

Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Σχολή Μηχανικών



Ιανουάριος 2020

1 Εισαγωγή

Η εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ αφού δεν υπάρχει κανένας πραγματικός αριθμός που το τετράγωνό του να είναι ίσο με -1 . Όμως από το 16ο αιώνα κιόλας εισήχθη ένα νέο είδος αριθμών που λέγονται μιγαδικοί αριθμοί ώστε να είναι εφικτή η λύση τέτοιων εξισώσεων. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει ένας «φανταστικός» αριθμός i που έχει την ιδιότητα $i^2 = -1$. (Φυσικά, ένας τέτοιος αριθμός δεν είναι πραγματικός αφού το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικό.) Τότε όμως, για παράδειγμα, το πολυώνυμο $x^2 + 1$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x + i)(x - i),$$

και η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ έχει λύσεις $x = \pm i$. Ανάλογα, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $x^2 + 9 = x^2 - (3i)^2 = (x - 3i)(x + 3i)$, και να δούμε άμεσα ότι η εξίσωση $x^2 + 9 = 0$ έχει λύσεις $x = \pm 3i$.

2 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 2.1. Ένας μιγαδικός αριθμός είναι ένας αριθμός της μορφής $a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, και το i είναι η λεγόμενη φανταστική μονάδα, δηλαδή ο αριθμός που ικανοποιεί

$$i^2 = -1.$$

Το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται $\mathbb{C}$.

Παρατηρήσεις

- Μιας και $i^2 = -1$, μπορούμε να σκεφτόμαστε το i ως την τετραγωνική ρίζα του -1 . Φυσικά ισχύει και ότι $(-i)^2 = i^2 = -1$, άρα και το $-i$ είναι τετραγωνική ρίζα του -1 . Θα λέμε ότι το i είναι η *πρωτεύουσα τετραγωνική ρίζα* του -1 και θα γράφουμε $\sqrt{-1} = i$. Γενικότερα, αν c είναι ένας θετικός αριθμός θα γράφουμε

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}i.$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σύμβαση ο τύπος για την εύρεση των ριζών της εξίσωσης δευτέρου βαθμού $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, εξακολουθεί να ισχύει ακόμη και όταν η διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac$ είναι αρνητική:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Στην ηλεκτρολογία ή σε συστήματα ελέγχου, συχνά, η φανταστική μονάδα συμβολίζεται με το γράμμα j μιας και το i χρησιμοποιείται συνήθως για να συμβολίσει το ηλεκτρικό ρεύμα.
- Στη συνέχεια, τα γράμματα z και w θα συμβολίζουν μιγαδικούς αριθμούς, ενώ τα a, b, c, d, x, y πραγματικούς.

Παράδειγμα 1. Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $z^2 - z + 1 = 0$.

Λύση: Η διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$.

$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

□

Θεωρήστε το μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε ο πραγματικός αριθμός a ονομάζεται **πραγματικό μέρος** (real part) του z και συμβολίζεται με $\operatorname{Re}(z)$, ενώ ο πραγματικός αριθμός b ονομάζεται **φανταστικό μέρος** (imaginary part) του z και συμβολίζεται με $\operatorname{Im}(z)$. Π.χ., αν $z = 2 - \sqrt{2}i$, τότε $\operatorname{Re}(z) = 2$ και $\operatorname{Im}(z) = -\sqrt{2}$.

Κάθε πραγματικός αριθμός x μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μιγαδικός αριθμός με μηδενικό φανταστικό μέρος ($x = x + 0i$). Με αυτή την έννοια το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ είναι μια επέκταση του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, και το $\mathbb{R}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι αν έχουν ίσα πραγματικά και φανταστικά μέρη. Π.χ., έστω $z = a + bi$ και $w = c + di$. Τότε

$$z = w \Leftrightarrow a = c \text{ και } b = d.$$

Επίσης,

$$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ και } \operatorname{Im}(z) = 0.$$

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις. Έστω $z = a + bi$, $w = c + di$.

- **Πρόσθεση - αφαίρεση:** $z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$.
- **Πολλαπλασιασμός:** $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- Αν $z \neq 0$, τότε ο **αντίστροφος** του z συμβολίζεται με z^{-1} ή $\frac{1}{z}$ και ορίζεται ως

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Φυσικά, $zz^{-1} = 1$.

- **Διαίρεση:** $\frac{w}{z} = wz^{-1}$.

Παράδειγμα 2

$$(1 + 3i) + (-2 - i) = -1 + 2i,$$

$$(-1 + 2i)(3 - 2i) = (-1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)) + ((-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3)i = 1 + 8i,$$

$$\frac{-1 + 2i}{3 - 2i} = (-1 + 2i)(3 - 2i)^{-1} = (-1 + 2i)\left(\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i\right) = -\frac{7}{13} + \frac{4}{13}i.$$

□

Ορισμός 2.2. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$. Λέμε **μέτρο** του z την ποσότητα $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$. Επίσης, ονομάζουμε **συζυγή** του z τον μιγαδικό αριθμό $\bar{z} = x - iy$.

