

Ακολουθίες και Σειρές

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών
Σχολή Μηχανικών



Νοέμβριος 2019

1 Ακολουθίες

Μια ακολουθία είναι μια άπειρη επιλογή αριθμών $a_1, a_2, a_3, \dots$, με μια ορισμένη σειρά: πρώτος, δεύτερος, τρίτος, $\dots$. Ο αριθμός a_1 καλείται πρώτος όρος, ο a_2 δεύτερος όρος, και γενικά ο a_n είναι ο n -οστός όρος. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με άπειρες ακολουθίες, έτσι κάθε όρος a_n θα έχει έναν επόμενο που θα είναι ο a_{n+1} .

Παρατηρήστε ότι με τον τρόπο αυτό σε κάθε θετικό ακέραιο αντιστοιχεί ένας αριθμός, επομένως μια ακολουθία είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακεραίων. Παρόλα αυτά συμβολίζουμε με a_n , αντί του γνωστού $f(n)$, την τιμή της συνάρτησης στον αριθμό n .

Συμβολισμός: Η ακολουθία $a_1, a_2, a_3, \dots$ συμβολίζεται επίσης με (a_n) .

Παράδειγμα 1. α) Κάποιες ακολουθίες ορίζονται δίνοντας τον τύπο για τον n -οστό όρο.

(i) Η ακολουθία (a_n) με τύπο $a_n = \frac{1}{n}$, δηλαδή η $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

(ii) Η ακολουθία (a_n) με τύπο $a_n = n$, δηλαδή η $1, 2, 3, 4, \dots$

(iii) Η ακολουθία (a_n) με τύπο $a_n = 1$, δηλαδή η $1, 1, 1, 1, \dots$

(iv) Η ακολουθία (a_n) με τύπο $a_n = (-1)^{n+1}$, δηλαδή η $1, -1, 1, -1, \dots$

(v) Η ακολουθία (a_n) με τύπο $a_n = \frac{n}{n+1}$, δηλαδή η $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

β) Βεβαίως, υπάρχουν ακολουθίες που οι όροι τους δεν καθορίζονται από κάποιον απλό τύπο. Π.χ., η ακολουθία (a_n) της οποίας ο n -οστός όρος είναι το n -οστό δεκαδικό ψηφίο του αριθμού π . Μερικοί αρχικοί όροι της ακολουθίας αυτής είναι:

$$1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, \dots$$

γ) Επίσης, κάποιες ακολουθίες ορίζονται *αναδρομικά*. Στην περίπτωση αυτή δίνεται ένας αρχικός όρος (ή κάποιοι αρχικοί όροι) της ακολουθίας και ένας κανόνας, που ονομάζεται *αναδρομικός τύπος*, και μας επιτρέπει να υπολογίζουμε επόμενους όρους από τους προηγούμενους. Π.χ., η ακολουθία Fibonacci ορίζεται μέσω των σχέσεων:

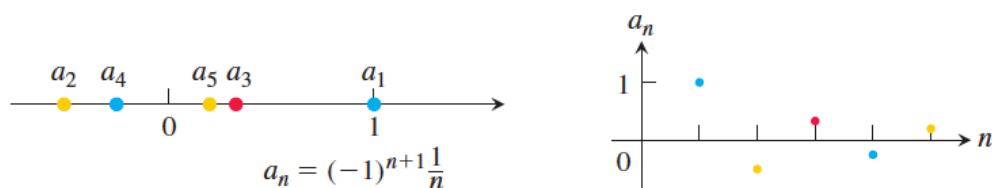
$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \quad n \geq 3.$$

Δηλαδή κάθε όρος της, από τον τρίτο και μετά, ισούται με το άθροισμα των δύο προηγούμενων όρων. Μερικοί αρχικοί όροι της ακολουθίας αυτής είναι:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Παρατήρηση. Όπως ήδη είπαμε, μία ακολουθία είναι διαδοχική επιλογή αριθμών, δεν είναι το σύνολο με στοιχεία αυτούς τους αριθμούς. Π.χ., η ακολουθία (iii) στο Παράδειγμα 1 είναι η άπειρη διαδοχική επιλογή $1, 1, 1, \dots$, ενώ το σύνολο με στοιχεία τους όρους της ακολουθίας είναι το μονοσύνολο $\{1\}$. Επιπλέον, όταν λέμε ότι κάθε όρος μίας ακολουθίας ακολουθεί τον προηγούμενό του, εννοούμε σε σειρά επιλογής και όχι σε μέγεθος.

Μια ακολουθία (a_n) μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά είτε τοποθετώντας σημεία στον άξονα των πραγματικών αριθμών ή με σημεία (n, a_n) στο επίπεδο, όπου στον οριζόντιο άξονα τοποθετούμε τον δείκτη n και στον κατακόρυφο τον αντίστοιχο όρο a_n . Π.χ., στο Σχήμα 1 παριστάνουμε με τους δύο αυτούς τρόπους την ακολουθία $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.



Σχήμα 1: Γραφική αναπαράσταση της ακολουθίας $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. (Από THOMAS Απειροστικός Λογισμός, ΠΕΚ, 2018.)

Ορισμός 1.1. Μια ακολουθία (a_n) λέγεται *φθίνουσα* αν κάθε όρος είναι μικρότερος ή ίσος από τον προηγούμενό του, δηλαδή

$$a_{n+1} \leq a_n \text{ για κάθε } n.$$

Η (a_n) λέγεται αύξουσα αν κάθε όρος είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον προηγούμενό του, δηλαδή

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ για κάθε } n.$$

Μια ακολουθία λέγεται μονότονη αν είναι είτε αύξουσα ή φθίνουσα.

Αν οι όροι της ακολουθίας δεν μεταβάλλονται, τότε λέγεται σταθερή.

Π.χ., οι ακολουθίες (ii) και (v) στο Παράδειγμα 1 είναι αύξουσες, η (i) είναι φθίνουσα, η (iii) είναι σταθερή, και η (iv) δεν είναι μονότονη.

Για να ελέγξουμε τη μονοτονία μιας ακολουθίας εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς $a_{n+1} - a_n$.

Παράδειγμα 2. Έστω η ακολουθία $a_n = \frac{n^2+2}{n}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)^2 + 2}{n+1} - \frac{n^2 + 2}{n} = \frac{n(n+1)^2 + 2n - (n^2 + 2)(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + n - 2}{n(n+1)} = \frac{n^2 - 1 + n - 1}{n(n+1)} \geq 0, \quad \text{αφού } n \geq 1. \end{aligned}$$

Μερικές φορές, αν έχουμε ακολουθία θετικών όρων είναι βολικότερο να συγκρίνουμε τον λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ με το 1.

Παράδειγμα 3. Έστω η ακολουθία $a_n = \frac{n}{2^n}$. Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n} \leq \frac{n+n}{2n} = 1.$$

Άρα δείξαμε ότι $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ και επειδή a_n είναι θετικοί, έχουμε ότι $a_{n+1} \leq a_n$.

Ορισμός 1.2. Μια ακολουθία (a_n) λέγεται άνω φραγμένη αν υπάρχει κάποιο u ώστε να ισχύει $a_n \leq u$ για κάθε n .

Λέγεται κάτω φραγμένη αν υπάρχει κάποιο l ώστε να ισχύει $l \leq a_n$ για κάθε n .

Αν η (a_n) είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν l, u τέτοια ώστε $l \leq a_n \leq u$ για κάθε n , λέμε ότι είναι φραγμένη.

Παράδειγμα 4. Η ακολουθία (a_n) με $a_n = \frac{1}{n}$ είναι φραγμένη μιας και όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[0, 1]$.

Η ακολουθία (a_n) με $a_n = \frac{n+1}{n}$ είναι φραγμένη μιας και όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[1, 2]$.

Η ακολουθία (a_n) με $a_n = n$ είναι κάτω φραγμένη μιας και ο αριθμός 0 είναι ένα κάτω φράγμα, αλλά δεν είναι άνω φραγμένη.

Η ακολουθία (a_n) με $a_n = (-1)^{n-1}n$, δηλαδή η ακολουθία 1, -2, 3, -4, 5, -6, ..., δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη.

Παρατηρήσεις.

1. Αν μια ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη, τότε όλα τα a_n ανήκουν σε ένα φραγμένο διάστημα $[l, u]$. Τότε όλα τα a_n θα ανήκουν και σε κάποιο διάστημα που είναι συμμετρικό ως προς το 0. Για αυτό αρκεί να βρούμε ένα διάστημα $[-M, M]$ που να είναι αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει το $[l, u]$. Άρα ισχύει ότι:

Αν η (a_n) είναι φραγμένη τότε υπάρχει κάποιο M τέτοιο ώστε $|a_n| \leq M$ για κάθε n .

Το αντίστροφο επίσης ισχύει κατά προφανή τρόπο.

2. Αν το u είναι ένα άνω φράγμα της (a_n) , τότε και κάθε αριθμός $u' > u$ είναι και αυτός άνω φράγμα της (a_n) .

Ανάλογα, αν το l είναι ένα κάτω φράγμα της (a_n) , τότε και κάθε αριθμός $l' < l$ είναι και αυτός κάτω φράγμα της (a_n) .

1.1 Όρια ακολουθιών

«Μη αυστηρός» ορισμός του ορίου: Για μια ακολουθία (a_n) θα γράφουμε

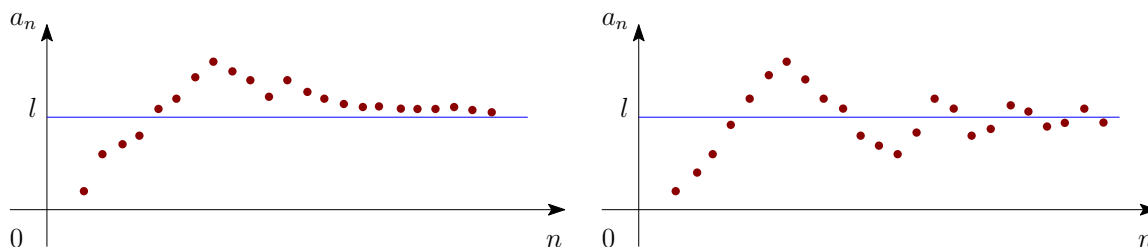
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad (\text{ή, απλώς, } \lim_n a_n = l) \quad (\text{ή } a_n \rightarrow l \text{ καθώς } n \rightarrow +\infty),$$

και θα λέμε

«το όριο της a_n είναι l » ή «η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο l »

αν οι όροι a_n της ακολουθίας πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο l , για όλους τους δείκτες n που είναι αρκετά μεγάλοι ή, ισοδύναμα, αν η απόσταση του a_n από το l γίνεται απεριορίστα μικρή.

Σημειώστε ότι όταν λέμε ότι η απόσταση του a_n από το l γίνεται απεριορίστα μικρή, εννοούμε ότι η παράσταση $|a_n - l|$ γίνεται μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό.



Σχήμα 2: Γραφικές παραστάσεις δύο ακολουθιών με $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

Για παράδειγμα, οι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας $a_n = \frac{1}{n}$ είναι

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \dots, \frac{1}{100}, \dots, \frac{1}{1000}, \dots, \frac{1}{1\,000\,000}, \dots, \frac{1}{10\,000\,000\,000}, \dots,$$

άρα είναι φανερό ότι οι όροι της $(1/n)$ πλησιάζουν προς το 0 και, φυσικά, η απόστασή τους από το 0 γίνεται απεριόριστα μικρή.

Ας θεωρήσουμε και την ακολουθία $a_n = \frac{n+1}{n}$,

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{10}{9}, \frac{11}{10}, \dots, \frac{1001}{1000}, \dots, \frac{1\,000\,000\,001}{1\,000\,000\,000}, \dots$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος είναι μικρότερος από τον προηγούμενό του και η απόσταση των όρων από το 1 γίνεται απεριόριστα μικρή καθώς το n αυξάνει. Πράγματι,

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n},$$

που όπως είδαμε παραπάνω γίνεται απεριόριστα μικρή.

Ας δούμε τώρα και τον αυστηρό ορισμό του ορίου:

Ορισμός 1.3. Η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στον αριθμό l αν για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει ένας $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad n > n_0.$$

Αν μία ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό, τότε λέμε ότι αποκλίνει.

