

Ολοκληρώματα Riemann

Δημήτρης Μητσούδης

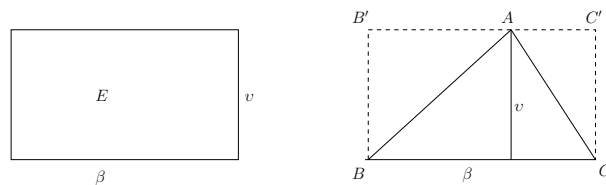
Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών
Σχολή Μηχανικών



Νοέμβριος 2018

1 Εμβαδό

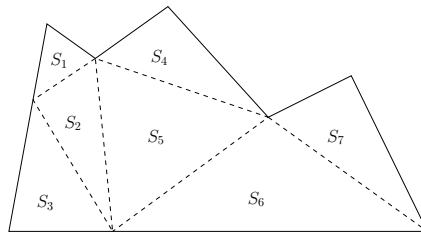
Το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού οποιασδήποτε επιφάνειας είναι γνωστό από την αρχαιότητα. Οι πιο απλές επιφάνειες από αυτή την άποψη είναι οι επίπεδες επιφάνειες. Σίγουρα είναι πολύ εύκολο να υπολογίσουμε το εμβαδό ορθογωνίων και τριγώνων από τους γνωστούς τύπους υπολογισμού. Για το ορθογώνιο: εμβαδό = βάση $\times$ ύψος ($E = \beta \cdot \upsilon$), ενώ για το τρίγωνο $E = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon$, βλ. Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Εμβαδό ορθογωνίου και εμβαδό τριγώνου.

Το ίδιο εύκολο είναι να υπολογίσουμε εμβαδά επιφανειών που έχουν πολυγωνικό σχήμα, αφού μπορούμε με κατάλληλες ευθείες να τις χωρίσουμε σε τριγωνικές ή παραλληλόγραμμες επιφάνειες, και στη συνέχεια να αθροίσουμε τα εμβαδά των επιμέρους σχημάτων, βλ. Σχήμα 2.

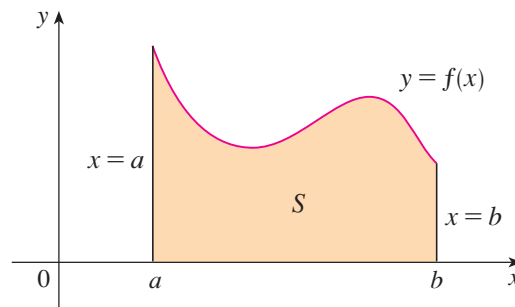
Πώς όμως υπολογίζουμε το εμβαδό μιας επίπεδης επιφάνειας με καμπυλόγραμμο σύνορο (περίγραμμα), όπως π.χ., ενός δίσκου, ενός κυκλικού τομέα, παραβολικών ή υπερβολικών χωρίων κλπ. Η ιδέα είναι να προσεγγίσουμε το εμβαδό τέτοιων καμπυλόγραμμων σχημάτων από κατάλληλα πολυγωνικά σχήματα. Συγκεκριμένα, θα περιγράψουμε μια από τις παραλλαγές



Σχήμα 2: Εμβαδό πολυγωνικού χωρίου.

αυτής της μεθόδου. Με τη βοήθεια κατάλληλων οριζόντιων και κατακόρυφων ευθειών χωρίζουμε την επιφάνεια, το εμβαδό της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε, σε μικρότερες «στοιχειώδεις επιφάνειες» το σύνολο καθεμιάς από τις οποίες αποτελείται από τέσσερις πλευρές: Κάτω από ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα, δυο άλλα ευθύγραμμα τμήματα κάθετα προς το προηγούμενο στα άκρα του, καθώς και πάνω από μια καμπυλόγραμμη πλευρά. Κάθε άλλη «στοιχειώδης επιφάνεια» προκύπτει από μια τέτοια είτε με στροφή κατά ορθή γωνία, είτε με ανάκλαση ως προς την πλευρά που είναι απέναντι στην καμπυλόγραμμη πλευρά.

Έτσι, επιλέγουμε ένα κατάλληλο σύστημα αξόνων, ώστε η κάτω βάση της «στοιχειώδους επιφάνειας να είναι κάποιο διάστημα $[a, b]$ πάνω στον x -άξονα, η πάνω πλευρά να είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $y = f(x)$ για $a \leq x \leq b$, και οι δυο άλλες πλευρές να είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(a, 0)$ και $(a, f(a))$ και το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(b, 0)$ και $(b, f(b))$, βλ. Σχήμα 3. Φυσικά, ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.



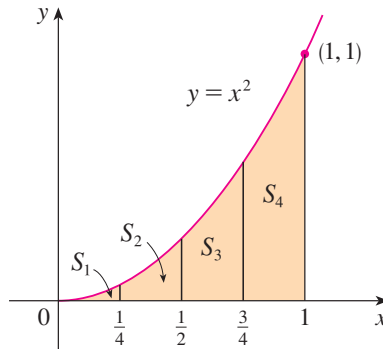
Σχήμα 3: Εμβαδό καμπυλόγραμμου χωρίου S .

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη μέθοδο υπολογισμού του εμβαδού μιας τέτοιας «στοιχειώδους επιφάνειας», όπου θεωρούμε δοσμένο το διάστημα $[a, b]$, και τη συνάρτηση $y = f(x)$ για την οποία υποθέτουμε ότι είναι συνεχής. Θα συμβολίζουμε με A το εμβαδό του S , και θα ξεκινήσουμε με το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα. Θέλουμε να εκτιμήσουμε το εμβαδό του παραβολικού χωρίου που ορίζουν η παραβολή $y = x^2$ μεταξύ των $x = 0$ και $x = 1$, και ο x άξονας.

