούμε ως ολότητα.



Georg Cantor
(1845 - 1918)

Παραδείγματα

- Το σύνολο των φωνηέντων του ελληνικού αλφαβήτου: $\{\alpha, \epsilon, \eta, \iota, \omicron, \upsilon, \omega\}$.
- Το σύνολο των ψηφίων του αριθμού 3134: $\{1, 3, 4\}$
- Το σύνολο των ρητών αριθμών:
 $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m, n \text{ ακέραιοι}, n \neq 0\}$
- Το σύνολο όλων των θετικών άρτιων ακεραίων $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ ή $\{x : x \text{ είναι θετικός άρτιος ακέραιος}\}$

Εμείς θα ασχοληθούμε κυρίως με σύνολα μαθηματικών οντοτήτων. Π.χ., σύνολα αριθμών, σύνολα καμπυλών, σύνολα γεωμετρικών σχημάτων, ...

Θα συμβολίζουμε συνήθως τα σύνολα με κεφαλαία γράμματα ($A, B, \dots$) και τα στοιχεία τους με πεζά ($a, b, \dots, x, y, z$).

Συμβολισμός: $x \in S$

“το x είναι ένα στοιχείο του S ”

ή

“το x ανήκει στο S ”

Ισότητα συνόλων

Θα λέμε ότι δύο σύνολα A και B είναι **ίσα** όταν περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Συμβολισμός: $A = B$

- Παράδειγμα: $\{2,4,6,8\} = \{2,6,8,4\}$
- $\{2,4,6,8\} = \{2,2,4,6,6,8\}$

Είναι δυνατόν ένα σύνολο να μην περιέχει κανένα απολύτως στοιχείο. Το σύνολο αυτό ονομάζεται το **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με $\emptyset$.

Γενικά, στις εφαρμογές στις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε σύνολα, θα υπάρχει ένα δεδομένο σύνολο S που θα μας δίδεται εξ αρχής και τα υπόλοιπα σύνολα θα είναι υποσύνολα αυτού του συνόλου. Το S θα αναφέρεται ως **καθολικό σύνολο** και θα είναι διαφορετικό κάθε φορά ανάλογα με την εφαρμογή που εξετάζουμε.

Με το συμβολισμό

$$\{x : x \in S \text{ και } x \text{ ικανοποιεί } P\}$$

εννοούμε τα στοιχεία x του S που ικανοποιούν την ιδιότητα P

Υποσύνολα

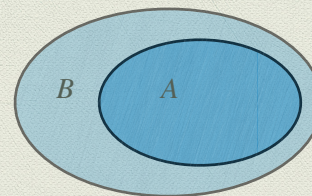
Θα λέμε ότι ένα σύνολο A είναι **υποσύνολο** ενός συνόλου B , και θα γράφουμε $A \subseteq B$ αν κάθε στοιχείο του A ανήκει και στο B . Επιπλέον, λέμε ότι το A περιέχεται στο B ή ότι το B περιέχει το A .

Προσοχή. Η σχέση $A \subseteq B$ δεν αποκλείει την περίπτωση να έχουμε και $B \subseteq A$. Βεβαίως αυτό θα συμβαίνει αν τα σύνολα A και B έχουν τα ίδια στοιχεία. Δηλαδή,
 $A = B$ αν και μόνον αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$

Αν $A \subseteq B$ αλλά $A \neq B$, τότε λέμε ότι το A είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B και γράφουμε $A \subset B$.

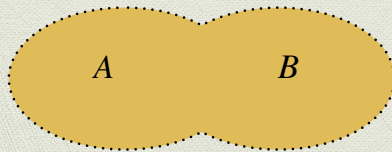
Διαγράμματα Venn

Π.χ. $A \subset B$

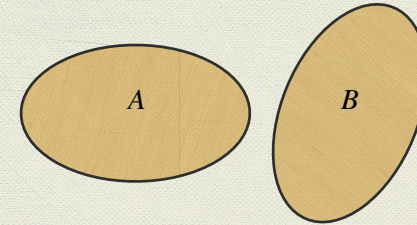


Ένωση συνόλων

Αν A και B είναι δύο σύνολα, τότε η **ένωσή τους** $A \cup B$ είναι ένα νέο σύνολο που τα στοιχεία του ανήκουν **ή στο A ή στο B ή και στα δύο**. Με άλλα λόγια, η ένωση $A \cup B$ είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα A και B .