Παράδειγμα 5. Ας αποδείξουμε με τη βοήθεια του Ορισμού 1.3 ότι $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

Έστω δεδομένο $\epsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός n_0 τέτοιος ώστε

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0.$$

Η ανισότητα $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$, θα ισχύει αν $(1/n) < \epsilon \Leftrightarrow n > 1/\epsilon$. Επομένως αν πάρουμε ως n_0 οποιονδήποτε φυσικό μεγαλύτερο από $1/\epsilon$ η ζητούμενη ανισότητα θα ισχύει για κάθε $n > n_0$. Ας θεωρήσουμε $n_0 = [1/\epsilon] + 1$. Τότε για κάθε $n > n_0$ ισχύει ότι $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$, επομένως $\lim(1/n) = 0$.

Παράδειγμα 6. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $a_n = (-1)^{n+1}$ αποκλίνει.

Οι όροι της (a_n) είναι: $1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots$. Διαισθητικά βλέπουμε ότι δεν είναι δυνατόν οι όροι της να πλησιάζουν απείρως κοντά σε κάποιον αριθμό l . Ας το αποδείξουμε και αυστηρά με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιον αριθμό l . Ας επιλέξουμε στον ορισμό του ορίου $\epsilon = 1/2$. Τότε θα υπάρχει ένας φυσικός n_0 ώστε όλοι οι όροι της ακολουθίας με δείκτη $n > n_0$ θα απέχουν από τον l απόσταση μικρότερη από $\epsilon = 1/2$. Παρατηρήστε ότι κάθε δεύτερος όρος της ακολουθίας είναι ίσος με 1, άρα θα πρέπει η απόσταση του 1 από τον l να είναι μικρότερη από $\epsilon = 1/2$. Δηλαδή,

$$|l - 1| < 1/2 \Leftrightarrow 1/2 < l < 3/2.$$

Εντελώς ανάλογα και ο αριθμός -1 εμφανίζεται άπειρες φορές στην ακολουθία με αυθαίρετα μεγάλο δείκτη. Άρα θα πρέπει

$$|l - (-1)| < 1/2 \Leftrightarrow -3/2 < l < -1/2.$$

Έτσι όμως, το l θα πρέπει να ανήκει ταυτόχρονα στο διάστημα $(-3/2, -1/2)$ και στο διάστημα $(1/2, 3/2)$, που είναι αδύνατο. Επομένως δεν υπάρχει τέτοιο όριο l και έτσι η ακολουθία $(-1)^{n+1}$ αποκλίνει.

(Φυσικά, το ίδιο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιονδήποτε αριθμό $0 < \epsilon < 1$ και όχι μόνον για $\epsilon = 1/2$.)

Ορισμός 1.4. Η ακολουθία (a_n) αποκλίνει στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $n > n_0$ ισχύει $a_n > M$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \text{ή} \quad a_n \rightarrow +\infty.$$

Ανάλογα, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $n > n_0$ ισχύει $a_n < -M$, τότε λέμε ότι η ακολουθία (a_n) αποκλίνει στο $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \quad \text{ή} \quad a_n \rightarrow -\infty.$$

Προσοχή! Γράφοντας $a_n \rightarrow +\infty$ δεν εννοούμε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός «άπειρο» προς τον οποίο τείνουν οι όροι της ακολουθίας, ούτε ότι η απόσταση μεταξύ των όρων a_n και του $+\infty$ γίνεται μικρή καθώς το n αυξάνει. Απλώς, χρησιμοποιούμε έναν συμβολισμό που περιγράφει το γεγονός ότι το a_n γίνεται μεγαλύτερο από οποιονδήποτε δεδομένο αριθμό (οσοδήποτε μεγάλο) καθώς το n αυξάνει.

Βεβαίως, μια ακολουθία είναι δυνατόν να αποκλίνει χωρίς να αποκλίνει προς το $+\infty$ ή το $-\infty$. Ανατρέξτε, π.χ., στην ακολουθία του Παραδείγματος 6, ή στην ακολουθία $1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \dots$

1.2 Υπολογισμός ορίων ακολουθιών

Όπως ήδη είπαμε οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών, επομένως είναι αναμενόμενο ότι τα θεωρήματα των ιδιοτήτων των ορίων για συναρτήσεις θα ισχύουν αντίστοιχα και για ακολουθίες.

Θεώρημα 1.1. Έστω (a_n) και (b_n) είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $a_n \rightarrow l$ και $b_n \rightarrow$

m , όπου $l, m \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = l \pm m$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (c a_n) = c \cdot l, \text{ όπου } c \text{ τυχών αριθμός}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = l \cdot m,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}, \text{ αν } b_n \neq 0 \text{ για κάθε } n, \text{ και } m \neq 0.$$

Θεώρημα 1.2 (Θεώρημα «σάντουιτς» για ακολουθίες). Έστω (a_n) , (b_n) και (c_n) είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αν ισχύει $a_n \leq b_n \leq c_n$ για κάθε n από κάποιο δείκτη n_0 και μετά, και αν $a_n \rightarrow l$ και $c_n \rightarrow l$, όπου $l \in \mathbb{R}$, τότε και $b_n \rightarrow l$.

Θεώρημα 1.3 (Θεώρημα συνεχούς συνάρτησης για ακολουθίες). Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \rightarrow l$, όπου $l \in \mathbb{R}$. Αν f είναι μια συνάρτηση που ορίζεται σε όλα τα a_n και είναι συνεχής στο l , τότε $f(a_n) \rightarrow f(l)$ ή, ισοδύναμα,

$$\lim_n f(a_n) = f(\lim_n a_n).$$

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε και αποδείξουμε ένα θεώρημα που συνδέει το όριο μιας ακολουθίας με το όριο μιας κατάλληλης συνάρτησης. Αυτό, π.χ., θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα Γ Hôpital για να υπολογίσουμε τα όρια κάποιων ακολουθιών.

Θεώρημα 1.4. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη για κάθε $x \geq n_0$ και ότι η (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n = f(n)$ για $n \geq N$. Τότε

$$\lim_n a_n = l \text{ οποτεδήποτε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένας αριθμός $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$|f(x) - l| < \epsilon \text{ όταν } x > M.$$

Ας θεωρήσουμε έναν φυσικό n_0 που είναι μεγαλύτερος από τον μεγαλύτερο από τους M και N . Επειδή $a_n = f(n)$, έχουμε ότι για κάθε $n > n_0$, θα ισχύει

$$|a_n - l| = |f(n) - l| < \epsilon,$$

δηλαδή η (a_n) συγκλίνει στον l . □

Πρόταση 1.1. (i) Αν μία ακολουθία συγκλίνει τότε αυτή είναι φραγμένη.

(ii) Αν μία ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$ τότε αυτή είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.

(iii) Αν μία ακολουθία αποκλίνει στο $-\infty$ τότε αυτή είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.

Απόδειξη. (i) Έστω $a_n \rightarrow l$. Αν το n γίνει αρκετά μεγάλο τότε θα ισχύει $|a_n - l| < 1$ και άρα $a_n \in [l - 1, l + 1]$. Έτσι έξω από αυτό το διάστημα βρίσκονται μόνο κάποιοι αρχικοί όροι της ακολουθίας και επομένως η ακολουθία είναι φραγμένη.

(ii) Έστω $a_n \rightarrow +\infty$. Αν το n γίνει αρκετά μεγάλο τότε θα ισχύει $a_n > 1$ και άρα το $a_n \in [1, +\infty)$. Έτσι έξω από αυτό το διάστημα βρίσκονται μόνο κάποιοι αρχικοί όροι της ακολουθίας οπότε η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη. Επίσης, για κάθε u θα ισχύει $a_n > u$ αν το n γίνει αρκετά μεγάλο, οπότε το u δεν είναι άνω φράγμα της (a_n) . Άρα η (a_n) δεν μπορεί να έχει κανένα άνω φράγμα.

(iii) Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη του (ii). □

Παρατήρηση. Τα αντίστροφα των τριών μερών της Πρότασης 1.1 δεν ισχύουν. Π.χ., η ακολουθία $((-1)^{n+1})$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει.

Η ακολουθία $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, \dots$ είναι κάτω φραγμένη (από το μηδέν) και όχι άνω φραγμένη. Όμως η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$.

Ομοίως, η ακολουθία $-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, 0, \dots$ είναι άνω φραγμένη (από το μηδέν), δεν είναι κάτω φραγμένη και δεν αποκλίνει στο $-\infty$.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε (χωρίς απόδειξη) ένα πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 1.5. Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο. Συγκεκριμένα:

- (i) Αν η ακολουθία είναι αύξουσα τότε είτε δεν είναι άνω φραγμένη και αποκλίνει στο $+\infty$ ή είναι άνω φραγμένη και συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.
- (ii) Αν η ακολουθία είναι φθίνουσα τότε είτε δεν είναι κάτω φραγμένη και αποκλίνει στο $-\infty$ ή είναι κάτω φραγμένη και συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.

Το Θεώρημα 1.5 έχει μεγάλη σημασία. Καταρχάς, αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι μια ακολουθία είναι μονότονη και τότε έχει οπωσδήποτε όριο: ή θα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό ή θα αποκλίνει στο $\pm\infty$. Παρατηρήστε ότι για να αποδείξουμε με τον ορισμό του ορίου ότι μία ακολουθία έχει όριο πρέπει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων (ή να μαντέψουμε) το υποψήφιο όριό της ώστε, στη συνέχεια, να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι η απόσταση του n -οστού όρου της από αυτό θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό (αν ο δείκτης γίνει αρκετά μεγάλος). Για παράδειγμα, αν αποδείξουμε ότι μια ακολουθία είναι μονότονη και φραγμένη, τότε το Θεώρημα 1.5 μας εξασφαλίζει ότι θα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό, χωρίς όμως να μας προσφέρει έναν τρόπο υπολογισμού του ορίου. Όμως, αρκετές φορές εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία ότι μία συγκεκριμένη ακολουθία έχει όριο, μπορεί να καταφέρουμε με κάποιον τρόπο (ανάλογα με την περίπτωση) να υπολογίσουμε και την τιμή του ορίου.

1.3 Μερικά όρια που εμφανίζονται συχνά

Οι παρακάτω ακολουθίες έχουν τα εξής όρια:

$$1. \lim_n \frac{\ln n}{n} = 0$$

$$2. \lim_n \sqrt[n]{n} = 1$$

$$3. \lim_n x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$$

$$4. \lim_n x^n = 0 \quad (|x| < 1)$$

$$5. \lim_n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t \quad (t \text{ τυχαίο})$$

$$6. \lim_n \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (x \text{ τυχαίο})$$

(Στους τύπους (3)–(6) τα x, t παραμένουν σταθερά καθώς $n \rightarrow +\infty$.)

Αποδείξεις.

1. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \frac{\ln n}{n}$ και τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Η f ορίζεται για κάθε $x > 0$ και $f(n) = a_n$ για κάθε φυσικό $n \geq 1$. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4, το $\lim_n \frac{\ln n}{n}$ θα ισούται με το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, εφόσον το τελευταίο υπάρχει. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του l' Hôpital και έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

2. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$. Παίρνοντας όριο οδηγούμαστε σε απροσδιοριστία. Ένας τρόπος να υπολογίσουμε το όριο αυτό είναι να θεωρήσουμε τον φυσικό λογάριθμο του a_n :

$$\ln a_n = \ln n^{1/n} = \frac{1}{n} \ln n = \frac{\ln n}{n}.$$

Επομένως, το όριο της καινούργιας μας ακολουθίας $(\ln a_n)$ είναι:

$$\lim_n \ln a_n = \lim_n \frac{\ln n}{n} \stackrel{(1.)}{=} 0.$$

Επειδή $\ln a_n \rightarrow 0$ και η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι συνεχής, έχουμε από το Θεώρημα 1.3 ότι:

$$f(\ln a_n) \rightarrow f(0) \Rightarrow e^{\ln a_n} \rightarrow e^0 = 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 1.$$

3. Η απόδειξη είναι ανάλογη με την προηγούμενη και αφήνεται ως άσκηση.

4. Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < 1$. Θεωρούμε ένα $\epsilon > 0$ και θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε

$$|x^n| < \epsilon \quad \text{για} \quad n > n_0.$$

Από την (2.) έχουμε ότι η ακολουθία $(\epsilon^{1/n})$ συγκλίνει στο 1, ($\epsilon^{1/n} \rightarrow 1$), άρα για κάποιο δείκτη n_0 ο όρος ϵ^{1/n_0} θα βρίσκεται πολύ κοντά στο 1. Σημειώστε ότι και $|x| \in (0, 1)$, άρα θα πρέπει $|x| < \epsilon^{1/n_0}$. Όμως

$$|x| < \epsilon^{1/n_0} \Leftrightarrow |x|^{n_0} < \epsilon.$$

Ο n_0 είναι ο φυσικός που ψάχνουμε διότι αν $|x| < 1$ τότε για κάθε $n > n_0$ έχουμε

$$|x^n| < |x^{n_0}| < \epsilon.$$

(Για την πρώτη ανισότητα στην παραπάνω σχέση σκεφτείτε ότι: $|x| < 1 \Rightarrow |x|^2 < |x| \Rightarrow |x|^3 < |x|^2 < |x|$, κ.ό.κ.)

5. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$, και παίρνοντας φυσικό λογάριθμο κατασκευάζουμε την ακολουθία $(\ln a_n)$ με

$$\ln a_n = \ln \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{t}{n}\right).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{t}{x}\right)$, η οποία παίρνοντας όριο για $x \rightarrow +\infty$ οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) \cdot 0$. Χρησιμοποιούμε κανόνα του Γ' Hôpital και έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{t}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{t}{x}} \cdot \left(-\frac{t}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{1 + \frac{t}{x}} = t$$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4 έχουμε ότι $\ln a_n \rightarrow t$. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.3 και συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_n a_n = \lim_n e^{\ln a_n} = e^t.$$

6. Αρχικά θα την αποδείξουμε για $x > 0$. Έστω λοιπόν $a_n = \frac{x^n}{n!}$, όπου $x \in \mathbb{R}$ με $x > 0$. Καταρχάς, ελέγχουμε αν η (a_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Έχουμε:

$$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{x^n}{n!} \Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{x^n} \leq \frac{(n+1)!}{n!} \Leftrightarrow x \leq n+1 \Leftrightarrow x-1 \leq n.$$

Επομένως, η ακολουθία (a_n) θα είναι φθίνουσα όταν ο δείκτης n γίνεται μεγαλύτερος από $x-1$, που είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός. Άρα αν παραλείψουμε κάποιους όρους από εκεί και πέρα η (a_n) είναι φθίνουσα. Όμως η (a_n) είναι και κάτω φραγμένη αφού, προφανώς, $a_n \geq 0$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.5 η ακολουθία (a_n) θα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό l με $l \geq 0$. Ποιός όμως είναι ο l ;

Παρατηρούμε ότι:

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n x}{n! (n+1)} = \frac{x}{n+1} \cdot \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n+1} a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{x}{n+1} a_n.$$

Προφανώς, για $n \rightarrow +\infty$, $a_n \rightarrow l$, $a_{n+1} \rightarrow l$ και $\frac{x}{n+1} \rightarrow 0$, άρα παίρνοντας όρια στην παραπάνω ισότητα, έχουμε:

$$l = 0 \cdot l \Rightarrow l = 0.$$

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι αν $x > 0$: $\lim_n \frac{x^n}{n!} = 0$.

Όταν $x = 0$, τότε η (a_n) είναι η μηδενική ακολουθία, οπότε προφανώς $a_n \rightarrow 0$.

Όταν $x < 0$, τότε $|a_n| = \frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0$, αφού $|x| > 0$. Άρα και $a_n \rightarrow 0$ (γιατί);

□

1.4 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 7. Αποδείξτε με τη βοήθεια του Ορισμού 1.3 ότι $\lim_n \frac{1}{n^2} = 0$.

Απόδειξη. Έστω δεδομένο $\epsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός n_0 τέτοιος ώστε

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \epsilon \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0.$$

Η ανισότητα $\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \epsilon$, θα ισχύει αν $(1/n^2) < \epsilon \Leftrightarrow n^2 > 1/\epsilon$, η οποία με τη σειρά της ισχύει αν $n > 1/\sqrt{\epsilon}$. Επομένως αν πάρουμε ως n_0 οποιονδήποτε ακέραιο μεγαλύτερο από $1/\sqrt{\epsilon}$ η ζητούμενη ανισότητα θα ισχύει για κάθε $n > n_0$. Ας θεωρήσουμε $n_0 = [1/\sqrt{\epsilon}] + 1$. Τότε για κάθε $n > n_0$ ισχύει ότι $\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \epsilon$, επομένως $\lim(1/n^2) = 0$. $\square$

Παράδειγμα 8. Αποδείξτε με τη βοήθεια του Ορισμού 1.3 ότι $\lim_n \frac{n}{n+1} = 1$. Στη συνέχεια, αποδείξτε το με ιδιότητες ορίων ακολουθιών.

Απόδειξη. (Με χρήση του ορισμού.) Έστω δεδομένο $\epsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός n_0 τέτοιος ώστε

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0.$$

Όμως, $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{|n-n-1|}{n+1} = \frac{1}{n+1}$, άρα

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

Επομένως, αρκεί να επιλέξουμε ως n_0 τον φυσικό $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon} - 1 \right] + 1$.

(Με ιδιότητες ορίων.) Προφανώς,

$$\lim_n \frac{n}{n+1} = \lim_n \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \lim_n \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

$\square$

Παράδειγμα 9. Αποδείξτε με τη βοήθεια του Ορισμού 1.3 ότι $\lim_n \frac{n^3-1}{n^3+n+1} = 1$.

Απόδειξη. Έστω δεδομένο $\epsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός n_0 τέτοιος ώστε

$$\left| \frac{n^3-1}{n^3+n+1} - 1 \right| < \epsilon \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0.$$

Όμως, $\left| \frac{n^3-1}{n^3+n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n^3-1-n^3-n-1}{n^3+n+1} \right| = \frac{n+2}{n^3+n+1}$. Άρα

$$\left| \frac{n^3-1}{n^3+n+1} - 1 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{n+2}{n^3+n+1} < \epsilon.$$

Παρατηρήστε ότι δεν είναι εύκολο να λύσουμε την τελευταία ανίσωση ως προς n . Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να δείξουμε ότι $\frac{n+2}{n^3+n+1} < A$, για κάποια ποσότητα A , και στη συνέχεια να λύσουμε την $A < \epsilon$ (ως προς n). Η ποσότητα A πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε:

- α) να είναι μεγαλύτερη από την αρχική ποσότητα,
- β) η ανισότητα $A < \epsilon$ να επιλύεται εύκολα,
- γ) να γίνεται απεριόριστα μικρή.

Π.χ., για το κλάσμα $\frac{n+2}{n^3+n+1}$ μπορούμε ταυτόχρονα να μεγαλώσουμε τον αριθμητή και να μικρύνουμε τον παρονομαστή έτσι ώστε:

$$\frac{n+2}{n^3+n+1} < \frac{n+2n}{n^3} = \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}.$$

Επομένως, αν $\frac{3}{n^2} < \epsilon$, τότε και $\frac{n+2}{n^3+n+1} < \epsilon$. Άρα:

$$\frac{3}{n^2} < \epsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{3}{\epsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{3}{\epsilon}}.$$

Για να ισχύει η τελευταία για κάθε $n > n_0$, αρκεί να επιλέξουμε $n_0 = \lceil \sqrt{3/\epsilon} \rceil + 1$. □

Παράδειγμα 10. Θεωρήστε την ακολουθία $a_n = n$. Αποδείξτε με τη βοήθεια του Ορισμού 1.4 ότι $\lim_n a_n = +\infty$.

Απόδειξη. Έστω $M > 0$. Αναζητούμε ένα n_0 τέτοιο ώστε $a_n > M$ για κάθε $n > n_0$. Όμως

$$a_n > M \Leftrightarrow n > M.$$

Επομένως, αρκεί να επιλέξουμε $n_0 = \lceil M \rceil$. □

Παράδειγμα 11. Θεωρήστε την ακολουθία $a_n = n^4 + n^3 + 2$. Αποδείξτε με τη βοήθεια του Ορισμού 1.4 ότι $\lim_n a_n = +\infty$.

Απόδειξη. Έστω $M > 0$. Αναζητούμε ένα n_0 τέτοιο ώστε $a_n > M$ για κάθε $n > n_0$. Όμως

$$a_n > M \Leftrightarrow n^4 + n^3 + 2 > M.$$

Παρατηρήστε ότι δεν μπορούμε να λύσουμε την τελευταία ανίσωση ως προς n , μπορούμε όμως να μικρύνουμε κατάλληλα την ποσότητα $n^4 + n^3 + 2$. Π.χ.,

$$n^4 + n^3 + 2 > n^4.$$

Άρα αν βρούμε n_0 τέτοιο ώστε $n^4 > M$ για κάθε $n > n_0$, τότε προφανώς θα ισχύει και ότι $n^4 + n^3 + 2 > M$.

Επομένως, επειδή $n^4 > M \Leftrightarrow n > \sqrt[4]{M}$, αρκεί να επιλέξουμε $n_0 = \lceil \sqrt[4]{M} \rceil$. □

Παράδειγμα 12. Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας (a_n) με $a_n = \frac{2-5n^7}{n^7+4}$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\lim_n \frac{2-5n^7}{n^7+4} = \lim_n \frac{\frac{2}{n^7} - 5}{1 + \frac{4}{n^7}} = \frac{\lim_n \frac{2}{n^7} - 5}{1 + \lim_n \frac{4}{n^7}} = \frac{0 - 5}{1 + 0} = -5.$$

□

Παράδειγμα 13. Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας (a_n) με: (α) $a_n = \frac{\cos n}{n}$, (β) $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Απόδειξη. (α) Προφανώς $-1 \leq \cos n \leq 1$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Άρα

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Όμως $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$, άρα από το Θεώρημα 1.2 (σάντουιτς), έχουμε ότι αναγκαστικά και $\frac{\cos n}{n} \rightarrow 0$.

(β) Αρχικά βεβαιωθείτε ότι για κάθε $n = 1, 2, \dots$, ισχύει $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$. Εφόσον $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ έχουμε και πάλι από το Θεώρημα 1.2 (σάντουιτς), ότι $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$.

(Παρατηρήστε ότι προκύπτει και ως άμεσο συμπέρασμα του τύπου (4) της Ενότητας 1.3 για $x = 1/2$.) □

Παράδειγμα 14. Ελέγξτε αν συγκλίνει η ακολουθία (a_n) με $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$; Αν ναι, βρείτε το όριο $\lim_n a_n$.

Απόδειξη. Παίρνοντας όριο οδηγούμαστε στην απροσδιόριστη μορφή 1^∞ . Για το λόγο αυτό θεωρούμε την ακολουθία $(\ln a_n)$:

$$\ln a_n = \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n = n \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \lim_n \ln a_n &= \lim_n n \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right) = \lim_n \frac{\ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right)}{\frac{1}{n}} \quad (\text{απροσδιοριστία } 0/0, \text{ κανόνας l' H\^opital}) \\ &= \lim_n \frac{-\frac{2}{n^2-1}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{2n^2}{n^2-1} = \lim_n \frac{2}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1-\lim_n \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1-0} = 2. \end{aligned}$$

Επειδή $\ln a_n \rightarrow 2$ και η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι συνεχής, έχουμε από το Θεώρημα 1.3 ότι:

$$f(\ln a_n) \rightarrow f(2) \Rightarrow e^{\ln a_n} \rightarrow e^2 \Rightarrow a_n \rightarrow e^2.$$

(Προσπαθήστε, εναλλακτικά, να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας τον τύπο (5) της Ενότητας 1.3.) □

Παράδειγμα 15. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ είναι φθίνουσα.

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι $a_{n+1} < a_n$. Άρα,

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\Leftrightarrow \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1] \\ &\Leftrightarrow n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n \Leftrightarrow 1 < n^2 + n. \end{aligned}$$

Επειδή $n \geq 1$ η τελευταία ανίσωση είναι αληθής, άρα $a_{n+1} < a_n$ και, επομένως, η ακολουθία (a_n) είναι φθίνουσα. □

Παράδειγμα 16. Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία (a_n) που ορίζεται μέσω του αναδρομικού τύπου

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \quad \text{για} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Απόδειξη. Για να πάρουμε μια ιδέα υπολογίζουμε μερικούς όρους της ακολουθίας. Προκύπτει ότι:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{1}{2}(2 + 6) = 4, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 5.5, \quad a_5 = 5.75, \quad a_6 = 5.875, \quad \dots$$

Οι όροι αυτοί υποδεικνύουν ότι η ακολουθία είναι αύξουσα και, επιπλέον, φαίνεται ότι οι όροι της πλησιάζουν στο 6. Θα αποδείξουμε *επαγωγικά* ότι η ακολουθία είναι *γνησίως αύξουσα*, δηλαδή ότι $a_n < a_{n+1}$.

Πράγματι για $n = 1$ έχουμε ότι $a_1 = 2 < 4 = a_2$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή ότι $a_k < a_{k+1}$ (Επαγωγική υπόθεση).

Τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$, δηλαδή ότι $a_{k+1} < a_{k+2}$.