Καταρχήν παρατηρούμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας S θα πρέπει να είναι ένας αριθμός

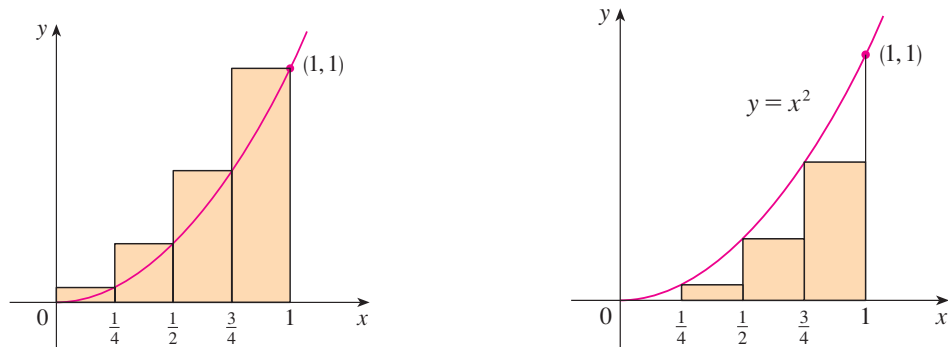
μεταξύ 0 και 1, αφού το S σίγουρα περιέχεται σε ένα τετράγωνο πλευράς 1. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια καλύτερη εκτίμηση από αυτή. Για το σκοπό αυτό χωρίζουμε το διάστημα $[0, 1]$ σε 4 ίσα υποδιαστήματα, και φέρνουμε τις κατακόρυφες ευθείες $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$ που χωρίζουν το S σε 4 μέρη S_1 , S_2 , S_3 και S_4 , βλ. Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Εμβαδό παραβολικού χωρίου S .

Στη συνέχεια, προσεγγίζουμε κάθε S_i , $i = 1, 2, 3, 4$ από ένα ορθογώνιο με βάση ίδια με τη βάση του S_i και ύψος ίσο με τη δεξιά πλευρά του S_i , βλ. Σχήμα 5, αριστερά. Κάθε ορθογώνιο έχει βάση $\frac{1}{4}$, ενώ τα αντίστοιχα ύψη είναι $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$, 1^2 . Αν συμβολίσουμε με R_4 το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων αυτών ορθογωνίων, τότε

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32}.$$



Σχήμα 5: Προσέγγιση του παραβολικού χωρίου S με τέσσερα ορθογώνια.

Ανάλογα, ας προσεγγίσουμε κάθε S_i , $i = 1, 2, 3, 4$ από ένα ορθογώνιο με βάση ίδια με τη βάση του S_i και ύψος ίσο με την αριστερή πλευρά του S_i , βλ. Σχήμα 5, δεξιά. Κάθε παραλληλόγραμμο έχει βάση $\frac{1}{4}$, ενώ τα αντίστοιχα ύψη είναι 0 , $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$. Αν συμβολίσουμε

με L_4 το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών, τότε

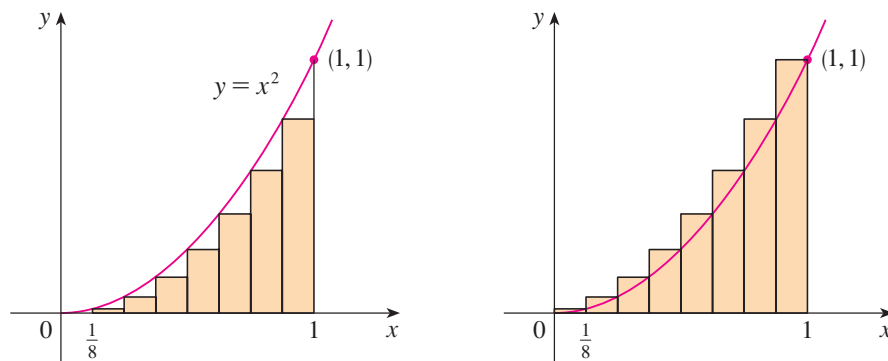
$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32}.$$

Άρα βρήκαμε την ακόλουθη εκτίμηση

$$0.21875 = \frac{7}{32} \leq A \leq \frac{15}{32} = 0.46875$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία διπλασιάζοντας το πλήθος των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίζουμε το $[0, 1]$, βλ. Σχήμα 6, και βρίσκουμε ότι

$$0.2734375 \leq A \leq 0.3984375.$$



Σχήμα 6: Προσέγγιση του παραβολικού χωρίου S με οκτώ ορθογώνια.

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται οι τιμές του κάτω φράγματος L_n και του άνω φράγματος R_n για το εμβαδό A καθώς το πλήθος n των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίζουμε το $[0, 1]$ αυξάνει.

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Παρατηρήστε ότι για $n = 1000$ υποδιαστήματα, βρίσκουμε ότι η τιμή του εμβαδού βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 0.3328335 και 0.3338335 ενώ η ακριβής τιμή, όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι $\frac{1}{3} = 0.333 \dots$ □

2 Το ολοκλήρωμα Riemann

Θα εφαρμόσουμε τώρα αυτή την ιδέα σε ένα γενικό χωρίο. Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε αρκετά μικρά διαδοχικά υποδιαστήματα με τη βοήθεια μιας επιλογής διαδοχικών σημείων

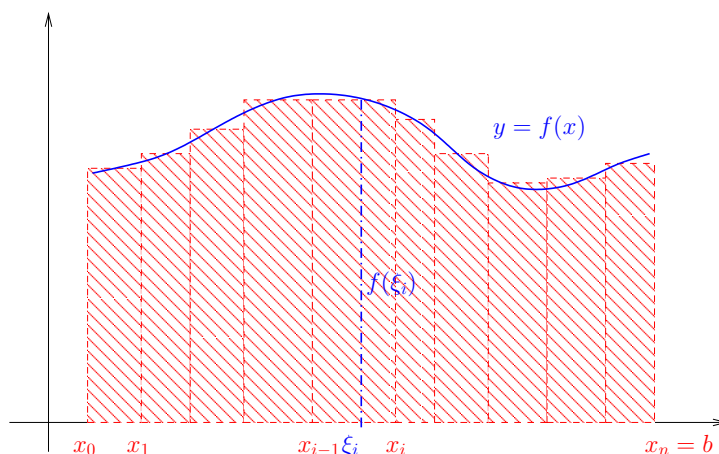
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Τα διαδοχικά υποδιαστήματα είναι, επομένως, τα

$$\underbrace{[a, x_1]}_{\text{πρώτο}} = [x_0, x_1], \quad \underbrace{[x_1, x_2]}_{\text{δεύτερο}}, \quad \dots, \quad \underbrace{[x_{i-1}, x_i]}_{i\text{-οστό}}, \quad \dots, \quad \underbrace{[x_{n-1}, x_n]}_{n\text{-οστό}} = [x_{n-1}, b].$$

Τα σημεία $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ ονομάζονται **διαιρετικά σημεία**, και το σύνολό τους $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ ονομάζεται **διαμέριση** του διαστήματος $[a, b]$. Γενικά, το i -οστό διάστημα ($1 \leq i \leq n$) είναι το $[x_{i-1}, x_i]$.