Πρόταση 2.1. Έστω $z, w \in \mathbb{C}$. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\bar{\bar{z}} = z$ και $|\bar{z}| = |z|$.
2. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
3. $|z|^2 = z \bar{z}$.
4. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, ($z \neq 0$).

5. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ και $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
6. $|zw| = |z||w|$.
7. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
8. $|z+w| \leq |z| + |w|$. (Τριγωνική ανισότητα)

Παράδειγμα 3. Εκφράστε τον αριθμό $\frac{2-i}{1+3i}$ στη μορφή $a + bi$.

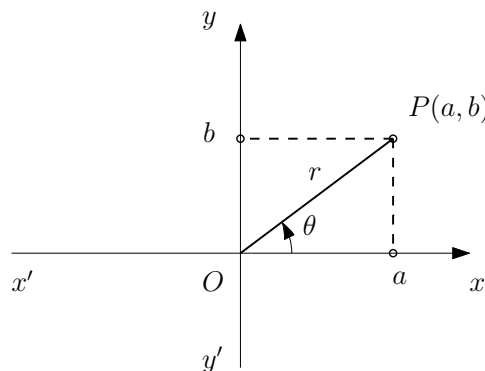
Λύση: Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με το συζυγή του παρονομαστή.

$$\frac{2-i}{1+3i} = \frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{-1-7i}{1^2+3^2} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i.$$

□

3 Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών αριθμών. Μέτρο και όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού

Θεωρούμε στο επίπεδο ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο O , $x'x$ τον άξονα των τετμημένων (οριζόντιος άξονας) και $y'y$ τον άξονα των τεταγμένων (κατακόρυφος άξονας). Τότε μπορούμε να φανταστούμε τον μη μηδενικό αριθμό $z = a + bi$ ως το σημείο του επιπέδου P με συντεταγμένες (a, b) , βλ. Σχήμα 1. Έτσι το $\mathbb{C}$ πολλές φορές ονομάζεται **μιγαδικό επίπεδο**. Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή οι μιγαδικοί της μορφής $x + 0i$, αντιστοιχούν σε σημεία του άξονα των x που λέγεται **πραγματικός άξονας**, ενώ όλοι οι φανταστικοί αριθμοί, δηλαδή οι μιγαδικοί της μορφής $0 + yi$, αντιστοιχούν σε σημεία του άξονα των y που λέγεται **φανταστικός άξονας**.



Σχήμα 1: Το μιγαδικό επίπεδο.

Έστω r η απόσταση του σημείου P από την αρχή των αξόνων. Από το πυθαγόρειο θεώρημα άμεσα συμπεραίνουμε ότι

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Άρα το μέτρο $|z|$ του μιγαδικού αριθμού z δεν είναι τίποτα άλλο παρά η απόστασή του από την αρχή των αξόνων.

Ας θεωρήσουμε έναν μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$. Τότε μπορούμε πάντα να εκφράσουμε τον z στη λεγόμενη **πολική μορφή**

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1)$$

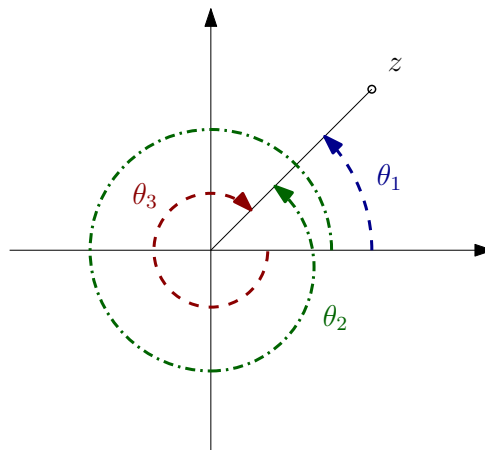
Παρατηρούμε ότι

$$z = |z| \cos \theta + i |z| \sin \theta = a + ib,$$

άρα αρκεί το θ να είναι ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε να ικανοποιεί

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}.$$

Κάθε πραγματικός αριθμός θ που ικανοποιεί την (1) λέγεται **όρισμα** (ή πολική γωνία) του z . Γεωμετρικά, το θ είναι η γωνία (σε ακτίνια) που σχηματίζει ο ημιάξονας Ox με την ημιευθεία OP στο μιγαδικό επίπεδο. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2 απεικονίζονται τρία διαφορετικά ορίσματα του z . Ακολουθώντας τη συνηθισμένη σύμβαση για τη θετική φορά (αντίθετα των δεικτών του ρολογιού) έχουμε ότι τα ορίσματα θ_1, θ_2 είναι θετικά, ενώ το θ_3 είναι αρνητικό.



Σχήμα 2: Ορίσματα του μιγαδικού αριθμού z .