Όμως

$$\begin{aligned} a_{k+1} < a_{k+2} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) \Leftrightarrow a_k + 6 < a_{k+1} + 6 \\ &\Leftrightarrow a_k < a_{k+1} \quad \text{που ισχύει λόγω της επαγωγικής υπόθεσης.} \end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας και πάλι επαγωγή, ότι η (a_n) είναι *άνω φραγμένη* από το 6, δηλαδή $a_n < 6$ για κάθε n . (Παρατηρήστε ότι αφού η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα τότε σίγουρα είναι κάτω φραγμένη αφού, π.χ., $a_n \geq a_1 = 2$.)

Για $n = 1$, ισχύει αφού $a_1 = 2 < 6$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή ότι $a_k < 6$ (Επαγωγική υπόθεση).

Τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$, δηλαδή ότι $a_{k+1} < 6$.

Ας ξεκινήσουμε από την επαγωγική υπόθεση $a_k < 6$. Τότε

$$a_k < 6 \Rightarrow a_k + 6 < 6 + 6 \Rightarrow \frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2}(12) \Rightarrow a_{k+1} < 6.$$

Άρα μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα από το Θεώρημα 1.5 έχουμε ότι η ακολουθία (a_n) θα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό l με $l \leq 6$. Παίρνοντας όρια στον αναδρομικό τύπο, και επειδή για $n \rightarrow +\infty$, $a_n \rightarrow l$, $a_{n+1} \rightarrow l$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} l &= \lim_n a_{n+1} = \lim_n \frac{1}{2}(a_n + 6) = \frac{1}{2}(\lim_n a_n + 6) = \frac{1}{2}(l + 6) \\ &\Leftrightarrow l = \frac{1}{2}(l + 6) \Leftrightarrow 2l = l + 6 \Leftrightarrow l = 6. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι $a_n \rightarrow 6$. □

2 Σειρές

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n) . Το σύμβολο

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

ονομάζεται σειρά της (a_n) ή, απλούστερα, σειρά των a_n . Το a_n ονομάζεται **n -οστός όρος** της σειράς. Η ακολουθία s_n που ορίζεται από τις

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\vdots$$

είναι η **ακολουθία μερικών αθροισμάτων** της σειράς, και ο αριθμός s_n ονομάζεται **n -οστό μερικό άθροισμα** της σειράς των a_n .

Αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (s_n) της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε έναν αριθμό L , τότε λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει**, ονομάζουμε το L **άθροισμα** της σειράς, και γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$.

Αν η (s_n) δεν συγκλίνει, τότε λέμε ότι η σειρά αποκλίνει.

Ειδικότερα, αν η (s_n) αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τότε λέμε ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντίστοιχα, ονομάζουμε το $+\infty$ ή το $-\infty$ **άθροισμα** της σειράς και γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ ή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Παρατηρήσεις. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$, τότε η σειρά έχει άθροισμα και αυτό είναι είτε αριθμός ή $\pm\infty$, αντίστοιχα.

Αν η σειρά αποκλίνει αλλά δεν αποκλίνει στο $\pm\infty$, τότε η σειρά δεν έχει άθροισμα.

Το σύμβολο $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει διπλή έννοια. Απο τη μια μεριά, συμβολίζει τη σειρά ανεξάρτητα από το αν αυτή συγκλίνει ή αποκλίνει. Από την άλλη, όταν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$, συμβολίζει το άθροισμα της σειράς.

Παράδειγμα 1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ αποκλίνει στο $+\infty$ αφού

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-όροι}} = n \rightarrow +\infty.$$

Επομένως, το άθροισμα της σειράς είναι $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$.

2.1 Γεωμετρικές σειρές

Μια σειρά της μορφής

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1},$$

όπου τα a και r είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί με $a \neq 0$, λέγεται **γεωμετρική σειρά** με λόγο r . (Παρατηρήστε ότι κάθε όρος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τον προηγούμενο επί r .) Τη σειρά αυτή μπορούμε να τη γράψουμε και ως

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n.$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για το λόγο r :

- Αν ο λόγος $r = 1$, τότε το n -οστό μερικό άθροισμα της γεωμετρικής σειράς είναι ίσο με:

$$s_n = a + a \cdot 1 + a \cdot 1^2 + \cdots + a \cdot 1^{n-1} = na,$$

και άρα η σειρά αποκλίνει στο $\pm\infty$ ανάλογα με το πρόσημο του a .

Τώρα, παρατηρήστε ότι για $r \neq 1$, έχουμε:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a(1 + r + \cdots + r^{n-1}) = a \frac{1 - r^n}{1 - r}. \quad (1)$$

- Άρα, αν $r > 1$, τότε $s_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r} \rightarrow a \frac{1 - \infty}{1 - r} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$
- Αν $|r| < 1$, τότε $r^n \rightarrow 0$ (βλ. Ενότητα 1.3), οπότε $s_n \rightarrow \frac{a}{1 - r}$.
- Αν $r \leq -1$, τότε από την (1) συμπεραίνουμε ότι

$$1 - r^n = s_n \frac{1 - r}{a} \Rightarrow r^n = 1 - s_n \frac{1 - r}{a}.$$

Άρα αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας (s_n) , τότε θα υπάρχει και το όριο της ακολουθίας (r^n) . Όμως η (r^n) , με $r \leq -1$, δεν συγκλίνει, άρα ούτε και το όριο της (s_n) υπάρχει.

Συνοψίζοντας, για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς έχουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} = +\infty & \text{αν } r \geq 1 \text{ και } a > 0 \\ = -\infty & \text{αν } r \geq 1 \text{ και } a < 0 \\ = \frac{a}{1-r} & \text{αν } |r| < 1 \\ \text{δεν υπάρχει} & \text{αν } r \leq -1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2. Η γεωμετρική σειρά με $a = 5$ και $r = -\frac{2}{3}$ ισούται με

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-1} = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3} \right)} = \frac{5}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Παράδειγμα 3. Εκφράστε τον περιοδικό δεκαδικό $5.232323 \dots$ ως ρητό.

Απόδειξη. Από τον ορισμό των δεκαδικών αριθμών, έχουμε:

$$\begin{aligned} 5.232323 \dots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \frac{23}{100^4} + \dots \\ &= 5 + \frac{23}{100} \left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \left(\frac{1}{100} \right)^3 + \dots \right] \\ &\quad \text{γεωμ. σειρά με } a=1, r=1/100 \\ &= 5 + \frac{23}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 5 + \frac{23}{100} \cdot \frac{100}{99} \\ &= 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}. \end{aligned}$$

□

Γενικά, τύποι όπως αυτός, που επιτρέπει τον αναλυτικό υπολογισμό του αθροίσματος μιας συγκλίνουσας γεωμετρικής σειράς, είναι σπάνιοι και για το λόγο αυτό συχνά καταφεύγουμε σε προσεγγιστικούς υπολογισμούς αθροισμάτων. Στο επόμενο παράδειγμα, δίνεται άλλη μια περίπτωση όπου μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα αναλυτικά.

Παράδειγμα 4. Υπολογίστε το άθροισμα της «τηλεσκοπικής» σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ο γενικός όρος μπορεί να αναλυθεί σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Επομένως το μερικό άθροισμα s_n γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Βγάζουμε τις παρενθέσεις, απαλείφουμε διαδοχικούς αντίθετους όρους και καταλήγουμε ότι

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 - 0 = 1 \quad \text{καθώς} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. □

Πρόταση 2.1. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n \rightarrow 0$.

Απόδειξη. Σχηματίζουμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι ο αριθμός L τότε $s_n \rightarrow L$. Παρατηρούμε όμως ότι ισχύει

$$a_n = s_n - s_{n-1} \quad \text{για κάθε} \quad n \geq 2.$$

Άρα $a_n \rightarrow L - L = 0$. □

Παρατηρήσεις:

1. Το αντίστροφο της Πρότασης 2.1 δεν ισχύει. Παρακάτω θα δώσουμε ένα αντιπαράδειγμα.
2. Η Πρόταση 2.1 μας οδηγεί στο ακόλουθο κριτήριο για την απόκλιση μιας σειράς:

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει αν το $\lim_n a_n$ είτε δεν υπάρχει ή είναι διάφορο του μηδενός.

Παράδειγμα 5.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ αποκλίνει διότι $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ αποκλίνει διότι το $\lim_n (-1)^{n+1}$ δεν υπάρχει.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ αποκλίνει διότι $n^2 \rightarrow +\infty$.

Η ακόλουθη πρόταση (την οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη) λέει ότι η συμπεριφορά μιας σειράς ως προς την σύγκλιση ή απόκλιση δεν εξαρτάται από τους αρχικούς όρους της. Μπορούμε να αλλάξουμε, να απαλείψουμε ή να επισυνάψουμε πεπερασμένο πλήθος όρων σε μία σειρά χωρίς να μεταβληθεί η συμπεριφορά της ως προς τη σύγκλιση ή την απόκλιση.

Πρόταση 2.2. Έστω ότι οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντιστοίχως.

Μερικές φορές, όταν χειριζόμαστε σειρές, είναι χρήσιμο να κάνουμε μία απλή αλλαγή μεταβλητής (δείκτη). Για παράδειγμα, έστω η σειρά $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$. Εισάγουμε τη νέα μεταβλητή $k = n - m + 1$. Τότε όταν το n διατρέχει τα $m, m+1, m+2, \dots$, το k αντιστοίχως διατρέχει τα $1, 2, 3, \dots$. Επομένως,

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+m-1}.$$

Πρόταση 2.3. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και έστω ότι $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Τότε $r_n \rightarrow 0$. Το r_n ονομάζεται «ουρά» της σειράς. Άρα η πρόταση αυτή μας λέει ότι αν μία σειρά συγκλίνει, τότε η ουρά της τείνει στο 0.

Απόδειξη. Θεωρούμε το μερικό άθροισμα $s_n = a_1 + \dots + a_n$, και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στον L . Τότε, προφανώς, $s_n \rightarrow L$. Επίσης,

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + \dots + a_{n-1}}_{=s_{n-1}} + \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}_{=r_n} = s_{n-1} + r_n.$$

Άρα, $r_n = L - s_{n-1} \rightarrow L - L = 0$. □

Πρόταση 2.4. Αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ έχουν άθροισμα και αν το άθροισμα των δύο αθροισμάτων δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ έχει άθροισμα και

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Επίσης, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει άθροισμα, αν το λ είναι αριθμός και αν το γινόμενο του αριθμού και του αθροίσματος της σειράς δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ έχει άθροισμα και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Μπορούμε να συνδυάσουμε τα δύο αυτά αποτελέσματα ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Πρόταση 2.5. Αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ έχουν άθροισμα και αν ισχύει $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq 1$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(Οι αποδείξεις των Προτάσεων 2.2, 2.4 και 2.5 δεν είναι δύσκολες. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει για τις αποδείξεις αυτές, π.χ., στις σημειώσεις του Μιχ. Παπαδημητράκη, Κεφ. 9., που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.)

2.2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Θεώρημα 2.1. Έστω $a_n \geq 0$ για κάθε n . Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει άθροισμα και αυτό είναι είτε $+\infty$ είτε μη αρνητικός αριθμός. Δηλαδή

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq +\infty.$$

Ειδικότερα, αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά συγκλίνει, ενώ αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Απόδειξη. Επειδή $a_n \geq 0$ για κάθε n , έχουμε ότι

$$s_{n+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=s_n} + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \quad \text{για κάθε } n.$$

Άρα η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία οπότε έχει όριο το οποίο είναι είτε $+\infty$ είτε αριθμός. Επειδή $s_n = a_1 + \cdots + a_n \geq 0$ για κάθε n , έπεται ότι και $\lim_n s_n \geq 0$. Επομένως, αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη τότε το $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_n s_n$ είναι αριθμός, ενώ αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε το $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_n s_n = +\infty$. $\square$

Άρα, κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με μη αρνητικούς όρους έχει άθροισμα και το άθροισμα αυτό είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$. Συνεπώς μια τέτοια σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Παράδειγμα 6. Θεωρήστε τη λεγόμενη **αρμονική σειρά**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Παρατηρήστε ότι ο n -οστός όρος είναι $1/n$ και φυσικά τείνει στο μηδέν. Όμως η σειρά αποκλίνει μιας και τα μερικά της αθροίσματα δεν είναι άνω φραγμένα. Για να το δούμε αυτό ομαδοποιούμε τους όρους της σειράς ως εξής:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{> \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \cdots$$

Το άθροισμα των δύο πρώτων όρων είναι $3/2$. Στη συνέχεια, το άθροισμα 2^n όρων που τελειώνουν με τον $1/2^{n+1}$ είναι μεγαλύτερο από $2^n/2^{n+1} = 1/2$. Άρα με $n = 2^k$, το μερικό άθροισμα s_n είναι μεγαλύτερο από $k/2$, συνεπώς η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων δεν είναι άνω φραγμένη και, επομένως, για την αρμονική σειρά ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Πρόταση 2.6. (i) Έστω ότι $0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε n . Τότε

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Αν, επιπλέον, η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) Έστω ότι ισχύει $a_n \geq 0$ και $b_n > 0$ για κάθε n , και ότι η ακολουθία $(\frac{a_n}{b_n})$ συγκλίνει ή, γενικότερα, ότι είναι φραγμένη. Τότε αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Απόδειξη. (i) Οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ έχουν άθροισμα (βλ. Θεώρημα 2.1), άρα από την Πρόταση 2.5, έχουμε ότι $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$, επομένως από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε ότι και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) Έστω ότι η ακολουθία $(\frac{a_n}{b_n})$ είναι φραγμένη. Τότε υπάρχει ένας u τέτοιος ώστε

$$\frac{a_n}{b_n} \leq u \quad \text{για κάθε } n \quad \Leftrightarrow \quad a_n \leq u b_n \quad \text{για κάθε } n.$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} u b_n$ συγκλίνει, οπότε από το (i) έχουμε άμεσα ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. □

Παρατήρηση. Μερικές φορές χρησιμοποιούμε την Πρόταση 2.6 ως εξής: Αν $a_n, b_n > 0$ για κάθε n , και $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \rho$, όπου ρ είναι **θετικός** πραγματικός αριθμός ($0 < \rho < +\infty$), τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είτε και οι δύο συγκλίνουν ή και οι δύο αποκλίνουν στο $+\infty$.