Γενικά, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις του διαστήματος $[a, b]$, διότι α) υπάρχουν άπειρες επιλογές του πλήθους n των υποδιαστημάτων που ορίζονται από τη διαμέριση και, β) για κάθε $n \geq 2$ υπάρχουν άπειρες επιλογές διαιρετικών σημείων $x_1, \dots, x_{n-1}$.



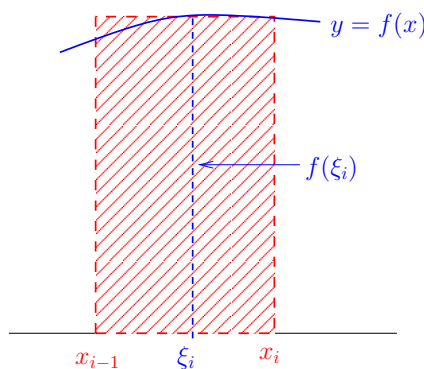
Σχήμα 7: Χωρισμός σε κατακόρυφες στοιχειώδεις επιφάνειες.

Αφού επιλέξουμε οποιαδήποτε διαμέριση Δ του $[a, b]$, παρατηρούμε ότι το εμβαδό της αρχικής επιφάνειας είναι το άθροισμα των εμβαδών των n διαδοχικών «στοιχειωδών επιφανειών», από τις οποίες η i -οστή έχει ως κάτω βάση το διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ και ως άνω βάση το γράφημα της $y = f(x)$ για $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. Ας ονομάσουμε την επιφάνεια αυτή S_i και το εμβαδό της A_i . Επομένως

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Βεβαίως, το πρόβλημα υπολογισμού των εμβαδών των επιφανειών $S_1, \dots, S_n$ παραμένει, διότι όλες είναι, εν γένει, καμπυλόγραμμες. Επειδή όμως το διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ είναι μικρό, η

μεταβολή του ύψους της $y = f(x)$ δεν είναι πολύ μεγάλη όταν το x μεταβάλλεται από x_{i-1} έως x_i . Άρα, αν πάρουμε οποιοδήποτε **ενδιάμεσο** σημείο ξ_i στο $[x_{i-1}, x_i]$, τότε οι τιμές του $f(x)$ στο $[x_{i-1}, x_i]$ είναι περίπου ίσες με τον $f(\xi_i)$, οπότε η επιφάνεια S_i είναι περίπου ίδια με το ορθογώνιο που έχει κάτω πλευρά το διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ και ύψος ίσο με $f(\xi_i)$, βλ. Σχήμα 8.



Σχήμα 8:

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι περίπου ίσο με

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \quad (1)$$

Το άθροισμα στο δεξί μέλος της (1) λέγεται **άθροισμα Riemann** της $y = f(x)$, που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη διαμέριση Δ και στη συγκεκριμένη επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Ορισμός 2.1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υπάρχει αριθμός A τον οποίο προσεγγίζουν απεριόριστα τα αθροίσματα Riemann της συνάρτησης καθώς το πλήθος των σημείων της διαμέρισης αυξάνει και καθώς τα μήκη των διαστημάτων μικραίνουν, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Ο αριθμός A λέγεται (ορισμένο) ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$ και τον συμβολίζουμε

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι μια συνάρτηση $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, είναι ολοκληρώσιμη, τότε μπορούμε να βρούμε το $\int_a^b f(x) dx$ επιλέγοντας κατάλληλες διαμερίσεις και κατάλληλα ενδιάμεσα σημεία. Συνήθως επιλέγουμε διαμερίσεις του $[a, b]$ σε διαστήματα ίσου μήκους, δηλαδή αν n είναι το πλήθος των διαστημάτων, τότε το μήκος του κάθε διαστήματος είναι

$$h = \frac{b - a}{n},$$

και τα διαιρετικά σημεία της διαμέρισης είναι τα

$$x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_i = a + ih, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)h, x_n = a + nh = b.$$

Επίσης, ως ενδιάμεσα σημεία ξ_i επιλέγουμε συχνά (αλλά όχι πάντα) το αριστερό άκρο $\xi_i = x_{i-1}$, το δεξί άκρο $\xi_i = x_i$, ή το μέσο $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει ότι μια ολόκληρη κατηγορία συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμες.

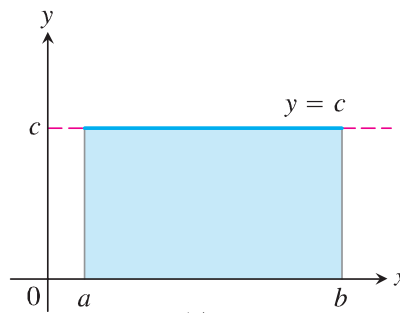
Θεώρημα 2.1. • Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

• Επίσης, αν η $y = f(x)$ είναι μονότονη στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

2.1 Παραδείγματα υπολογισμού ολοκληρωμάτων Riemann

Παράδειγμα 1. Δείξτε ότι για τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \geq 0$, ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ έχουμε

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a).$$



Σχήμα 9: $\int_a^b c \, dx = c(b - a)$.

Παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ και οποιοδήποτε σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ και υπολογίζουμε το άθροισμα Riemann

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) \\ &= [c(x_1 - x_0) + c(x_2 - x_1) + c(x_3 - x_2) + \dots + c(x_{n-1} - x_{n-2}) + c(x_n - x_{n-1})] \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(x_n - x_0) = c(b - a). \end{aligned}$$

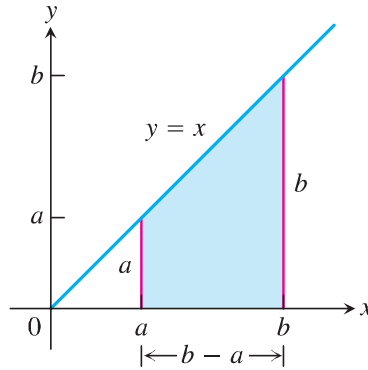
Άρα όλα τα αθροίσματα Riemann είναι ίσα με $c(b - a)$, οπότε προσεγγίζουν όσο κοντά θέλουμε το εμβαδόν A καθώς τα μήκη των διαστημάτων μικραίνουν, επομένως

$$A = c(b - a),$$

και, φυσικά, το αποτέλεσμα αυτό είναι ήδη γνωστό, βλ. Σχήμα 9. □

Παράδειγμα 2. Δείξτε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x$, ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ ($0 \leq a \leq b$) έχουμε

$$\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$



Σχήμα 10: $\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

Παίρνουμε μια διαμέριση του $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα ίσου μήκους. Άρα το μήκος του κάθε υποδιαστήματος είναι

$$h = \frac{b - a}{n},$$

και τα διαιρετικά σημεία της διαμέρισης είναι τα

$$x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_i = a + ih, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)h, x_n = a + nh = b.$$

Επιλέγουμε ως ενδιαμέσες σημεία ξ_i τα δεξιά άκρα $\xi_i = x_i$ των διαστημάτων $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Τότε το άθροισμα Riemann είναι

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=h} \\ &= \sum_{i=1}^n (a + ih) h = n a h + h^2 \sum_{i=1}^n i = n a h + h^2(1 + 2 + \dots + n). \end{aligned} \quad (2)$$

Υπενθυμίζουμε ότι $h = \frac{b-a}{n}$, και δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσετε ότι

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις αυτές στην (2) και έχουμε ότι το άθροισμα Riemann είναι ίσο με

$$\begin{aligned} n a \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \left(\frac{n^2+n}{n^2} \right) \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} + \underbrace{\frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{1}{n}}_{\rightarrow 0, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \\ &= (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right) = \frac{1}{2}(b-a)(b+a) = \frac{b^2-a^2}{2}. \end{aligned}$$

Και πάλι το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο αφού θα βρούμε το ίδιο αν υπολογίσουμε το εμβαδό του τραπεζίου του Σχήματος 10. □

3 Ιδιότητες ολοκληρωμάτων Riemann

Στις ακόλουθες προτάσεις διατυπώνουμε (χωρίς απόδειξη) ορισμένες ιδιότητες και αλγεβρικές πράξεις ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 3.1. Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, και λ είναι οποιοσδήποτε αριθμός. Τότε

$$(1) \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

(3) η $y = \lambda f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

(4) η $y = f(x) + g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(5) η $y = f(x)g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, αλλά **δεν** υπάρχει τύπος που να συνδέει το $\int_a^b (f(x)g(x)) dx$ με τα $\int_a^b f(x) dx$ και $\int_a^b g(x) dx$.

Πρόταση 3.2. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στα $[a, b]$ και $[b, c]$. Τότε η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Η επόμενη πρόταση αφορά σύγκριση ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 3.3. Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, και ότι ισχύει $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$. Τότε

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Πρόταση 3.4. (1) Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και u είναι ένα άνω φράγμα της $y = f(x)$ στο $[a, b]$, δηλ. $f(x) \leq u, \forall x \in [a, b]$, τότε

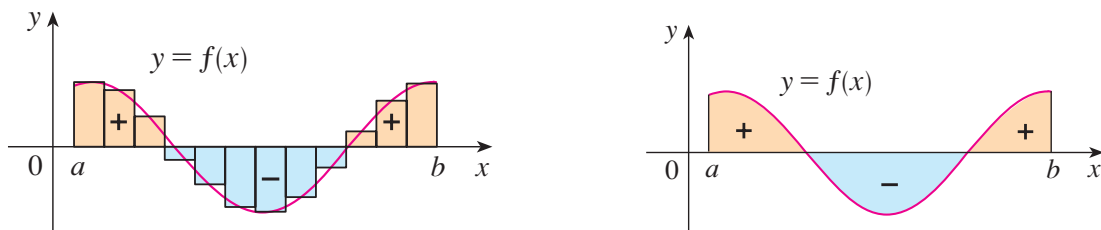
$$\int_a^b f(x) dx \leq (b - a)u.$$

(2) Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και l είναι ένα κάτω φράγμα της $y = f(x)$ στο $[a, b]$, δηλ. $f(x) \geq l, \forall x \in [a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx \geq (b - a)l.$$

Πρόταση 3.5. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε και η $y = |f(x)|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$



Σχήμα 11: $\int_a^b f(x) dx$ για συναρτήσεις $y = f(x)$ που παίρνουν και αρνητικές τιμές.

Παρατήρηση: Αν η f παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές, βλ. Σχήμα 11, τότε το άθροισμα Riemann είναι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται πάνω από τον x άξονα και των αντίθετων των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται κάτω από τον x άξονα (δηλαδή τα εμβαδά των ορθογωνίων που απεικονίζονται με μπλε χρώμα στο αριστερό μέρος του Σχήματος 11 μείον τα εμβαδά των ορθογωνίων που απεικονίζονται με γαλάζιο χρώμα). Άρα, γενικά, το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης ορίζεται ως η διαφορά των εμβαδών

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2,$$

όπου A_1 είναι το εμβαδό των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον x άξονα, και A_2 είναι το εμβαδό των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον x άξονα, βλ. Σχήμα 11, δεξιά.

3.1 Μέση τιμή συνάρτησης

Είναι γνωστό, και απλό, να υπολογίσουμε τη μέση τιμή ενός πεπερασμένου πλήθους αριθμών $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$\text{Μέση τιμή: } \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Υπάρχει μια ανάλογη έννοια μέσης τιμής για συναρτήσεις. Έστω $y = f(x)$ ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και επιλέγουμε μια διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{b-a}{n}$, και οποιοδήποτε σύνολο $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Θεωρούμε και τις αντίστοιχες τιμές $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ της συνάρτησης σε όλα τα ενδιάμεσα σημεία. Αν το h είναι αρκετά μικρό, δηλαδή αν κάθε υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ είναι αρκετά μικρό, τότε τα σημεία x κάθε τέτοιου υποδιαστήματος είναι πολύ κοντά στο αντίστοιχο ξ_i , οπότε είναι εύλογο να δεχτούμε ότι κάθε τιμή $f(\xi_i)$ «εκπροσωπεί» τις τιμές $f(x)$ για $x \in [x_{i-1}, x_i]$ και, επομένως, οι τιμές $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ «εκπροσωπούν» όλες τις τιμές της συνάρτησης.