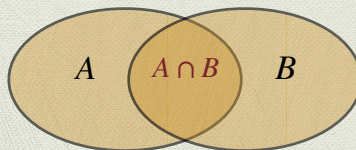


Δύο σύνολα A , B λέγονται **ξένα** αν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, δηλαδή αν $A \cap B = \emptyset$



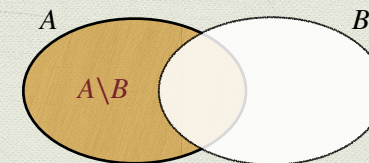
Τομή συνόλων

Αν A και B είναι δύο σύνολα, τότε η **τομή τους** $A \cap B$ είναι το σύνολο που τα στοιχεία του ανήκουν **και στο A και στο B** .



Διαφορά δύο συνόλων

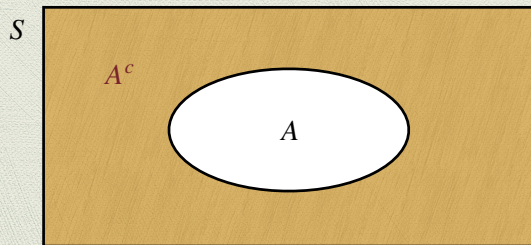
Αν A και B είναι δύο σύνολα, τότε η **διαφορά τους** $A \setminus B$ είναι το σύνολο των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο B .



$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$$

Συμπλήρωμα ενός συνόλου

Αν S είναι το καθολικό σύνολο και $A \subset S$, τότε το **συμπλήρωμα του A** είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του S που δεν ανήκουν στο A .
Συμβολικά, A^c ή A'



Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι $A \cup B = B \cup A$

Έστω $X = A \cup B$ και $Y = B \cup A$.

Για να δείξουμε ότι $X = Y$, θα αποδείξουμε ότι $X \subseteq Y$ και $Y \subseteq X$.

Έστω $x \in X$. Τότε το x ανήκει σε ένα τουλάχιστον από τα A και B .

Άρα το x ανήκει σε ένα τουλάχιστον από τα B και A , δηλ. $x \in Y$.

Επομένως, κάθε στοιχείο του X ανήκει και στο Y , άρα $X \subseteq Y$.

Εντελώς ανάλογα αποδεικνύουμε ότι $Y \subseteq X$, άρα $X = Y$.

Συμβολισμός

Αν $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ είναι μια πεπερασμένη συλλογή συνόλων,
τότε συμβολίζουμε

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

και

$$\bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

Ασκήσεις

- Γράψτε αναλυτικά τα στοιχεία των ακόλουθων συνόλων
 $A = \{x : x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x : (x - 1)^2 = 0\}$,
 $C = \{x : (x + 8)^2 = 9^2\}$, $D = \{x : x^3 - 2x^2 + x = 2\}$
- Έστω $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$. Ποιές από τις ακόλουθες σχέσεις είναι αληθείς και ποιές όχι; Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.
(α) $A \subset B$, (β) $A \subseteq B$, (γ) $A \in B$, (δ) $1 \in A$, (ε) $1 \subseteq A$.
- Αποδείξτε ότι αν $A \subseteq C$ και $B \subseteq C$, τότε $A \cup B \subseteq C$
- Αποδείξτε ότι αν $A \subseteq B$ και $A \subseteq C$, τότε $A \subseteq B \cap C$
- Αποδείξτε ότι $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Λίγα λόγια περί αποδείξεων

Τι είναι απόδειξη;

Απόδειξη είναι μια διαδικασία που επικυρώνει ότι κάποια μαθηματική πρόταση είναι ορθή, μέσα στα αποδεκτά πλαίσια του πεδίου των μαθηματικών. Η απόδειξη παράγεται αναγωγικά και όχι εμπειρικά. Δηλαδή, η απόδειξη πρέπει να δείχνει ότι μια πρόταση είναι αληθής για όλες τις περιπτώσεις που εφαρμόζεται, χωρίς καμία εξαίρεση



Τρόποι αποδείξεων

- Ευθεία απόδειξη
- Απαγωγή σε άτοπο (Εις άτοπον απαγωγή - *reductio ad absurdum*)
- Επαγωγική μέθοδος (Μαθηματική ή τελεία επαγωγή)
- Αντιθετοαντιστροφή
- Κατασκευαστική απόδειξη
- ...

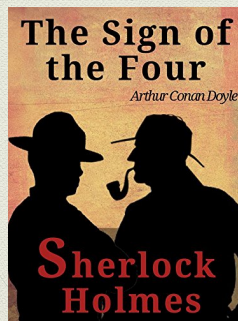
Απαγωγή σε άτοπο

Sherlock Holmes (The sign of the four, 1890):

"How often have I said to you that when you have eliminated the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth?"