Πράγματι, επειδή $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \rho$ συνεπάγεται ότι αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Όμως, $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \frac{1}{\rho}$, όπου $1/\rho > 0$, άρα αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Το ακόλουθο θεώρημα μας προσφέρει ένα κριτήριο σύγκλισης για σειρές με μη αρνητικούς όρους οι οποίοι φθίνουν.

Θεώρημα 2.2 (Κριτήριο του ολοκληρώματος). Έστω ότι η (a_n) είναι φθίνουσα, και ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε n . Έστω ότι $a_n = f(n)$, όπου $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, θετικής, φθίνουσα συνάρτηση. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ έχει τιμή η οποία είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$, και

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \text{ αν και μόνον αν } \int_1^{+\infty} f(t) dt < +\infty.$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \text{ αν και μόνον αν } \int_1^{+\infty} f(t) dt = +\infty.$$

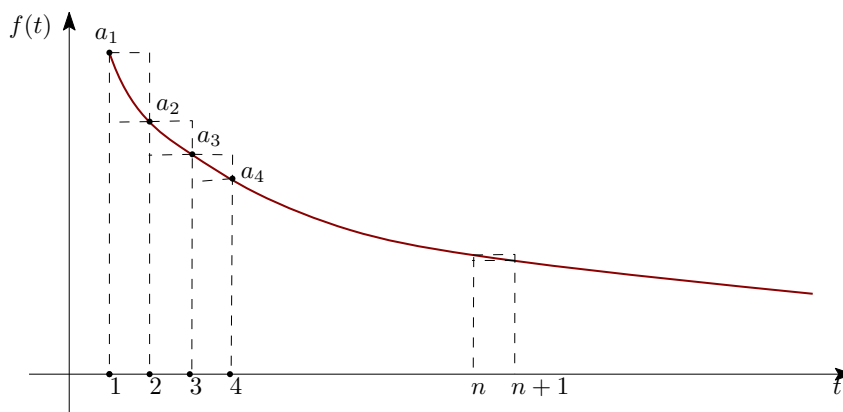
Επιπλέον, ισχύει

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι θετική συνάρτηση το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ θα έχει τιμή που θα είναι είτε αριθμός ή $+\infty$.

Τώρα, (βλ. Σχήμα 3) για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και, επειδή η f είναι φθίνουσα, για κάθε $t \in [k, k+1]$ ισχύει ότι:

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k),$$



Σχήμα 3:

οπότε

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \quad \Leftrightarrow \quad a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq a_k.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις αριστερές ανισότητες για $k = 1, \dots, n-1$ και τις δεξιές ανισότητες για $k = 1, \dots, n$ και βρίσκουμε

$$a_2 + \dots + a_n \leq \int_1^n f(t) dt \quad \text{και} \quad \int_1^{n+1} f(t) dt \leq a_1 + \dots + a_n.$$

Άρα

$$\int_1^{n+1} f(t) dt \leq a_1 + \dots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(t) dt.$$

Παίρνουμε όρια για $n \rightarrow +\infty$ στα τρία μέλη της τελευταίας ανισότητας και καταλήγουμε ότι

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

Τώρα τα (i) και (ii) είναι άμεση συνέπεια της τελευταίας ανισότητας. □

Παράδειγμα 7. Ελέγξτε αν η ακόλουθη σειρά συγκλίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ για $x \geq 1$. Προφανώς η f είναι συνεχής και θετική για κάθε $x \geq 1$. Ελέγχουμε αν η f είναι φθίνουσα για $x \geq 1$. Έχουμε

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leq 0 \quad \text{για} \quad x \geq 1.$$

Άρα η f είναι φθίνουσα. Στη συνέχεια, εξετάζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_1^t \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t^2+1) - \frac{\ln 2}{2} = +\infty.\end{aligned}$$

Επομένως, από το Θεώρημα 2.2 έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} = +\infty$.

Παράδειγμα 8. Ελέγξτε αν η ακόλουθη σειρά συγκλίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ για $x \geq 1$. Προφανώς η f είναι συνεχής, θετική και φθίνουσα για κάθε $x \geq 1$. Εξετάζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\arctan x]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan t - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Επομένως, από το Θεώρημα 2.2 έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ συγκλίνει, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι το $\pi/4$ είναι το όριο της σειράς. Το θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι η σειρά συγκλίνει αλλά δεν γνωρίζουμε την τιμή του αθροίσματος.

Παράδειγμα 9. Εδώ θα εξετάσουμε τη σημαντική σειρά (συνήθως αναφέρεται ως σειρά p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

όπου p είναι οποιαδήποτε πραγματική σταθερά. Επειδή είναι σειρά μη αρνητικών όρων, έχει άθροισμα που είναι είτε μη αρνητικός αριθμός ή $+\infty$.

Αν $p \leq 0$, τότε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι $\frac{1}{n^p} \geq 1$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Έστω τώρα $p > 0$. Τότε η ακολουθία $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^p}$ για $x \geq 1$. Η f είναι συνεχής, θετική και φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και, προφανώς, $f(n) = \frac{1}{n^p}$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Αν $0 < p < 1 \Rightarrow 1-p > 0$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^t \\ &= \frac{1}{1-p} \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^{1-p} - 1) \stackrel{1-p > 0}{=} +\infty.\end{aligned}$$

β) Αν $p = 1$, έχουμε την αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει.

γ) Αν $p > 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^t \\ &= \frac{1}{1-p} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right) \stackrel{p-1>0}{=} \frac{1}{1-p} (0 - 1) = \frac{1}{p-1}. \end{aligned}$$

Άρα σε αυτή την περίπτωση η σειρά συγκλίνει αλλά, τονίζουμε και πάλι, ότι δεν γνωρίζουμε σε ποιά τιμή.

Συνοψίζοντας, έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} < +\infty \text{ για } p > 1, \\ = +\infty \text{ για } p \leq 1. \end{cases}$$

Η σειρά p είναι σημαντική γιατί χρησιμοποιείται συχνά ως «πρότυπο» σύγκρισης για άλλες σειρές όπως θα δούμε στα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 10.

(α) Ελέγξτε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1}$.

Συγκρίνουμε την $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ (που είναι σειρά θετικών όρων) με την $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Εδώ θεωρούμε την αρμονική σειρά μιας και οι «κυρίαρχοι» όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή της $\frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ είναι οι $2n$ και n^2 , αντίστοιχα. Επειδή

$$\frac{\frac{2n-1}{n^2+3n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{2n^2 - n}{n^2 + 3n + 1} \rightarrow 2,$$

οπότε, από την παρατήρηση μετά την Πρόταση 2.6, έχουμε ότι αφού η αρμονική σειρά αποκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

(β) Ελέγξτε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$.

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, άρα και

$$\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1.$$

Επομένως, όπως και πριν, αφού η αρμονική σειρά αποκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

(γ) Ελέγξτε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$.

Τώρα θα συγκρίνουμε την $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+3}$ με την $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, επειδή

$$\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+3}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{n^2 + n^{3/2}}{2n^2 + 3} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Στο Παράδειγμα 9 είδαμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει (είναι σειρά p , με $p = \frac{3}{2} > 1$), άρα θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+3}$.

2.3 Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Ορισμός 2.1. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει απολύτως** (ή είναι **απολύτως συγκλίνουσα**) αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. (Ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$.)

Θεώρημα 2.3 (Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης). Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε αυτή συγκλίνει, και

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Απόδειξη. Για κάθε n , ισχύει ότι:

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|.$$

Άρα, επειδή από την υπόθεσή μας η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$. Συνεπώς, λόγω της Πρότασης 2.6, θα συγκλίνει και η σειρά μη αρνητικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$. Επιπλέον,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

δηλαδή η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ εκφράζεται ως διαφορά δύο συγκλινουσών σειρών, άρα συγκλίνει.

Τέλος, επειδή $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ για κάθε $n \geq 1$, έχουμε

$$-\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

□

Παράδειγμα 11.

(α) Ελέγξτε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$.

Η σειρά αυτή συγκλίνει μιας και συγκλίνει απολύτως: Η $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ η οποία συγκλίνει.

(β) Ελέγξτε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Η σειρά αυτή περιέχει και θετικούς και αρνητικούς όρους. Θεωρούμε την $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$. Επειδή $|\sin n| \leq 1$, έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, και επειδή η τελευταία συγκλίνει, έχουμε ότι η αρχική σειρά συγκλίνει απολύτως, άρα συγκλίνει. $\square$

Πρόταση 2.7. (α) Αν $|a_n| \leq b_n$ για κάθε n και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει. Επίσης,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(β) Έστω ότι $b_n > 0$ για κάθε n και ότι η ακολουθία $\left(\frac{|a_n|}{b_n} \right)$ συγκλίνει, ή, γενικότερα, ότι είναι φραγμένη. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει.

Απόδειξη. (α) Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, έπεται άμεσα ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Άρα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και, μάλιστα,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(β) Είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.6 και του Θεωρήματος 2.3. $\square$

Παράδειγμα 12. Συγκρίνουμε την $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n + 2^n}$ με την $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$. Έχουμε ότι:

$$\frac{\left| \frac{(-2)^n}{3^n + 2^n} \right|}{\left(\frac{2}{3} \right)^n} = \frac{3^n}{3^n + 2^n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n} \rightarrow 1.$$

Άρα επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n + 2^n}$ συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.

Θεώρημα 2.4 (Κριτήριο λόγου του d' Alembert). Έστω ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho.$$

(α) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει.

(β) Αν $\rho > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(Το κριτήριο δεν μας επιτρέπει να αποφανθούμε περί σύγκλισης ή απόκλισης για $\rho = 1$.)

Απόδειξη. (α) Έστω $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho < 1$. Παίρνουμε ένα u έτσι ώστε $\rho < u < 1$. Άρα υπάρχει κάποιο n_0 ώστε να ισχύει $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq u$ για κάθε $n \geq n_0$.¹ Επομένως, ισχύει ότι:

$$|a_{n+1}| \leq u |a_n| \Leftrightarrow \frac{|a_{n+1}|}{u^{n+1}} \leq \frac{|a_n|}{u^n}.$$

¹Είναι ενδιαφέρον να αποδείξετε λεπτομερώς αυτόν τον ισχυρισμό.

Άρα η ακολουθία (θετικών όρων) $(\frac{|a_n|}{u^n})$ είναι φθίνουσα από τον n_0 -όρο της και μετά (δηλαδή είναι τελικώς φθίνουσα), και επομένως είναι φραγμένη. Συνεπώς, επειδή $u < 1$, η $\sum_{n=1}^{\infty} u^n$ συγκλίνει και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Έστω $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho > 1$. Τότε υπάρχει κάποιο n_0 ώστε να ισχύει $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα η ακολουθία $(|a_n|)$ είναι τελικώς αύξουσα (δηλαδή αύξουσα από τον n_0 -οστό όρο της και μετά), συνεπώς είναι αδύνατον να ισχύει $a_n \rightarrow 0$, και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. $\square$

Παράδειγμα 13.