Επομένως, αν θέλουμε να εισαγάγουμε την έννοια της μέσης τιμής όλων των τιμών της $y = f(x)$, μια καλή ιδέα είναι να θεωρήσουμε τη μέση τιμή

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n},$$

και να δούμε μήπως αυτή η μέση τιμή πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά κάποιον αριθμό αν το h γίνει αρκετά μικρό. Όμως,

$$\begin{aligned} \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n} &= \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{\frac{b-a}{h}} \\ &= \frac{1}{b-a} [f(\xi_1)h + f(\xi_2)h + \dots + f(\xi_n)h] = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)h. \end{aligned}$$

Αν παίρνουμε ολοένα και μεγαλύτερες τιμές του n , θα υπολογίζουμε τη μέση τιμή ενός μεγάλου αριθμού τιμών που βρίσκονται η μία πολύ κοντά στην άλλη. Η οριακή τιμή θα είναι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)h = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Όταν, λοιπόν, η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, ορίζουμε **τη μέση τιμή της f στο $[a, b]$** ως

$$\text{Μέση τιμή της } f \text{ στο } [a, b] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

Παρατηρήστε ότι αν η μέση τιμή της $y = f(x)$ στο $[a, b]$ είναι ο αριθμός ρ , τότε

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)\rho = \int_a^b \rho dx.$$

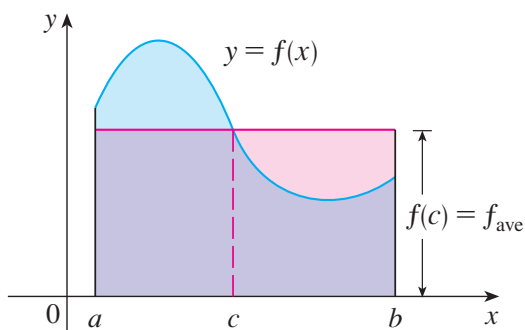
Επομένως, βλέπουμε ότι:

Η μέση τιμή της $y = f(x)$ στο $[a, b]$ είναι εκείνη η τιμή που οφείλει να έχει μια **σταθερή** συνάρτηση στο $[a, b]$ ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα της $y = f(x)$.

Επιπλέον, αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ μπορεί να αποδειχθεί το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1 (Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού). Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$. Τότε υπάρχει κάποιος c στο $[a, b]$ ώστε

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$



Σχήμα 12: Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού είναι, ότι για θετικές συνεχείς συναρτήσεις f , υπάρχει ένας αριθμός c τέτοιος ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση $[a, b]$ και ύψος $f(c)$ να είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που καθορίζεται από το γράφημα της f μεταξύ των $x = a$ και $x = b$, και του άξονα των x , βλ. Σχήμα 12.

4 Αόριστα ολοκληρώματα Riemann

4.1 Αντιπαράγωγοι και αόριστα ολοκληρώματα

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα I . Αν μια άλλη συνάρτηση $y = F(x)$, ορισμένη στο ίδιο διάστημα I , έχει την ιδιότητα

$$F'(x) = f(x) \quad (x \text{ στο } I),$$

τότε η $y = F(x)$ ονομάζεται **αντιπαράγωγος** ή παράγουσα ή πρωτεύουσα συνάρτηση ή αρχική συνάρτηση της $y = f(x)$ στο διάστημα I .

Παραδείγματα.

- Αν $f(x) = \cos x$, τότε η $F(x) = \sin x$ είναι αντιπαράγωγος της f στο $\mathbb{R}$, αφού $(\sin x)' = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Αν $f(x) = 2x$, τότε η $F(x) = x^2$ είναι αντιπαράγωγος της f στο $\mathbb{R}$.
- Αν $f(x) = 1/x$, τότε η $F(x) = \ln |x|$ είναι αντιπαράγωγος της f στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Αν $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, τότε η $F(x) = \arctan x$ είναι αντιπαράγωγος της f στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 4.1. Έστω ότι η $y = F(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $y = f(x)$ στο διάστημα I . Τότε το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της $y = f(x)$ στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις της μορφής $y = F(x) + c$, όπου c είναι οποιοσδήποτε σταθερός αριθμός (δηλαδή ανεξάρτητος του x), και από καμιά άλλη συνάρτηση.

Με άλλα λόγια, δύο οποιοσδήποτε αντιπαράγωγοι της f διαφέρουν κατά μια σταθερά.

Ορισμός 4.1. Το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f λέγεται *αόριστο ολοκλήρωμα της f* και συμβολίζεται

$$\int f(x) dx.$$

Παραδείγματα.

- $\int \cos x dx = \sin x + C.$
- $\int 2x dx = x^2 + C.$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$

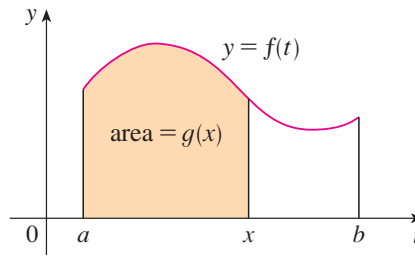
Στη συνέχεια θέλουμε να διατυπώσουμε ένα θεώρημα που είναι το σημαντικότερο αποτέλεσμα του Απειροστικού Λογισμού και συνδέει τις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος.

Αν $y = f(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$, ορίζουμε τη συνάρτηση g από τον τύπο

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (4)$$

Αν η συνάρτηση $y = f(t)$ τυχαίνει να είναι θετική, τότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη $g(x)$ ως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της f και τον άξονα των t , μεταξύ των a και x , και ενώ το x μεταβάλλεται μεταξύ a και b , βλ. Σχήμα 13.

Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε την παράγωγο της συναρτησης $g(x)$ που ορίζεται από την (4). Ας θεωρήσουμε καταρχήν ότι η συνεχής συνάρτηση $y = f(t)$ είναι θετική, δηλ. $f(t) \geq 0$



Σχήμα 13: $g(x) = \int_a^x f(t) dt$.