Θα συμβολίζουμε με $\arg z$ το σύνολο όλων των ορισμάτων του z . Σημειώστε ότι στη μιγαδική ανάλυση έχει επικρατήσει να γράφουμε $\theta = \arg z$ (αντί για $\theta \in \arg z$) για να δηλώσουμε ότι

το θ είναι ένα όρισμα του z . Προφανώς, δύο οποιεσδήποτε τιμές του ορίσματος θα διαφέρουν μεταξύ τους κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π . Άρα αν θ_1, θ_2 είναι δύο όρια του z , τότε

$$\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi,$$

για κάποιο ακέραιο k . Π.χ., $\arg(-1) = \{(2k+1)\pi : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Σε κάποιες περιπτώσεις χρειάζεται να καθορίσουμε κάποια μοναδική τιμή του ορίσματος. Ορίζουμε, λοιπόν, ως **πρωτεύον** όρισμα του z , και συμβολίζουμε με $\text{Arg } z$, το μοναδικό όρισμα θ του z που βρίσκεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Για παράδειγμα, αν z είναι ένας αρνητικός πραγματικός αριθμός, τότε $\text{Arg } z = \pi$, και

$$\text{Arg } i = \pi/2, \quad \text{Arg } 2 = 0, \quad \text{Arg } (1 - i) = -\pi/4.$$

Παρατήρηση 3.1. Προσοχή! Ο συμβολισμός που ακολουθούμε μας επιτρέπει να γράψουμε ότι $\arg(-1) = -\pi$, μιας και το $-\pi$ είναι σίγουρα ένα όρισμα του -1 , αλλά **δεν** μας επιτρέπει να γράψουμε ότι $\text{Arg}(-1) = -\pi$, αφού το $-\pi$ δεν είναι όρισμα του -1 στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Παράδειγμα 4. Γράψτε τους αριθμούς: (α) $z = -1 + i$ και (β) $w = \sqrt{3} + i$ σε πολική μορφή. Λύση: (α) Έχουμε ότι

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα το z ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο, και επομένως μπορούμε να πάρουμε $\theta = 3\pi/4$.

Άρα η πολική μορφή του z είναι

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

(β) Τώρα έχουμε $|w| = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sin \theta = \frac{1}{2}$. Άρα το w ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο, και μπορούμε να πάρουμε $\theta = \pi/6$. Άρα

$$w = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

□

4 Εκθετική μορφή

Αν $t \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \quad (2)$$

Η (2) είναι γνωστή ως **τύπος του Euler**.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler η πολική μορφή (1) ενός μιγαδικού αριθμού z μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη εκθετική μορφή

$$z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \text{ όπου } r = |z| \text{ και } \theta = \arg z. \quad (3)$$

Παρατηρήστε ότι επειδή $\theta = \arg z$, υπάρχουν άπειρες δυνατότητες αναπαράστασης ενός μιγαδικού σε εκθετική μορφή. Όπως ήδη είπαμε, δύο οποιεσδήποτε τιμές του ορίσματος διαφέρουν μεταξύ τους κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π επομένως μπορούμε να γράψουμε την εκθετική μορφή και ως

$$z = re^{i(\theta+2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε την εξίσωση $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ως μια παραμετρική αναπαράσταση ενός κύκλου με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα r , επομένως και η $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, είναι μια άλλη αναπαράσταση κύκλου με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα r .

Μέσω της εκθετικής μορφής και με χρήση απλών ιδιοτήτων των εκθετικών¹ μπορούμε να εξάγουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες για τους μιγαδικούς αριθμούς και τα ορίσματά τους.

Έστω $z = re^{i\theta}$ ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός. Για να βρούμε τον αντίστροφο του μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

$$z^{-1} = (re^{i\theta})^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)},$$

και άρα η πολική μορφή του αντιστρόφου του z είναι

$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta).$$

Επιπλέον, αν $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ και $z_2 = r_2e^{i\theta_2} \neq 0$, όπου θ_1 είναι οποιαδήποτε τιμή του $\arg z_1$ και θ_2 είναι οποιαδήποτε τιμή του $\arg z_2$, τότε

$$z_1 z_2 = (r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

και

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

¹Εδώ αναφερόμαστε σε εκθετικά με εκθέτη φανταστικό. Θα δεχτούμε προς στιγμήν ότι οι γνωστές μας ιδιότητες από τους πραγματικούς αριθμούς εξακολουθούν να ισχύουν, και θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό στην Παράγραφο 7.

Οι αντίστοιχοι τύποι σε πολική μορφή είναι

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \right], \quad (4)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \right]. \quad (5)$$

Άρα, γεωμετρικά, το γινόμενο των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 , είναι ένας μιγαδικός που έχει ως μέτρο το γινόμενο των μέτρων $|z_1||z_2|$ και ως ένα όρισμα το άθροισμα των ορισμάτων $\theta_1 + \theta_2$. Ανάλογα το πηλίκο των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 , είναι ένας μιγαδικός που έχει ως μέτρο το πηλίκο $|z_1|/|z_2|$ και ως ένα όρισμα τη διαφορά των ορισμάτων $\theta_1 - \theta_2$.

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν και οι αντίστοιχες για τα ορίσματα

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad (6)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2. \quad (7)$$

Το νόημα των (6)-(7) είναι το ακόλουθο: Αν γνωρίζουμε τις τιμές των δύο από τα τρία αυτά ορίσματα, τότε υπάρχει μια τιμή του τρίτου ορίσματος που επαληθεύει τις εξισώσεις αυτές. Προσοχή! Οι (6)-(7) δεν ισχύουν εν γένει αν αντικαταστήσετε τα ορίσματα με τις πρωτεύουσες τιμές τους.