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει διότι

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 < 1.$$

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ αποκλίνει διότι

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e > 1.$$

Όπως ήδη αναφέραμε το κριτήριο λόγου δεν μας επιτρέπει να αποφανθούμε περί σύγκλισης ή απόκλισης για $\rho = 1$. Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε δύο σειρές για τις οποίες $\rho = 1$ και η μία συγκλίνει ενώ η άλλη αποκλίνει.

Παράδειγμα 14.

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και $\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow 1$.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει και $\frac{\frac{1}{(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \rightarrow 1$.

Θεώρημα 2.5 (Κριτήριο ρίζας του Cauchy). Έστω ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

(α) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει.

(β) Αν $\rho > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(Το κριτήριο δεν μας επιτρέπει να αποφανθούμε περί σύγκλισης ή απόκλισης για $\rho = 1$.)

Απόδειξη. (α) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho < 1$, επιλέγουμε ένα u έτσι ώστε $\rho < u < 1$. Άρα υπάρχει κάποιο n_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|a_n|} \leq u$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, $|a_n| \leq u^n$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία (θετικών όρων) $(\frac{|a_n|}{u^n})$ είναι φραγμένη. Άρα, επειδή $u < 1$, η $\sum_{n=1}^{\infty} u^n$ συγκλίνει και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho > 1$, τότε υπάρχει κάποιο n_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $|a_n| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$, συνεπώς είναι αδύνατον να ισχύει $a_n \rightarrow 0$, και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. $\square$

Παράδειγμα 15.

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ συγκλίνει διότι $\sqrt[n]{\left|\frac{n^3}{2^n}\right|} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n}$ αποκλίνει διότι $\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n}\right|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 2 > 1$.

Ούτε και το κριτήριο ρίζας μας επιτρέπει να αποφανθούμε περί σύγκλισης ή απόκλισης για $\rho = 1$. Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε δύο σειρές για τις οποίες $\rho = 1$ και η μία συγκλίνει ενώ η άλλη αποκλίνει.

Παράδειγμα 16.

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει και $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$.

Θεώρημα 2.6 (Κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων). Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

συγκλίνει αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

(α) $b_n > 0$ για κάθε n .

(β) Η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα ($b_n \geq b_{n+1}$).

(γ) $b_n \rightarrow 0$.

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε αρχικά ότι n είναι ένας άρτιος ακέραιος, έστω $n = 2m$. Τότε το μερικό άθροισμα s_n είναι:

$$\begin{aligned} s_{2m} &= (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_{2m-1} - b_{2m}) \\ &= b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \dots - (b_{2m-2} - b_{2m-1}) - b_{2m}. \end{aligned}$$

Από την πρώτη ισότητα συμπεραίνουμε ότι το s_{2m} είναι άθροισμα m μη αρνητικών όρων αφού κάθε όρος μέσα σε παρένθεση είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 0. Άρα $s_{2m+2} \geq s_{2m}$, και η ακολουθία (s_{2m}) είναι αύξουσα. Από τη δεύτερη ισότητα συμπεραίνουμε ότι $s_{2m} \leq b_1$, άρα η (s_{2m}) είναι και φραγμένη. Επομένως, συγκλίνει σε κάποιο όριο, έστω l , δηλαδή

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} s_{2m} = l. \quad (2)$$

Αν n είναι περιττός ακέραιος, έστω $n = 2m + 1$, τότε το μερικό άθροισμα s_n είναι:

$$s_{2m+1} = s_{2m} + b_{2m+1}.$$

Εφόσον $\lim_n b_n = 0$, θα ισχύει και ότι:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} b_{2m+1} = 0,$$

επομένως, καθώς $m \rightarrow +\infty$,

$$s_{2m+1} = s_{2m} + b_{2m+1} \rightarrow l + 0 = l. \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) έχουμε ότι $\lim_n s_n = l$, άρα η σειρά συγκλίνει (βλ. Άσκηση 6). □

Παράδειγμα 17. Έστω $p > 0$. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$$

πληροί όλες τις προϋποθέσεις του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων και συνεπώς συγκλίνει.

Αν $p > 1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{(n-1)}}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει και δεν χρειαζόμαστε το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων για να αποδείξουμε τη σύγκλισή της.

Όμως για $0 < p \leq 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n^p}$ δεν συγκλίνει απολύτως.

Ειδικότερα, για $p = 1$, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

συγκλίνει, ενώ η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ αποκλίνει στο $+\infty$. Άρα δεν ισχύει το αντίστροφο του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης (βλ. Θεώρημα 2.3).

2.4 Δυναμοσειρές

Ορισμός 2.2. Κάθε σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n + \cdots$$

λέγεται **δυναμοσειρά με κέντρο a και συντελεστές $c_0, c_1, c_2, \dots$**

Σε μία δυναμοσειρά το x παίζει τον ρόλο μεταβλητής. Για κάποιες τιμές του x η δυναμοσειρά συγκλίνει, για κάποιες αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, και για τις υπόλοιπες τιμές του x η δυναμοσειρά αποκλίνει αλλά όχι στα $\pm\infty$. Όταν μελετάμε μία δυναμοσειρά, αναζητούμε αρχικά τις τιμές του x για τις οποίες η δυναμοσειρά συγκλίνει και, στη συνέχεια, προσπαθούμε να βρούμε έναν συνοπτικό τύπο για το άθροισμά της, το οποίο φυσικά εξαρτάται από το x . Θα δούμε ότι για το πρώτο ζήτημα υπάρχει μία σχετικά γενική απάντηση ενώ για το δεύτερο υπάρχει απάντηση μόνο κατά περίπτωση.

Παράδειγμα 1. (Γεωμετρική δυναμοσειρά.) Η γεωμετρική δυναμοσειρά είναι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - a)^n,$$

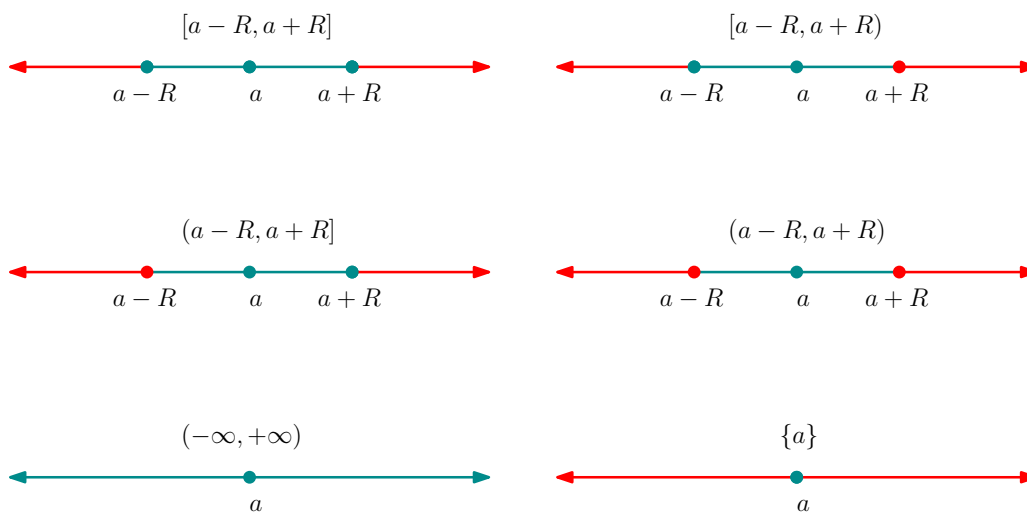
με όλους τους συντελεστές της να είναι ίσοι με 1. Τη σειρά αυτή την έχουμε ήδη μελετήσει στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$, με $b = x - a$. Η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει μόνον όταν $|x - a| < 1 \Leftrightarrow a - 1 < x < a + 1$, και το άθροισμα της είναι ίσο με $\frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-(x-a)}$. Άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - a)^n = \frac{1}{1 - (x - a)}, \quad \text{αν } a - 1 < x < a + 1.$$

Το σύνολο των τιμών του x για τις οποίες μία δυναμοσειρά συγκλίνει ονομάζεται **σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς**. Η μορφή του συνόλου σύγκλισης μιας οποιασδήποτε δυναμοσειράς περιγράφεται στην ακόλουθη πρόταση, της οποίας η απόδειξη παραλείπεται.

Πρόταση 2.8. Για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ υπάρχουν ακριβώς οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις σχετικά με το σύνολο σύγκλισής της:

1. Το σύνολο σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$.
2. Το σύνολο σύγκλισής της είναι το μονοσύνολο $\{a\}$
3. Υπάρχει $R > 0$ τέτοιος ώστε η σειρά να συγκλίνει για x με $|x - a| < R$ και να αποκλίνει για x με $|x - a| > R$. Η σειρά μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει σε οποιοδήποτε από τα άκρα $x = a - R$ και $x = a + R$.



Σχήμα 4: Οι έξι πιθανές περιπτώσεις για το διάστημα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς.

(Οι έξι πιθανές περιπτώσεις για το διάστημα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς συνοψίζονται στο Σχήμα 4.)

Ορισμός 2.3. Το σύνολο σύγκλισης κάθε δυναμοσειράς είναι διάστημα συμμετρικό ως προς το κέντρο της και ονομάζεται **διάστημα σύγκλισης** της δυναμοσειράς. Το αντίστοιχο R λέγεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς και σε κάθε περίπτωση ισχύει $0 \leq R \leq +\infty$.

Παράδειγμα. Η γεωμετρική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n$, συγκλίνει για κάθε $x \in (a-1, a+1)$ και αποκλίνει για κάθε άλλη τιμή του x . Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(a-1, a+1)$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1$.

Για τον υπολογισμό της ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς υπάρχει ένας γενικός τύπος με τον οποίο δεν θα ασχοληθούμε στις σημειώσεις αυτές. Στις ακόλουθες δύο προτάσεις θα δούμε δύο τύπους που ισχύουν για τις περισσότερες δυναμοσειρές που συναντάμε στην πράξη.

Πρόταση 2.9. Έστω ότι $c_n \neq 0$ για κάθε n και έστω $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \rightarrow \rho$. Τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ είναι ίση με $\frac{1}{\rho}$, όπου το $\frac{1}{\rho}$ ορίζεται ως 0 αν $\rho = +\infty$ και ως $+\infty$ αν $\rho = 0$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου στη δυναμοσειρά, και διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(α) Αν $0 < \rho < +\infty$, τότε

$$\left| \frac{c_{n+1} (x-a)^{n+1}}{c_n (x-a)^n} \right| = |x-a| \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \rightarrow |x-a| \rho.$$

Επομένως, αν $|x-a| \rho < 1 \Leftrightarrow |x-a| < \frac{1}{\rho}$, η δυναμοσειρά συγκλίνει, ενώ αν $|x-a| > \frac{1}{\rho}$, η δυναμοσειρά αποκλίνει. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με $\frac{1}{\rho}$.

(β) Αν $\rho = 0$, τότε

$$\left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| \rightarrow |x-a| \cdot 0 = 0 < 1.$$

Επομένως, η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x , δηλαδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $+\infty$.

(γ) Αν $\rho = +\infty$, τότε για κάθε $x \neq a$ έχουμε:

$$\left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| \rightarrow |x-a|(+\infty) = +\infty > 1.$$

Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε $x \neq a$, η δυναμοσειρά αποκλίνει. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 0. □

Πρόταση 2.10. Έστω $\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow \rho$. Τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ είναι ίση με $\frac{1}{\rho}$, όπου το $\frac{1}{\rho}$ ορίζεται ως 0 αν $\rho = +\infty$ και ως $+\infty$ αν $\rho = 0$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας στη δυναμοσειρά, και διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(α) Αν $0 < \rho < +\infty$, τότε

$$\sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} = |x-a| \sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow |x-a| \rho.$$

Επομένως, αν $|x-a| \rho < 1 \Leftrightarrow |x-a| < \frac{1}{\rho}$, η δυναμοσειρά συγκλίνει, ενώ αν $|x-a| > \frac{1}{\rho}$, η δυναμοσειρά αποκλίνει. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με $\frac{1}{\rho}$.

(β) Αν $\rho = 0$, τότε

$$\sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} \rightarrow |x-a| \cdot 0 < 1,$$

οπότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x , δηλαδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $+\infty$.

(γ) Αν $\rho = +\infty$, τότε για κάθε $x \neq a$ έχουμε:

$$\sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} \rightarrow |x-a|(+\infty) = +\infty > 1.$$

Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε $x \neq a$, η δυναμοσειρά αποκλίνει οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 0. □

Παράδειγμα 2.

(α) Θα μελετήσουμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$. Εδώ οι συντελεστές είναι $c_n = \frac{1}{n}$ και κέντρο είναι το 0.