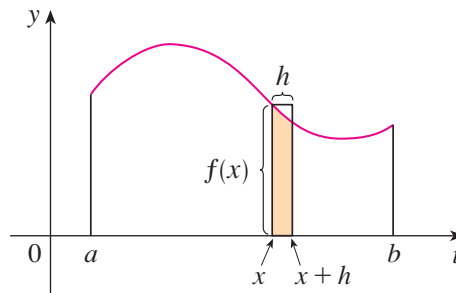
$\forall t \in [a, b]$, βλ. Σχήμα 13, οπότε η $g(x)$ ερμηνεύεται (όπως ήδη είπαμε) ως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της f και τον άξονα των t , μεταξύ των a και x .

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο $g'(x)$ θεωρούμε ένα $h > 0$, και παρατηρούμε ότι η διαφορά $g(x + h) - g(x)$ είναι το εμβαδό του χωρίου που σημειώνεται με μπλε χρώμα στο Σχήμα 14. Αν όμως το h είναι αρκετά μικρό αναμένουμε το εμβαδό αυτού του χωρίου να προσεγγίζει το εμβαδό του ορθογωνίου με βάση h και ύψος $f(x)$. Άρα

$$g(x + h) - g(x) \approx h f(x) \Leftrightarrow \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x).$$

Επομένως, διαισθητικά θα περιμέναμε να ισχύει

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x).$$



Σχήμα 14:

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού που διατυπώνουμε στη συνέχεια εξασφαλίζει ότι το παραπάνω αποτέλεσμα είναι σωστό, ακόμη και αν η συνάρτηση $y = f(x)$ δεν είναι κατ' ανάγκην θετική.

Θεώρημα 4.1 (ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ). Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα I , συνεχής, και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και

φραγμένο υποδιάστημά του. Παίρνουμε οποιοδήποτε a στο I και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Τότε η $y = F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε x στο I .

Το αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να το γράψουμε και ως εξής:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

όπου η f είναι συνεχής. Με άλλα λόγια (και χωρίς να γινόμαστε απόλυτα σαφείς) μπορούμε να πούμε ότι αν, αρχικά, ολοκληρώσουμε την f , και στη συνέχεια παραγωγίσουμε αυτό που θα προκύψει, τότε θα πάρουμε και πάλι την αρχική συνάρτηση f . Δηλαδή, οι πράξεις της παραγωγίσιμης και της ολοκλήρωσης συναρτήσεων είναι, ουσιαστικά, αντίστροφες. Η μια αναιρεί την άλλη.

Η επόμενη πρόταση είναι άμεση συνέπεια του Θεμελιώδους Θεωρήματος και έχει σπουδαία πρακτική σημασία διότι μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ορισμένα ολοκληρώματα χωρίς να μπαίνουμε στη διαδικασία να υπολογίζουμε όρια αθροισμάτων Riemann.

Πρόταση 4.2. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έστω $y = F(x)$ μια αντι-παράγωγος της $y = f(x)$ στο I . Τότε το ολοκλήρωμα της $y = f(x)$ σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[a, b]$ του I είναι ίσο με τη διαφορά των τιμών της $y = F(x)$ στα άκρα του $[a, b]$. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (a, b \text{ στο } I).$$

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μια παρατήρηση. Θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τη διάκριση μεταξύ του ορισμένου και το αόριστου ολοκληρώματος: το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ είναι αριθμός, ενώ το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x) dx$ είναι συνάρτηση (για την ακρίβεια άπειρες συναρτήσεις ταυτόχρονα).

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνουμε τα ολοκληρώματα ορισμένων βασικών συναρτήσεων.

Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων:

$$\int k \, dx = kx + C$$

$$\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C, \quad x \neq k\pi$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C, \quad x \neq 0$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C, \quad -1 < x < 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

5 Τρόποι υπολογισμού ολοκληρωμάτων

5.1 Μέθοδος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής

Πρόταση 5.1. Αν η $z = f(y)$ είναι συνεχής στο διάστημα J , η $y = g(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα I και οι τιμές της $y = g(x)$ περιέχονται στο J , τότε ορίζεται η σύνθεση $z = f(g(x))$ στο I , τότε

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = \int f(y) \, dy \Big|_{y=g(x)} \quad (x \text{ στο } I).$$

Επίσης,

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy \quad (a, b \text{ στο } I).$$

Παραδείγματα.

1. Υπολογίστε το $\int \cos(7x + 3) \, dx$.

Θέτουμε $y = 7x + 3 \Rightarrow dy = (7x + 3)' dx = 7 dx$. Άρα $dx = \frac{1}{7} dy$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int \cos(7x + 3) dx &= \int \cos y \frac{1}{7} dy \Big|_{y=7x+3} = \frac{1}{7} \int \cos y dy \Big|_{y=7x+3} \\ &= \frac{1}{7} \sin y \Big|_{y=7x+3} + C = \frac{1}{7} \sin(7x + 3) + C.\end{aligned}$$

2. Υπολογίστε το $\int x^2 \sin(x^3) dx$.

Θέτουμε $y = x^3 \Rightarrow dy = 3x^2 dx$. Άρα $x^2 dx = \frac{1}{3} dy$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(x^3) dx &= \frac{1}{3} \int \sin y dy \Big|_{y=x^3} = \frac{1}{3} (-\cos y) \Big|_{y=x^3} + C \\ &= -\frac{1}{3} \cos x^3 + C.\end{aligned}$$

3. Υπολογίστε το $\int x \sqrt{2x+1} dx$.

Θέτουμε $y = 2x + 1 \Rightarrow dy = 2 dx$. Άρα $dx = \frac{1}{2} dy$. Επιπλέον, $x = \frac{y-1}{2}$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int x \sqrt{2x+1} dx &= \int \frac{y-1}{2} y^{1/2} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{4} \int (y^{3/2} - y^{1/2}) dy \\ &= \frac{1}{4} \frac{y^{5/2}}{5/2} - \frac{1}{4} \frac{y^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{10} y^{5/2} - \frac{1}{6} y^{3/2} + C \\ &= \frac{1}{10} (2x+1)^{5/2} - \frac{1}{6} (2x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

4. Υπολογίστε το $\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3+1} dx$.

Θέτουμε $y = x^3 + 1 \Rightarrow dy = 3x^2 dx$.