Παράδειγμα 5. Έστω $z_1 = i$ και $z_2 = -1$. Τότε $z_1 z_2 = -i$, και τα αντίστοιχα πρωτεύοντα ορίσματα είναι:

$$\operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arg}(-1) = \pi, \quad \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Όμως

$$\operatorname{Arg}(i) + \operatorname{Arg}(-1) = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} = \operatorname{Arg}(-i).$$

Φυσικά, αν θεωρήσουμε ως

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(-1) = \pi,$$

τότε έχουμε ότι

$$\arg(i) + \arg(-1) = \frac{3\pi}{2}$$

και το $3\pi/2$ είναι ένα όρισμα του $-i$, απλώς δεν είναι το πρωτεύον όρισμα. □

Παράδειγμα 6. Έστω $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ και $z_2 = \sqrt{3} - i$.

Σε πολική μορφή

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Άρα

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2^2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3} + 2i. \end{aligned}$$

□

5 Δυνάμεις και ρίζες μιγαδικών αριθμών

Ένα σχεδόν άμεσο αποτέλεσμα των (4), (5), (αποδεικνύεται με μια απλή επαγωγική διαδικασία) είναι η σχέση

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \quad (8)$$

που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό θ και κάθε ακέραιο n . Η (8) λέγεται τύπος του de Moivre² και μας βοηθάει να υπολογίζουμε τις n -οστές δυνάμεις μιγαδικών αριθμών.

Πρόταση 5.1. Αν $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ και n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Παράδειγμα 7. Βρείτε τον αριθμό $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{10}$.

Λύση: Προφανώς $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(-1 + i)$, άρα από το Παράδειγμα 4(α), βλέπουμε ότι η πολική μορφή του είναι

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Από την Πρόταση 5.1 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{10} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{10} \left(\cos \frac{30\pi}{4} + i \sin \frac{30\pi}{4} \right) \\ &= \frac{2^5}{2^{10}} \left(\cos \frac{15\pi}{2} + i \sin \frac{15\pi}{2} \right) = -\frac{1}{32} i. \end{aligned}$$

□

Ο τύπος του de Moivre μας βοηθάει να υπολογίσουμε και τις n -οστές ρίζες μιγαδικών αριθμών. Συγκεκριμένα, μια n -οστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού z είναι ένας μιγαδικός αριθμός w τέτοιος ώστε $w^n = z$.

²Abraham de Moivre (1667-1754)

Θεώρημα 5.1. Έστω z ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός και n είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε ο z έχει ακριβώς n διακριτές n -οστές ρίζες που δίνονται από τον τύπο

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad (9)$$

όπου $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Απόδειξη. Γράφουμε τον z σε πολική μορφή με $\theta = \operatorname{Arg} z$. Δηλαδή $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Αναζητούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς $w = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ για τους οποίους ισχύει $w^n = z$. Από τον τύπο του de Moivre, (8), έχουμε ότι $w^n = |w|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$. Άρα η $w^n = z$ γράφεται, ισοδύναμα, ως

$$\begin{aligned} |w|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) &= |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \\ \Leftrightarrow |w|^n &= |z|, \quad \cos(n\varphi) = \cos \theta, \quad \sin(n\varphi) = \sin \theta \\ \Leftrightarrow |w| &= \sqrt[n]{|z|} \quad \text{και} \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \Leftrightarrow |w| &= \sqrt[n]{|z|} \quad \text{και} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Η επιλογή $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ μας οδηγεί στο να πάρουμε n διακριτές n -οστές ρίζες. Οποιαδήποτε άλλη τιμή του k θα μας ξαναδώσει κάποια από τις προηγούμενες ρίζες. $\square$

Η γεωμετρική σημασία του Θεωρήματος 5.1 είναι ότι οι n -οστές ρίζες του z βρίσκονται όλες πάνω σε έναν κύκλο ακτίνας $\sqrt[n]{|z|}$ με κέντρο την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου, και ισαπέχουν μεταξύ τους.

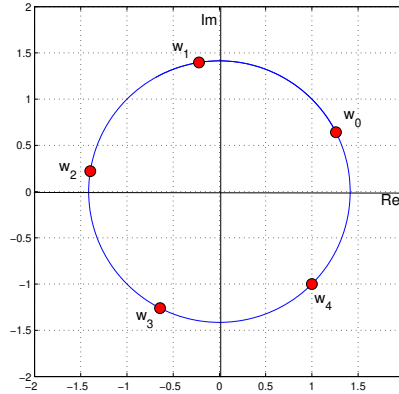
Παράδειγμα 8. Βρείτε τις πέντε 5-ες ρίζες του μιγαδικού $z = -4 + 4i$ και σχεδιάστε τις στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύση: Η πολική μορφή του z είναι

$$z = \sqrt{32} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2^{5/2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο (9) με $n = 5$ και έχουμε

$$w_k = 2^{5/10} \left(\cos \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{5} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{5} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{8k\pi + 3\pi}{20} + i \sin \frac{8k\pi + 3\pi}{20} \right).$$



Σχήμα 3: Οι πέντε 5-ες ρίζες του $z = -4 + 4i$.