Εφαρμόζουμε τους δύο τύπους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης:

$$\left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} \right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1$.

Για $x = 1$, η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και αποκλίνει, ενώ για $x = -1$, η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ και συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1)$.

(β) Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$. Οι συντελεστές είναι $c_n = \frac{1}{n^2}$ και κέντρο είναι το 0.

Οι δύο τύποι υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης μας δίνουν:

$$\left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \rightarrow 1 \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^2} \right|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1$.

Για $x = 1$, η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ και συγκλίνει, ενώ για $x = -1$, η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ και συγκλίνει και πάλι. Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1, 1]$.

(γ) Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. Οι συντελεστές είναι $c_n = n^n$ και κέντρο είναι το 0.

Εδώ έχουμε:

$$\left| \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \right| = (n+1) \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = (n+1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow (+\infty) e.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 0$, οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $\{0\}$.

(δ) Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n$, οι συντελεστές είναι $c_n = \frac{1}{n^n}$ και κέντρο είναι το 0.

Εδώ με τον πρώτο τρόπο υπολογισμού έχουμε:

$$\left| \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} \right| = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{e} = 0.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγούμαστε και με τον δεύτερο τρόπο υπολογισμού:

$$\sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^n} \right|} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$, οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Από κάθε δυναμοσειρά με θετική ακτίνα σύγκλισης μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση.

Ορισμός 2.4. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ (αυτό περιλαμβάνει την περίπτωση $R = +\infty$), έτσι ώστε το διάστημα σύγκλισης I της δυναμοσειράς δεν αποτελείται μόνον από το a . Τότε ορίζεται συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \quad \text{για } x \in I,$$

και λέμε ότι η f είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ στο διάστημα σύγκλισής της.

Παράδειγμα 3. Η γεωμετρική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ έχει διάστημα σύγκλισης το $(-1, 1)$ και για κάθε $x \in (-1, 1)$ ισχύει

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Άρα η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$ με πεδίο ορισμού το $(-1, 1)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ στο $(-1, 1)$.

Προσοχή! Η συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ φυσικά ορίζεται (ανεξάρτητα από τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$) στο σύνολο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ που είναι μεγαλύτερο από το $(-1, 1)$ το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Η ακόλουθη πρόταση, την απόδειξη της οποίας δεν θα δώσουμε σε αυτές τις σημειώσεις, δίνει πληροφορίες για τη συνάρτηση η οποία ορίζεται από μία δυναμοσειρά.

Πρόταση 2.11. Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ (οπότε το διάστημα σύγκλισης I της δυναμοσειράς δεν αποτελείται μόνον από το a). Γνωρίζουμε ότι το I είναι το $(a-R, a+R)$ και πιθανόν να περιέχει και ένα από τα άκρα $a \pm R$ ή και τα δύο. Επιπλέον, έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα I . Τότε:

(i) Η f είναι συνεχής στο I .

(ii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(a-R, a+R)$ και ισχύει:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} \quad \text{για κάθε } x \in (a-R, a+R).$$

Παρατήρηση. Από την Πρόταση 2.11 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μιας και η

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

είναι και αυτή δυναμοσειρά και συγκλίνει στο διάστημα $(a-R, a+R)$, τότε και η συνάρτηση που ορίζει, δηλαδή η f' , είναι παραγωγίσιμη στο $(a-R, a+R)$ και ισχύει:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2} \quad \text{για κάθε } x \in (a-R, a+R).$$

Προφανώς αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί βρίσκοντας διαδοχικές παραγώγους της f και συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την αρχική δυναμοσειρά είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(a-R, a+R)$ και ότι για κάθε $m \geq 1$ ισχύει:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \dots (n-m+1) c_n (x-a)^{n-m} \quad \text{για κάθε } x \in (a-R, a+R).$$

Συγκεκριμένα, για $x = a$ βρίσκουμε ότι:

$$f^{(m)}(a) = m! c_m.$$

Παράδειγμα 4. Έστω η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Προσδιορίζουμε την ακτίνα σύγκλισης εφαρμόζοντας τον πρώτο τύπο υπολογισμού της:

$$\left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Άρα $R = +\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Έστω, τώρα f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή έστω ότι ισχύει

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{για κάθε } x.$$

Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και, σύμφωνα με την Πρόταση 2.11, ισχύει:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = f(x) \quad \text{για κάθε } x.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{-x} f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει:

$$h'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

άρα η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και $h(0) = e^{-0} f(0) = f(0) = 1$. Επομένως, $h(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα $f(x) = e^x$ για κάθε x . Δηλαδή,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

Επομένως η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι η εκθετική συνάρτηση e^x . Για τον λόγο αυτό η συγκεκριμένη δυναμοσειρά ονομάζεται **εκθετική δυναμοσειρά**.

Επίσης, αληθεύει ότι μπορούμε να ολοκληρώσουμε μια δυναμοσειρά όρο προς όρο σε ολόκληρο το διάστημα σύγκλισής της:

Πρόταση 2.12. Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ (οπότε το διάστημα σύγκλισης I της δυναμοσειράς δεν αποτελείται μόνον από το a). Γνωρίζουμε ότι το I είναι το $(a-R, a+R)$ και πιθανόν να περιέχει και ένα από τα άκρα $a \pm R$ ή και τα δύο. Επιπλέον, έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα I . Τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ συγκλίνει για κάθε $x \in (a-R, a+R)$ και

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{για κάθε } x \in (a-R, a+R).$$

2.5 Σειρές Taylor

Μέχρι στιγμής είδαμε ότι μία δυναμοσειρά ορίζει εντός του διαστήματος σύγκλισής της, I , μια συνάρτηση η οποία λόγω της Πρότασης 2.11 είναι συνεχής και έχει παραγώγους όλων των τάξεων. Φυσιολογικά προκύπτει το ερώτημα κατά πόσον ισχύει και το αντίστροφο; Αν μια συνάρτηση f έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα διάστημα μπορεί να εκφραστεί ως δυναμοσειρά τουλάχιστον σε κάποιο μέρος του διαστήματος αυτού; Επιπλέον, αν αυτό είναι δυνατόν, ποιόι θα είναι οι συντελεστές της;

Για το τελευταίο ερώτημα μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: Έστω ότι η $f(x)$ είναι το άθροισμα μιας δυναμοσειράς με κέντρο το $x = a$ και διάστημα σύγκλισης I με θετική ακτίνα σύγκλισης,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \quad \text{για } x \in I.$$

Όπως είδαμε στην Παρατήρηση μετά την Πρόταση 2.11, με διαδοχικές παραγωγίσεις εντός του διαστήματος σύγκλισης I , καταλήγουμε ότι:

$$f^{(m)}(a) = m! c_m.$$

Ο τύπος αυτός υποδηλώνει τον τύπο για τους συντελεστές κάθε δυναμοσειράς που συγκλίνει στις τιμές της f στο διάστημα I . Αν υπάρχει τέτοια σειρά (κάτι που δεν έχει ακόμη αποδειχθεί) θα πρέπει ο m -οστός συντελεστής της να είναι ίσος με

$$c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}.$$

Άρα, αν η f μπορεί να αναπαρασταθεί με κάποια σειρά, τότε αυτή θα πρέπει να είναι η

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \cdots \end{aligned} \quad (4)$$

Επομένως, το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: Αν f είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα που περιέχει το $x = a$, και τη χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε τη σειρά που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της (4), τότε η σειρά αυτή θα συγκλίνει στην $f(x)$ για κάθε x στο διάστημα σύγκλισης; Η απάντηση, όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι ότι για κάποιες συναρτήσεις αυτό είναι εφικτό, ενώ για άλλες όχι.

Ορισμός 2.5. Έστω f συνάρτηση με παραγώγους όλων των τάξεων σε κάθε σημείο ενός διαστήματος και a κάποιο εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού. Τότε η **σειρά Taylor** που παράγεται από την f στο $x = a$ είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Η **σειρά Maclaurin** της f είναι η σειρά Taylor που παράγεται από την f στο $x = 0$, δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Τώρα, η απάντηση στο ερώτημα, πότε η σειρά Taylor μιας συνάρτησης αναμένεται να συγκλίνει στη συνάρτηση που την παράγει, δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.7 (Θεώρημα του Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange). Έστω $n \in \mathbb{N}$, διάστημα I , συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $a \in I$. Έστω ότι η f έχει παραγώγους τάξης μέχρι και n συνεχείς στο I (δηλαδή και στα πιθανά άκρα του) και ότι υπάρχει η παράγωγος τάξης $n+1$ της f σε κάθε εσωτερικό σημείο του I . Τότε για κάθε $x \in I$ υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα J με άκρα x, a ,² ώστε

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Αν, επιπλέον, ισχύει $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ για κάθε x στο εσωτερικό του I τότε

$$\left| f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε τα x και a και ορίζουμε τον αριθμό A μέσω της ισότητας

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{A}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{A}{(n+1)!}(x-t)^{n+1},$$

²Δηλαδή το J είναι το (a, x) ή το (x, a) αναλόγως του αν το x είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του a .

με ανεξάρτητη μεταβλητή $t \in J$. Η $g(t)$ είναι προφανώς συνεχής στο J (συμπεριλαμβανομένων των άκρων του), παραγωγίσιμη στο J και, δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να δούμε ότι, η παράγωγός της είναι ίση με

$$g'(t) = \frac{A - f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n.$$

Προφανώς, $g(x) = 0$ και, από τον ορισμό του A , $g(a) = 0$. Άρα, από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in J$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow A = f^{(n+1)}(\xi)$. Αντικαθιστούμε αυτήν την τιμή του A στην ισότητα που το καθορίζει και παίρνουμε την ισότητα του θεωρήματος. Η ανισότητα προκύπτει εύκολα από την ισότητα και την $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M$. $\square$

Ορισμός 2.6. Η παράσταση $f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ ονομάζεται **προσέγγιση Taylor τάξης n της f στο διάστημα I** . Το $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ ονομάζεται **σφάλμα τάξης n τύπου Lagrange**. Η προσέγγιση Taylor τάξης n είναι πολυώνυμο του x βαθμού $\leq n$.

Θεώρημα 2.8 (Θεώρημα του Taylor με σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου). Έστω $n \in \mathbb{N}$, διάστημα I , συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $a \in I$. Έστω ότι η f έχει παραγώγους τάξης μέχρι και $n+1$ συνεχείς στο I (δηλαδή και στα πιθανά άκρα του). Τότε για κάθε $x \in I$ ισχύει

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Απόδειξη. Εκτελούμε διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη στο $\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$, μεταφέροντας παραγώγους από την $f(t)$ στην $(x-t)^n$. $\square$

Ορισμός 2.7. Το $\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ ονομάζεται **σφάλμα τάξης n ολοκληρωτικού τύπου**.

Τώρα είμαστε σε θέση να απαντήσουμε στο ερώτημα που διατυπώσαμε προηγουμένως. Δηλαδή, αν, δεδομένης μίας συνάρτησης f και ενός a στο πεδίο ορισμού της, μπορούμε να αποφασίσουμε αν υπάρχει σειρά Taylor της συνάρτησης στο a και (αν υπάρχει) να την βρούμε.

Πρόταση 2.13. Έστω διάστημα I , το οποίο έχει μέσο a και δεν αποτελείται μόνο από το a , και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I . Τότε για κάθε $x \in I$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x, a; f),$$

όπου $R_n(x, a; f)$ είναι σφάλμα τάξης n τύπου Lagrange ή ολοκληρωτικού τύπου.

Αν $R_n(x, a; f) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in I$, τότε η σειρά Taylor της f στο a είναι η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$, δηλαδή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad \text{για } x \in I.$$

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος είναι άμεση συνέπεια των δύο θεωρημάτων του Taylor (Θεωρήματα 2.7 και 2.8). Το δεύτερο μέρος είναι προφανές: αν $R_n(x; a; f) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in I$ τότε συνεπάγεται

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \rightarrow f(x),$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

□

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$ βαθμού N και ένα οποιοδήποτε a . Για κάθε x και κάθε $n \geq N$ έχουμε προφανώς ότι $p^{(n+1)}(x) = 0$, άρα το σφάλμα τάξης n τύπου Lagrange είναι:

$$R_n(x; a; p) = \frac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = 0 \rightarrow 0.$$

Άρα η σειρά Taylor του πολυωνύμου $p(x)$ στο a είναι η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = p(a) + p'(a)(x-a) + \cdots + \frac{p^{(N)}(a)}{N!} (x-a)^N$. Δηλαδή

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \cdots + \frac{p^{(N)}(a)}{N!} (x-a)^N \quad \text{για κάθε } x.$$

Η παράσταση αυτή είναι το λεγόμενο *ανάπτυγμα πολυωνύμου σε δυνάμεις του $x-a$* .