Τώρα για $x = -1$, $y = (-1)^3 + 1 = 0$, ενώ για $x = 1$, $y = 1^3 + 1 = 2$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3+1} dx &= \int_0^2 \sqrt{y} dy = \int_0^2 y^{1/2} dy = \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_0^2 = \frac{2}{3} \left(2^{3/2} - 0^{3/2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{8} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

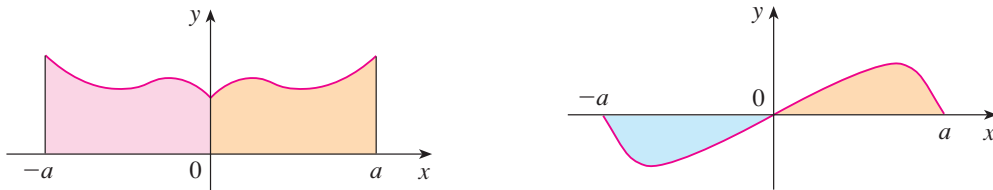
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα συμμετρικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.2. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[-a, a]$.

(1) Αν η f είναι άρτια ($f(-x) = f(x)$), τότε $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

(2) Αν η f είναι περιττή ($f(-x) = -f(x)$), τότε $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Η πρόταση αυτή απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 15. Αριστερά, βλέπουμε το γράφημα μιας θετικής και άρτιας συνάρτησης, οπότε έχουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που καθορίζεται από τη καμπύλη $y = f(x)$ τον άξονα των x και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -a$ και $x = a$ είναι, λόγω συμμετρίας, το διπλάσιο του εμβαδού του χωρίου που περιέχεται μεταξύ των ευθειών $x = 0$ και $x = a$. Αριστερά, όπου η f είναι περιττή, το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που σημειώνεται με μπεζ χρώμα μείον το εμβαδόν του χωρίου που σημειώνεται με γαλάζιο χρώμα. Τα δύο αυτά εμβαδά είναι ίσα λόγω συμμετρίας, επομένως $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.



Σχήμα 15: Ολοκλήρωμα άρτιας συνάρτησης (αριστερά), περιττής (δεξιά).

Απόδειξη. Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^{-a} f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $- \int_0^{-a} f(x) dx$ κάνουμε την αντικατάσταση $y = -x \Rightarrow dy = -dx$. Όταν $x = 0$, $y = 0$, ενώ όταν $x = -a$, $y = a$. Άρα

$$- \int_0^{-a} f(x) dx = - \int_0^a f(-y) (-dy) = \int_0^a f(-y) dy,$$

και έχουμε

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-y) dy + \int_0^a f(x) dx. \quad (5)$$

(i) Όταν η f είναι άρτια ($f(-y) = f(y)$), οπότε η (5) γίνεται

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(y) dy + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(ii) Όταν η f είναι περιττή ($f(-y) = -f(y)$), οπότε η (5) γίνεται

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_0^a f(y) dy + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

□

5.2 Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες

Πρόταση 5.3. Αν οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ έχουν συνεχή παράγωγο στο διάστημα I , τότε

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx \quad (x \text{ στο } I).$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) g'(x) dx &= \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) dx \quad (a, b \text{ στο } I). \end{aligned}$$

Παραδείγματα.

1. Υπολογίστε το $\int \ln x dx$.

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \int (x)' \ln x dx = x \ln x - \int x (\ln x)' dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C, \quad x > 0. \end{aligned}$$

2. Υπολογίστε το $\int x e^x dx$.

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C. \end{aligned}$$

3. Υπολογίστε το $\int e^x \sin x dx$.

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \int (e^x)' \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx \\ &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (\cos x)' dx \right) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx + C \\ \Rightarrow 2 \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - e^x \cos x + C \\ \Rightarrow \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + C. \end{aligned}$$

5.3 Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων (ανάλυση σε απλά κλάσματα)

Θα περιγράψουμε μια γενική μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int f(x) dx, \quad \text{όπου } f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ με } p \text{ και } q \text{ πολυώνυμα.}$$

Αν $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, με $a_m, b_n \neq 0$, λέμε ότι ο βαθμός του $p(x)$ είναι m , και ο βαθμός του $q(x)$ είναι n .

ΒΗΜΑ 1: Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή, δηλαδή $m \geq n$, κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων. Δηλαδή, βρίσκουμε πολυώνυμα $s(x)$ και $r(x)$ τέτοια ώστε

$$p(x) = s(x) q(x) + r(x), \quad \text{με βαθμό } r(x) < \text{βαθμό } q(x).$$

Τότε

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{s(x) q(x) + r(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Άρα

$$\int f(x) dx = \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx,$$

όπου ο υπολογισμός του $\int s(x) dx$ είναι εύκολος, αφού είναι ολοκλήρωμα πολυωνυμικής συνάρτησης.

Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\int \frac{x^3+x}{x-1} dx$.

Κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων και βρίσκουμε ότι

$$x^3 + x = (x-1)(x^2 + x + 2) + 2 \Rightarrow \frac{x^3 + x}{x-1} = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x-1} dx &= \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1} \right) dx \\ &= \int (x^2 + x + 2) dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln |x-1| + C. \end{aligned}$$

□

ΒΗΜΑ 2: Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων. Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε πολυώνυμο q μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων (της μορφής $ax + b$) και ανάγωγων τετραγωνικών παραγόντων (της μορφής $ax^2 + bx + c$ με $b^2 - 4ac < 0$).

Παράδειγμα. Αν $q(x) = x^4 - 16$, τότε

$$q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

Αν $q(x) = x^4 + 16$, τότε

$$q(x) = x^4 + 8x^2 + 16 - 8x^2 = (x^2 + 4)^2 - (\sqrt{8}x)^2 = (x^2 - \sqrt{8}x + 4)(x^2 + \sqrt{8}x + 4).$$

ΒΗΜΑ 3: Εκφράζουμε τη ρητή συνάρτηση $\frac{r(x)}{q(x)}$ ως ένα άθροισμα **απλών κλασμάτων** της μορφής

$$\frac{A}{(ax + b)^i} \quad \text{ή} \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^i}.$$

Ένα θεώρημα της Άλγεβρας μας εξασφαλίζει ότι αυτό είναι εφικτό. Στη συνέχεια περιγράφουμε το πώς εργαζόμαστε σε καθεμιά από τις τέσσερις περιπτώσεις που μπορεί να εμφανιστούν.