"Πόσες φορές θα στο πω!

Όταν απαλείψεις το αδύνατον,
αυτό που απομένει είναι η αλήθεια,
όσο παράξενη και αν φαίνεται!"



Μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής

Είναι μια απλή αλλά ισχυρή και ευέλικτη μέθοδος απόδειξης
προτάσεων που αφορούν, άμεσα ή έμμεσα, **ακεραίους**.

Απαγωγή σε άτοπο

Στην εις άτοπον απαγωγή δείχνεται ότι αν κάποια πρόταση ήταν ψευδής, τότε συμβαίνει μια λογική αντίφαση, επομένως η αρχική πρόταση θα πρέπει να είναι αληθής.

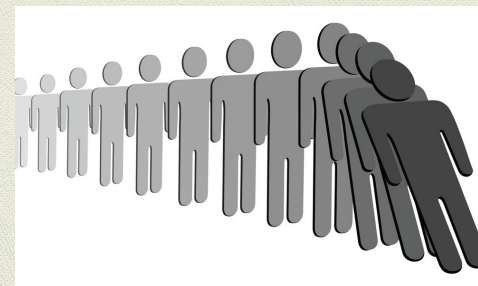
Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Για να πάρετε μια ιδέα του πόσο δυσκολότερες είναι αποδείξεις του ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, χωρίς τη χρήση της εις άτοπον απαγωγής, δείτε π.χ.,

http://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_2#Proofs_of_irrationality

Η ιδέα της επαγωγικής απόδειξης βασίζεται στην ακόλουθη παρατήρηση: Σίγουρα δεν υπάρχει ένας **μέγιστος** ακέραιος μιας και αν προσθέσουμε 1 σε έναν ακέραιο k , παίρνουμε τον ακέραιο $k + 1$ που είναι μεγαλύτερος από τον k .

Από την άλλη μεριά, αν ξεκινήσουμε από τον αριθμό 1, μπορούμε να φτάσουμε σε οποιονδήποτε θετικό ακέραιο εκτελώντας ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων, περνώντας διαδοχικά από τον k στον $k + 1$.



Παράδειγμα: Αποδείξτε επαγωγικά ότι: $\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$
Ας συμβολίσουμε με $P(n)$ την πρόταση $\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Τότε, π.χ., για $n = 1$, η $P(1)$: $\frac{1^3}{3} = \frac{1}{3} < 1 = 1^2$ ✓

Για $n = 2$, η $P(2)$: $\frac{2^3}{3} = \frac{8}{3} < 5 = 1^2 + 2^2$ ✓

Για $n = 3$, η $P(3)$: $\frac{3^3}{3} = 9 < 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$ ✓

Η επαγωγική διαδικασία συμβολικά

$P(1)$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Άρα η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Το βήμα " $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ " της απόδειξης ονομάζεται **επαγωγικό βήμα**, και η υπόθεση ότι η $P(k)$ είναι αληθής, ονομάζεται **επαγωγική υπόθεση**.



Προσοχή! Ένα από τα μειονεκτήματα της μεθόδου της επαγωγής, είναι ότι πρέπει κανείς να γνωρίζει εκ των προτέρων τον τύπο που περιγράφει την κατάσταση που μελετά γιατί τότε μόνο τότε μπορεί να προσπαθήσει να τον αποδείξει!

Θέλουμε να δείξουμε ότι η πρόταση $P(n)$ αληθεύει για **οποιαδήποτε** τιμή του φυσικού n .

Για το σκοπό αυτό εργαζόμαστε ως εξής:

Έστω ότι η πρόταση $P(k)$: $\frac{k^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + k^2$, είναι αληθής για μια σταθερή τιμή $k \geq 1$. (Επαγωγική υπόθεση)

Τώρα, χρησιμοποιώντας αυτήν ως υπόθεση, θα δείξουμε ότι είναι αληθής και η πρόταση:

$$P(k+1): \frac{(k+1)^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2.$$

...



Συμβολισμός αθροισμάτων

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Παραδείγματα: $\sum_{k=1}^4 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$\sum_{i=0}^5 2^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

Ασκήσεις

1. Αποδείξτε επαγωγικά ότι: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. Αποδείξτε επαγωγικά ότι: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$
4. Προσπαθήστε να αποδείξετε τις 1 και 2 χωρίς να χρησιμοποιήσετε επαγωγή.
(Υπόδειξη: Στην 1 χρησιμοποιήστε ότι $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$.)