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$ που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και $\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$ για κάθε x και για κάθε n . Ειδικότερα, $\frac{d^n e^x}{dx^n} \Big|_{x=0} = 1$ για κάθε n , άρα η πιθανή σειρά Taylor της e^x στο 0 είναι η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Παίρνουμε $a = 0$ και υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου Lagrange:

$$R_n(x; 0; f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} = e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

όπου ξ αριθμός ανάμεσα στα 0 και x .

Αν $x \geq 0$, τότε $0 \leq \xi \leq x$, οπότε

$$|R_n(x; 0; f)| = e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

(βλ. τον τύπο (6) της Ενότητας 1.3).

Αν $x \leq 0$, τότε $x \leq \xi \leq 0$, οπότε

$$|R_n(x; 0; f)| = e^\xi \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^0 \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0.$$

Άρα $R_n(x; 0; f) \rightarrow 0$ για κάθε x , επομένως η σειρά Taylor της e^x στο 0 είναι η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Δηλαδή

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

(Στο Παράδειγμα 4 της Ενότητας 2.4 αποδείξαμε τον ίδιο τύπο με διαφορετικό τρόπο.)

Παράδειγμα 3. Στο παράδειγμα αυτό θα υπολογίσουμε τις σειρές Taylor των $\cos x$ και $\sin x$. Η συνάρτηση $\cos x$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και

$$\frac{d^n \cos x}{dx^n} = \pm \cos x \text{ ή } \pm \sin x.$$

Συγκεκριμένα,

$$\left. \frac{d^n \cos x}{dx^n} \right|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{αν } n \text{ άρτιος,} \\ 0 & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Άρα η πιθανή σειρά Taylor της $\cos x$ στο 0 είναι η

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Παίρνουμε $a = 0$ και υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου Lagrange:

$$R_n(x; 0; \cos x) = \frac{\pm \cos \xi}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ ή } \frac{\pm \sin \xi}{(n+1)!} x^{n+1},$$

όπου ξ αριθμός ανάμεσα στα 0 και x . Άρα, σε κάθε περίπτωση, επειδή $|\pm \cos \xi| \leq 1$ και $|\pm \sin \xi| \leq 1$, έχουμε

$$|R_n(x; 0; \cos x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{για κάθε } x.$$

Άρα η σειρά Taylor της $\cos x$ στο 0 είναι η $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Δηλαδή

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

Εντελώς ανάλογα υπολογίζουμε και τη σειρά Taylor της $\sin x$ στο 0:

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

Παράδειγμα 4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με παραγώγους

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \quad \text{για κάθε } n \geq 1 \text{ και κάθε } x \in (-\infty, 1).$$

Ειδικότερα, $\frac{d^n}{dx^n} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right) \Big|_{x=0} = (n-1)!$ για $n \geq 1$, και επομένως η πιθανή σειρά Taylor της $\ln \frac{1}{1-x}$ στο 0 είναι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

Παίρνουμε $a = 0$ και υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου Lagrange:

$$R_n(x; 0; \ln \frac{1}{1-x}) = \frac{n!}{(1-\xi)^{n+1}(n+1)!} x^{n+1} = \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}(n+1)} x^{n+1},$$

όπου ξ αριθμός ανάμεσα στα 0 και x .

Αν $-1 \leq x \leq 0$, τότε $-1 \leq x \leq \xi \leq 0$ οπότε

$$\left| R_n(x; 0; \ln \frac{1}{1-x}) \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(1-\xi)^{n+1}(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Το σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου είναι

$$R_n(x; 0; \ln \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{n!}{(1-t)^{n+1}} (x-t)^n dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt.$$

Αν $0 \leq x < 1$, τότε για κάθε $t \in [0, x]$ ισχύει $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$ και άρα $0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \leq x^n$. Επομένως

$$\left| R_n(x; 0; \ln \frac{1}{1-x}) \right| = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \leq x^n \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = x^n \ln \frac{1}{1-x} \rightarrow 0.$$

Άρα η σειρά Taylor της $\ln \frac{1}{1-x}$ στο 0 είναι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$. Δηλαδή

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{για } -1 \leq x < 1.$$

Η σειρά αυτή ονομάζεται *λογαριθμική δυναμοσειρά*.

Αν αντικαταστήσουμε το x με το $-x$ βρίσκουμε τον παρόμοιο τύπο:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{για } -1 < x \leq 1.$$

Ομοίως, αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία το x με το $x-1$ βρίσκουμε

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \quad \text{για } 0 < x \leq 2.$$

Ειδική περίπτωση αυτών των ισοδύναμων ισοτήτων είναι ο τύπος

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} + \dots$$

Παράδειγμα 5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\arctan x$ η οποία έχει παράγωγο $\frac{1}{1+x^2}$ αλλά ο υπολογισμός των παραγώγων ανώτερης τάξης είναι περίπλοκος, οπότε δεν είναι εύκολο να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.13. Για τον λόγο αυτό καταφεύγουμε στο ακόλουθο τέχνασμα. Καταρχάς, εφαρμόζουμε τη γνωστή ταυτότητα $1 - a^n = (1 - a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$ για $a = -t^2$ και βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{1 - (-t^2)^n}{1 + t^2} &= 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1 + t^2} &= 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt &= \int_0^x 1 dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt - \dots + (-1)^{n-1} \int_0^x t^{2n-2} dt \\ &\quad + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1 + t^2} dt.$$

Αν $|x| \leq 1$ τότε

$$\left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1 + t^2} dt \right| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1 + t^2} dt \leq \int_0^{|x|} t^{2n} dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0,$$

οπότε $(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1 + t^2} dt \rightarrow 0$. Άρα

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \rightarrow \arctan x \quad \text{για κάθε } -1 \leq x \leq 1.$$

Συνεπώς

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{για κάθε } -1 \leq x \leq 1.$$

Παίρνοντας $x = 1$, επειδή $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, προκύπτει η ενδιαφέρουσα ισότητα:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Ασκήσεις

1. Βρείτε τον τύπο για τον n -οστό όρο των ακολουθιών:

$$(i) \quad -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

$$(iii) \quad -1, 4, -9, 16, -25, \dots$$

$$(ii) \quad 1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$$

$$(iv) \quad 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$$

2. Χρησιμοποιήστε τους τύπους της Ενότητας 1.3 για να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών με τύπους:

$$(i) \quad a_n = \frac{\ln n^2}{n}$$

$$(iv) \quad a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$(ii) \quad a_n = \sqrt[n]{n^4}$$

$$(v) \quad a_n = \left(\frac{n-7}{n}\right)^n$$

$$(iii) \quad a_n = \sqrt[n]{5n}$$

$$(vi) \quad a_n = \frac{10^n}{n!}$$

3. Ποιές από τις παρακάτω ακολουθίες συγκλίνουν και ποιές αποκλίνουν; Υπολογίστε το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας,

$$(i) \quad a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$$

$$(v) \quad a_n = n\pi \cos(n\pi)$$

$$(ii) \quad a_n = \frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$$

$$(vi) \quad a_n = \frac{\sin^2 n}{2^n}$$

$$(iii) \quad a_n = 1 + (-1)^n$$

$$(vii) \quad a_n = \sqrt[n]{4^n n}$$

$$(iv) \quad a_n = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \left(3 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$(viii) \quad a_n = n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

4. Υποθέστε ότι οι παρακάτω ακολουθίες συγκλίνουν και βρείτε το όριό τους.

$$(\alpha') \quad a_1 = 0, a_{n+1} = \sqrt{8 + 2a_n}.$$

$$(\beta') \quad 2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}, 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \dots$$

$$(\gamma') \quad \sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$$

5. Ελέγξτε αν οι παρακάτω ακολουθίες είναι μονότονες και αν είναι φραγμένες.

$$(i) \quad a_n = \frac{3n+1}{n+1}$$

$$(ii) \quad a_n = \frac{2^n 3^n}{n!}$$

6. Για μια ακολουθία (a_n) συμβολίζουμε τους όρους με άρτιο δείκτη με a_{2k} και τους όρους με περιττό δείκτη με a_{2k+1} . Αποδείξτε ότι αν $a_{2k} \rightarrow l$ και $a_{2k+1} \rightarrow l$, τότε $a_n \rightarrow l$.

7. Βρείτε έναν τύπο για το n -οστό μερικό άθροισμα καθεμιάς από τις παρακάτω σειρές και χρησιμοποιήστε τον για να βρείτε το άθροισμα της σειράς σε περίπτωση σύγκλισης.

$$(\alpha') \quad 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$$

$$(\beta') \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

$$(\gamma') \quad \frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{5}{n(n+1)} + \cdots$$

8. Εκφράστε τον περιοδικό δεκαδικό $0.\overline{06} = 0.0666 \dots$ ως λόγο δύο ακεραίων.

9. Προσδιορίστε για καθεμία από τις παρακάτω γεωμετρικές σειρές αν συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν συγκλίνει, βρείτε το άθροισμά της.

$$(\alpha') \quad 1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \cdots$$

$$(\beta') \quad 1 + (-3) + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4 + \cdots$$

$$(\gamma') \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^4 + \left(-\frac{2}{3}\right)^5 + \cdots$$

10. Βρείτε έναν τύπο για το n -οστό μερικό άθροισμα καθεμιάς από τις παρακάτω σειρές και χρησιμοποιήστε τον για να βρείτε το άθροισμα της σειράς σε περίπτωση σύγκλισης.

$$(\alpha') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2} \right)$$

$$(\beta') \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3})$$

11. Προσδιορίστε για καθεμία από τις παρακάτω σειρές αν συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν συγκλίνει, βρείτε το άθροισμά της.

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n}$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{3^n}$$

$$(iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$$

$$(iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$(v) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$(vi) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$$

12. Βρείτε την τιμή του a για την οποία

$$1 + e^a + e^{2a} + e^{3a} + \cdots = 9.$$

13. Για ποιές τιμές του r η σειρά

$$1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + \dots$$

συγκλίνει; Βρείτε το άθροισμά της όταν συγκλίνει.

14. Ελέγξτε τη σύγκλιση των ακόλουθων σειρών με το κριτήριο του ολοκληρώματος. (Βεβαιωθείτε ότι σε κάθε περίπτωση πληρούνται οι προϋποθέσεις του.)

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ \text{(ii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(iii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4} \\ \text{(iv)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n^2}{n} \end{array}$$

15. Ελέγξτε τη σύγκλιση των ακόλουθων σειρών με το κριτήριο σύγκρισης (Πρόταση 2.6).

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 30} \\ \text{(ii)} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(iii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}} \\ \text{(iv)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n^2 + 3}} \end{array}$$

16. Ελέγξτε τη σύγκλιση των ακόλουθων σειρών με το κριτήριο του λόγου.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2}{3^n} \\ \text{(ii)} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n - 1)!}{(n + 1)^2} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(iii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n} \\ \text{(iv)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n} \end{array}$$

17. Ελέγξτε τη σύγκλιση των ακόλουθων σειρών με το κριτήριο της ρίζας.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n + 5)^n} \\ \text{(ii)} & \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4n + 3}{3n - 5} \right)^n \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(iii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ \text{(iv)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2} \end{array}$$

18. Ελέγξτε τη σύγκλιση των ακόλουθων σειρών.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{3/2}} \\ \text{(ii)} & \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{(\ln n)^2} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(iii)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4} \\ \text{(iv)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{10^n}{(n + 1)!} \end{array}$$

19. Βρείτε την ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των ακόλουθων δυναμοσειρών.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$$

20. Η σειρά $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$, συγκλίνει στην e^x για κάθε x .

- (α') Βρείτε μια δυναμοσειρά για την $\frac{d}{dx}e^x$. Παίρνετε τη δυναμοσειρά για την e^x ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- (β') Βρείτε μια δυναμοσειρά για την $\int e^x dx$. Παίρνετε τη δυναμοσειρά για την e^x ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- (γ') Βρείτε μια δυναμοσειρά που να συγκλίνει στην e^{-x} για κάθε x .

Σημείωση: Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό. Κάποια από τα σχήματα του κεφαλαίου αυτού έχουν παρθεί από τα βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- Μιχ. Παπαδημητράκης, Απειροστικός Λογισμός: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής, Σημειώσεις Παραδόσεων, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.
- J. Stewart, Calculus, 6th ed., Thomson Brooks/Cole, 2008.
- M.D. Weir, J., G.B. Thomas, Thomas' Calculus, Addison-Wesley, 2010.