Για να υπολογίσουμε τις πέντε ρίζες παίρνουμε $k = 0, 1, 2, 3, 4$, και έχουμε

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{20} + i \sin \frac{3\pi}{20} \right), \\ w_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{20} + i \sin \frac{11\pi}{20} \right), \\ w_2 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{20} + i \sin \frac{19\pi}{20} \right), \\ w_3 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{27\pi}{20} + i \sin \frac{27\pi}{20} \right), \\ w_4 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{35\pi}{20} + i \sin \frac{35\pi}{20} \right). \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 3 οι ρίζες αυτές απεικονίζονται με τα κόκκινα σημεία. Όπως είναι αναμενόμενο ανήκουν όλες στον κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{2}$. □

Παρατήρηση 5.1. Η n -οστή ρίζα του z που παίρνουμε για $k = 0$ ονομάζεται **πρωτεύουσα n -οστή ρίζα του z** . Το σύμβολο $\sqrt[n]{z}$ χρησιμοποιείται ακριβώς για να παραστήσει αυτήν τη συγκεκριμένη n -οστή ρίζα του z . Άρα όταν γράφουμε $\sqrt[n]{z}$, εννοούμε την πρωτεύουσα n -οστή ρίζα του z , δηλαδή

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\text{Arg } z}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\text{Arg } z}{n}\right) \right]. \quad (10)$$

Επιπλέον, αν και ο παραπάνω τύπος δεν καλύπτει την περίπτωση $z = 0$, αφού δεν ορίζεται το $\text{Arg } 0$, είναι προφανές ότι η n -οστή ρίζα του 0 είναι το μηδέν. Για το λόγο αυτό στον παραπάνω ορισμό συμπεριλαμβάνουμε ότι $\sqrt[n]{0} = 0$.

6 Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 9. Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα: $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Λύση: Ξεκινάμε με τον υπολογισμό του $|z + w|^2$.

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + w\bar{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.\end{aligned}$$

Άρα δείξαμε ότι για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \quad (11)$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2,\end{aligned}$$

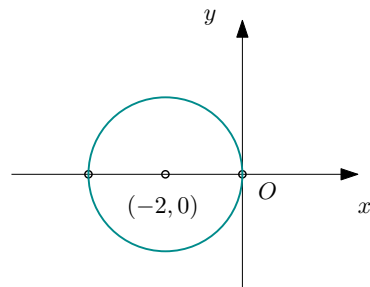
και το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες και στα δύο μέλη. □

Παράδειγμα 10. Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο D των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τη συνθήκη $|z - 2| = 2|z + 1|$.

Λύση: Έστω $z = x + yi$. Τότε

$$\begin{aligned}z \in D &\Leftrightarrow |z - 2| = 2|z + 1| \Leftrightarrow |z - 2|^2 = 4|z + 1|^2 \\ &\stackrel{(11)}{\Leftrightarrow} |z|^2 - 2\operatorname{Re}(2z) + 4 = 4|z|^2 + 8\operatorname{Re}(z) + 4 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - 4\operatorname{Re}(z) = 4|z|^2 + 8\operatorname{Re}(z) \\ &\Leftrightarrow 3|z|^2 + 12\operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + 4\operatorname{Re}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2) + 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 4.\end{aligned}$$

Άρα το σύνολο D είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $(-2, 0)$ στον πραγματικό άξονα και ακτίνα 2. □



Παράδειγμα 11. Βρείτε μια «μιγαδική» εξίσωση για την υπερβολή με «πραγματική» εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$.

Λύση: Θεωρούμε ότι $z = x + yi$ και κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Τότε

$$x^2 - y^2 = \frac{(z + \bar{z})^2}{4} + \frac{(z - \bar{z})^2}{4} = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2}.$$

Άρα $x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = 2$. □

Παράδειγμα 12. Λύστε τη δευτεροβάθμια εξίσωση: $2z^2 - (2 + 5i)z - 2 + i = 0$.

Λύση: Καταρχήν θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ο τύπος για τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση που η εξίσωση έχει μιγαδικούς συντελεστές, βλ. Άσκηση 6. Άρα οι ρίζες της συγκεκριμένης εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$z = \frac{2 + 5i \pm \sqrt{(2 + 5i)^2 - 4 \cdot 2(-2 + i)}}{4} = \frac{2 + 5i \pm \sqrt{-5 + 12i}}{4}.$$

Άρα το μόνο δύσκολο σημείο είναι ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας $\sqrt{-5 + 12i}$. Ας θέσουμε $\theta = \text{Arg}(-5 + 12i)$. Τότε, προφανώς $|-5 + 12i| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$, άρα

$$\theta \in (\pi/2, \pi), \quad \cos \theta = -\frac{5}{13}, \quad \sin \theta = \frac{12}{13}.$$

Τώρα με βάση το Θεώρημα 5.1 και τον ορισμό της πρωτεύουσας τετραγωνικής ρίζας (10), έχουμε ότι

$$\sqrt{-5 + 12i} = \sqrt{13} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right].$$

Παρατηρήστε ότι αφού το $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ συνεπάγεται ότι $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$. Άρα $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ και $\sin \frac{\theta}{2} > 0$, οπότε από τον βασικό τύπο της τριγωνομετρίας για τη διπλάσια γωνία $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \\ \sin \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{13}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}. \end{aligned}$$

Άρα $\sqrt{-5 + 12i} = \sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} + i \frac{3}{\sqrt{13}} \right) = 2 + 3i$. Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$z = \frac{2 + 5i \pm \sqrt{-5 + 12i}}{4} = \frac{2 + 5i \pm (2 + 3i)}{4},$$

δηλαδή $z = 1 + 2i$ ή $z = \frac{i}{2}$. □

7 Εκθετικά και λογάριθμοι μιγαδικών αριθμών

7.1 Εκθετικά μιγαδικών αριθμών

Όπως είδαμε νωρίτερα στην Παράγραφο 4, ο τύπος του Euler $e^{it} = \cos t + i \sin t$, για $t \in \mathbb{R}$, μας επιτρέπει να ορίσουμε το εκθετικό ενός φανταστικού αριθμού. Δεδομένου ότι στους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα $e^{s+t} = e^s e^t$, είναι απολύτως φυσιολογικό να ορίσουμε για έναν μιγαδικό $z = x + iy$, το e^z ως

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (12)$$

Με βάση τον ορισμό (12) μπορούμε, π.χ., να υπολογίσουμε ότι

$$e^0 = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^i = \cos 1 + i \sin 1, \quad e^{1+\pi i} = -e.$$

Επίσης, από την (12), συμπεραίνουμε άμεσα ότι $e^z \neq 0$ για κάθε μιγαδικό $z = x + iy$, καθώς και ότι

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} = e^x, \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im}(z) = y.$$

Επιπλέον, από τον τύπο του de Moivre έχουμε ότι $(e^z)^n = e^{nz}$ για κάθε ακέραιο n , και δεν είναι δύσκολο κανείς να βεβαιωθεί ότι

$$e^z e^w = e^{z+w}.$$

Στη συνέχεια ας δούμε το εξής ερώτημα: Για ποιές τιμές του z ισχύει ότι $e^z = 1$; Προφανώς, ισχύει για $z = 0$, αλλά, όπως θα δούμε αμέσως, ισχύει και για πολλούς άλλους αριθμούς. Για να έχουμε $e^z = 1$ θα πρέπει φυσικά και $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$. Άρα $e^z = 1$ μπορεί να ισχύει μόνο για καθαρά φανταστικούς αριθμούς της μορφής $z = iy$, ($y \in \mathbb{R}$). Όμως $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, επομένως

$$e^{iy} = 1 \Leftrightarrow \cos y = 1 \text{ και } \sin y = 0 \Leftrightarrow y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Συνεπώς $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Επιπλέον,

$$e^z = e^w \Leftrightarrow e^{z-w} = 1 \Leftrightarrow z = w + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

7.2 Λογάριθμοι μιγαδικών αριθμών

Από το Λύκειο γνωρίζουμε ότι στους πραγματικούς αριθμούς ισχύει ότι $s = \ln t$, για $t > 0$, αν και μόνον αν $e^s = t$. (Με $\ln$ συμβολίζουμε το λογάριθμο με βάση e .) Θα μιμηθούμε την

ιδέα αυτή για να ορίσουμε τον λογάριθμο ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού. Η ανάλογη απαίτηση είναι ότι w θα είναι ο λογάριθμος ενός $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, αν $e^w = z$. Η ουσιαστική διαφορά όμως είναι ότι, αν και στην περίπτωση των πραγματικών για δοσμένο $t > 0$ υπάρχει μοναδικό $s \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $e^s = t$, στην περίπτωση των μιγαδικών η αντίστοιχη σχέση $e^w = z$ ικανοποιείται για άπειρες μιγαδικές τιμές του w .

Π.χ., στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι η $e^w = 1$ ικανοποιείται για άπειρα $w = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Άρα καθεμία από αυτές τις τιμές του w είναι ένας μιγαδικός λογάριθμος του 1! Όπως κάναμε και στην περίπτωση του ορίσματος θα ξεχωρίσουμε μια από τις άπειρες τιμές του λογάριθμου ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού και αυτή θα είναι η

$$w = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Από τις ιδιότητες που έχουμε δει μέχρι στιγμής ισχύει ότι

$$e^w = e^{\ln |z| + i \operatorname{Arg} z} = e^{\ln |z|} e^{i \operatorname{Arg} z} = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = z.$$

Άρα το συγκεκριμένο w είναι ένας λογάριθμος του z , που ονομάζεται **πρωτεύον λογάριθμος** του z (ή **πρωτεύουσα τιμή του λογαρίθμου** του z) και συμβολίζεται με $\operatorname{Log} z$. Θα συμβολίζουμε με $\log z$ το σύνολο όλων των λογαρίθμων του z . (Θυμηθείτε την ανάλογη κατάσταση με το όρισμα $\arg z$.)

Επομένως, ορίζουμε ως **πρωτεύοντα λογάριθμο** του z τον

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z. \quad (14)$$

Ο ορισμός (14) μας εξασφαλίζει ότι $\operatorname{Log} x = \ln x$ για $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Π.χ., με τη βοήθεια της (14) είναι άμεσο να υπολογίσουμε ότι

$$\operatorname{Log}(-1) = \pi i, \quad \operatorname{Log}(ei) = 1 + \frac{\pi}{2}i, \quad \operatorname{Log}(1-i) = \ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i.$$

Βεβαίως, αν w είναι οποιοσδήποτε λογάριθμος του z που ικανοποιεί $e^w = z = e^{\operatorname{Log} z}$, τότε, από την (13), προκύπτει ότι

$$w = \operatorname{Log} z + 2k\pi i = \operatorname{Log} |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Άρα κάθε μιγαδικός αριθμός αυτής της μορφής είναι ένας λογάριθμος του z .

Αν w_1 είναι ένας λογάριθμος του z_1 , και w_2 είναι ένας λογάριθμος του z_2 , τότε

$$e^{w_1+w_2} = e^{w_1} e^{w_2} = z_1 z_2,$$

επομένως ο $w_1 + w_2$ είναι ένας λογάριθμος του $z_1 z_2$. Άρα μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2),$$

υπό την ακόλουθη έννοια: Το σύνολο των λογαρίθμων του $z_1 z_2$ αποτελείται απ' όλα τα αθροίσματα των λογαρίθμων του z_1 με τους λογάριθμους του z_2 .

Προσοχή! Δεν ισχύει εν γένει ότι $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)$.

Π.χ., $\text{Log}(-i) = -\frac{\pi}{2}i$ αλλά $\text{Log}(-1) + \text{Log}(i) = \pi i + \frac{\pi}{2}i = \frac{3\pi}{2}i$. Βεβαίως ο $\text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)$ είναι ένας λογάριθμος του $z_1 z_2$ απλώς δεν είναι ο πρωτεύον λογάριθμος.

7.3 Ύψωση μιγαδικών αριθμών σε μιγαδικούς εκθέτες

Έχουμε ήδη δει ότι ένας καθιερωμένος τρόπος για να ορίσουμε τον t^a , όταν t είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός και a πραγματικός, είναι μέσω του τύπου

$$t^a = e^{a \ln t}.$$

Θέλουμε να εφαρμόσουμε τον ανάλογο τύπο στη μιγαδική περίπτωση ώστε να ορίσουμε την ύψωση ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού z σε έναν **μιγαδικό** εκθέτη λ . Το προφανές εμπόδιο είναι ότι ο z έχει πολλούς διαφορετικούς λογαρίθμους. Ποιόν απ' όλους θα χρησιμοποιήσουμε; Η απάντηση είναι ότι θα τους χρησιμοποιήσουμε όλους.

Όπως έχουμε μέχρι τώρα αποδεχθεί το γεγονός ότι ο z έχει ένα άπειρο πλήθος λογαρίθμων, θα πρέπει να είμαστε έτοιμοι να συμβιβαστούμε και με το γεγονός ότι θα υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί – όχι πάντα άπειροι – τρόποι για να υψώσουμε τον z στην λ .

Ακριβέστερα, για κάθε λογάριθμο w του z ο μιγαδικός αριθμός $e^{\lambda w}$ λέγεται **λ -δύναμη** του z που αντιστοιχεί στον w . Η επιλογή $w = \text{Log } z$ ορίζει τη λεγόμενη **πρωτεύουσα λ -δύναμη** του z . Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό z^λ για αυτή τη συγκεκριμένη επιλογή. Δηλαδή, **η πρωτεύουσα λ -δύναμη του z είναι**

$$z^\lambda = e^{\lambda \text{Log } z}.$$

Παράδειγμα.

$$\begin{aligned} i^{2\pi} &= e^{2\pi \text{Log } i} = e^{2\pi \cdot \frac{\pi}{2} i} = e^{\pi^2 i} = \cos(\pi^2) + i \sin(\pi^2), \\ i^{2\pi i} &= e^{2\pi i \text{Log } i} = e^{-\pi^2}. \end{aligned}$$

□

Επειδή ένας οποιοσδήποτε λογάριθμος του z είναι της μορφής

$$\operatorname{Log} z + 2k\pi i, \quad \text{για κατάλληλο } k \in \mathbb{Z},$$

προκύπτει άμεσα ότι η γενική λ -δύναμη του z θα είναι της μορφής

$$e^{2k\pi\lambda i} z^\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Υπάρχουν δύο ειδικές περιπτώσεις που αξίζουν την προσοχή μας. α) Αν ο λ είναι ακέραιος, έστω $\lambda = n \in \mathbb{Z}$, τότε για οποιοδήποτε ακέραιο k βλέπουμε εύκολα ότι $e^{2k\pi\lambda i} = 1$, άρα σε αυτή την περίπτωση η γενική λ -δύναμη του z είναι απλώς η συνήθης z^n .

β) Αν $\lambda = 1/n$, για κάποιο θετικό ακέραιο n , τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{2k\pi\lambda i} z^\lambda &= \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) \exp\left(\frac{\operatorname{Log} z}{n}\right) \\ &= \exp\left(\frac{2k\pi i}{n} + \frac{\operatorname{Log} |z| + i \operatorname{Arg} z}{n}\right) \\ &= \exp\left[\frac{\operatorname{Log} |z|}{n} + i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= \exp\left(\operatorname{Log} \sqrt[n]{|z|}\right) \exp\left[i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι το σύνολο των λ -δυνάμεων του z , για $\lambda = 1/n$, συμπίπτει με το σύνολο των n -οστών ριζών του z του Θεωρήματος 5.1. Ειδικότερα, $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$.

Σημειώστε ότι αν και ισχύει ότι $z^{\lambda+\mu} = z^\lambda z^\mu$, άλλες ιδιότητες των δυνάμεων δεν ισχύουν πάντα για πρωτεύουσες δυνάμεις. Για παράδειγμα, το $(zw)^\lambda$ δεν είναι εν γένει ίσο με το $z^\lambda w^\lambda$.

Π.χ.,

$$(-i)^{1/2} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{ενώ} \quad (-1)^{1/2} i^{1/2} = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}.$$

Ανάλογα, το $(z^\lambda)^\mu$ μπορεί να είναι διαφορετικό από το $z^{\lambda\mu}$. Άρα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί με αλγεβρικές πράξεις στις οποίες εμφανίζονται μιγαδικοί εκθέτες.

Ασκήσεις

1. Έστω $z = 3 + 4i$.

(α') Βρείτε τους $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$, και $|z|$.

(β') Σχεδιάστε τους z , $\bar{z}$, $-z$, και $-\bar{z}$ στο μιγαδικό επίπεδο.

(γ') Συμπληρώστε τα ακόλουθα κενά χρησιμοποιώντας ένα από τα z , $\bar{z}$, $-z$, και $-\bar{z}$.

- i. Το συμμετρικό του z ως προς τον πραγματικό άξονα είναι
- ii. Το συμμετρικό του z ως προς το φανταστικό άξονα είναι
- iii. Το συμμετρικό του z ως προς την αρχή των αξόνων είναι

2. Έστω $z = 4 - 2i$ και $w = 3 + 5i$. Υπολογίστε τους μιγαδικούς:

$$z + w, \quad z - \bar{w}, \quad z\bar{z}, \quad z\bar{z} - |z|, \quad zw, \quad \overline{zw}, \quad 1/z, \quad z/w, \quad \overline{5i\bar{z} + (1+i)w}.$$

3. Για ποιές τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει $(1 + 2i)a + (3 - i)b = 2 - 5i$;

4. Αποδείξτε το λεγόμενο «κανόνα του παραλληλογράμμου» για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w :

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

5. Αποδείξτε ότι $|z + w| \geq ||z| - |w||$.

6. Αποδείξτε ότι οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $az^2 + bz + c = 0$, όπου a, b, c είναι **μιγαδικοί**, με $a \neq 0$, δίνονται από τον συνήθη τύπο:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(Υπόδειξη: Κάντε συμπλήρωση τετραγώνου.)

Στη συνέχεια, λύστε την εξίσωση: $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$.

7. Γράψτε τους μιγαδικούς αριθμούς $e^{\frac{\pi}{3}i}$, $4e^{-\frac{5\pi}{6}i}$ στη μορφή $a + bi$.

8. Γράψτε τους αριθμούς: (α) $z_1 = 1 + i$, (β) $z_2 = 3 - \sqrt{3}i$, (γ) $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$,
(δ) $4 - 4i$, σε πολική μορφή.

9. Απλοποιήστε την παράσταση $\frac{\cos 2\theta + i \sin 2\theta}{\cos 3\theta + i \sin 3\theta}$.

10. Έστω $z = 2 - 2i$ και $w = -1 - 3i$. Απεικονίστε τα z, w στο μιγαδικό επίπεδο. Στη συνέχεια απεικονίστε το μιγαδικό αριθμό $z - \bar{w}$.

11. Γραμμοσκιάστε την περιοχή του μιγαδικού επιπέδου που αποτελείται από μιγαδικούς αριθμούς με πραγματικό μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1.

12. Περιγράψτε γεωμετρικά τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{C}$ και κάντε ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμα.

$$(\alpha') \{z : |z - 1| = |z - i|\}$$

$$(\beta') \{z : |z - 1| = 2|z - i|\}$$

$$(\gamma') \{z : (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 1\}$$

$$(\delta') \{z : z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 3 = 0\}$$

$$(\epsilon') \{z : |z - 2i| < 1\}$$

$$(\sigma\tau') \{z : |z - 2i| < 1\} \text{ και } 0 < \text{Arg}(z - 2i) \leq \frac{3\pi}{4}.$$

13. Αποδείξτε ότι $(\alpha) e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$, $(\beta) e^{\pi i} + 1 = 0$.

14. Βρείτε τις επτά 7-ες ρίζες του μιγαδικού $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$.

15. Έστω w μιγαδικός αριθμός με $|w| < 1$. Αποδείξτε ότι $|z + w| \leq |1 + \bar{w}z|$ αν και μόνον αν $|z| \leq 1$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν $|z| = 1$.

Σημείωση: Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.

Βιβλιογραφία

- Bruce P. Palka, An introduction to complex function theory, New York: Springer-Verlag, 1991.
- R. Churchill, J. Brown, Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1993.