Περίπτωση 1: Ο παρονομαστής $q(x)$ είναι γινόμενο διακριτών γραμμικών παραγόντων.

Δηλαδή

$$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_kx + b_k)$$

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν σταθερές $A_1, A_2, \dots, A_k$ τέτοιες ώστε

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}.$$

Οι σταθερές $A_1, A_2, \dots, A_k$ προσδιορίζονται όπως θα δούμε στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$.

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή:

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2).$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} &= \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} &= \frac{A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)}{x(2x - 1)(x + 2)} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} &= \frac{(2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A}{x(2x - 1)(x + 2)}. \end{aligned}$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων στον αριθμητή και καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = -\frac{1}{10}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx &= \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{2x-1} dx - \frac{1}{10} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{10} \ln|2x-1| - \frac{1}{10} \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

Περίπτωση 2: Ο παρονομαστής $q(x)$ είναι γινόμενο γραμμικών παραγόντων, μερικοί από τους οποίους επαναλαμβάνονται.

Έστω ότι ο πρώτος γραμμικός παράγοντας $(a_1x + b_1)$ επαναλαμβάνεται, π.χ., r φορές, δηλαδή εμφανίζεται το $(a_1x + b_1)^r$ ως παράγων του $q(x)$. Τότε εκτός του όρου $\frac{A_1}{a_1x+b_1}$ στην ανάλυση σε απλά κλάσματα χρησιμοποιούμε τους όρους:

$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}.$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$.

Σε αυτή την περίπτωση ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή, επομένως κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων και βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 + 4x + 1 &= (x+1)(x^3 - x^2 - x + 1) + 4x \\ \Rightarrow \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} &= (x+1) + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}. \end{aligned}$$

Συνεχίζουμε με το δεύτερο βήμα που είναι να παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή.

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2 - 1) = (x-1)^2(x+1).$$

Προχωράμε στην ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\begin{aligned} \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} \\ \Rightarrow 4x &= A(x^2 - 1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ \Rightarrow 4x &= (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C). \end{aligned}$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων και καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{aligned}A + C &= 0 \\+ B - 2C &= 4 \\-A + B + C &= 0\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = -1.$$

Άρα

$$\begin{aligned}& \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \int \left((x+1) + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} \right) dx \\&= \int (x+1) dx + \int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx \\&= \int (x+1) dx + \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\&= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + 2 \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} - \ln|x+1| + C \\&= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.\end{aligned}$$

Περίπτωση 3: Ο παρονομαστής $q(x)$ περιέχει ανάγωγους τετραγωνικούς παράγοντες που δεν επαναλαμβάνονται.

Αν το $q(x)$ έχει έναν παράγοντα της μορφής $ax^2 + bx + c$, με $b^2 - 4ac < 0$, τότε το πηλίκο $\frac{r(x)}{q(x)}$ θα έχει κατά την ανάλυσή του σε απλά κλάσματα έναν όρο της μορφής

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

Τον όρο αυτό τον ολοκληρώνουμε κάνοντας συμπλήρωση τετραγώνου στον παρονομαστή και χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\int \frac{1}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan \left(\frac{x}{\alpha} \right) + C. \quad (6)$$

Παράδειγμα 1. Υπολογίστε το $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$.

Σε αυτή την περίπτωση ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή, επομένως παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$, και προχωράμε στην ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} &= \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} \\ \Rightarrow \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} &= \frac{A(x^2 + 4) + x(Bx + C)}{x(x^2 + 4)} \\ \Rightarrow 2x^2 - x + 4 &= (A + B)x^2 + Cx + 4A.\end{aligned}$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των πολωνύμων και καταλήγουμε στο σύστημα

$$A + B = 2, \quad C = -1, \quad 4A = 4,$$

που, προφανώς, έχει λύση

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = -1.$$

Επομένως

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx.$$

Για το μεσαίο ολοκλήρωμα κάνουμε την αντικατάσταση $y = x^2 + 4 \Rightarrow dy = 2x dx$, άρα

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \ln |y| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 4| + C,$$

ενώ για το τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε τον τύπο (6) και έχουμε

$$\int \frac{1}{x^2+4} = \int \frac{1}{x^2+2^2} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + C.$$

Τελικά, έχουμε

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + C.$$

Παράδειγμα 2. Υπολογίστε το $\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} dx$.

Σε αυτή την περίπτωση ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με το βαθμό του παρονομαστή, άρα κάνουμε διαίρεση πολωνύμων και βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} 4x^2 - 3x + 2 &= 1 \cdot (4x^2 - 4x + 3) + (x - 1) \\ \Rightarrow \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} &= 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η διακρίνουσα του $4x^2 - 4x + 3$ είναι ίση με -32 , άρα ο παράγοντας αυτός δεν αναλύεται περαιτέρω και πρέπει να κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνου:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x + 1^2 - 1^2 + 3 = (2x - 1)^2 + 2.$$

Επομένως

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx = \int \left(1 + \frac{x-1}{4x^2 - 4x + 3} \right) dx = \int 1 dx + \int \frac{x-1}{(2x-1)^2 + 2} dx. \quad (7)$$

Θα υπολογίσουμε καταρχήν το τελευταίο ολοκλήρωμα $\int \frac{x-1}{(2x-1)^2+2} dx$.

Θέτουμε $y = 2x - 1 \Rightarrow dy = 2 dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dy$ και $x = \frac{1}{2}(y + 1)$. Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$\int \frac{x-1}{(2x-1)^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}(y+1)-1}{y^2+2} dy = \frac{1}{4} \int \frac{y}{y^2+2} dy - \frac{1}{4} \int \frac{1}{y^2+2} dy. \quad (8)$$

Για το $\frac{1}{4} \int \frac{y}{y^2+2} dy$ θέτουμε $y^2 + 2 = s \Rightarrow 2y dy = ds$, αντικαθιστούμε και έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \frac{y}{y^2+2} dy &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{8} \ln |s| + C \stackrel{s=y^2+2}{=} \frac{1}{8} \ln(y^2+2) + C \\ &\stackrel{y=2x-1}{=} \frac{1}{8} \ln(4x^2-4x+3) + C. \end{aligned}$$

Για το $\frac{1}{4} \int \frac{1}{y^2+2} dy$ χρησιμοποιούμε τον τύπο (6) και έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \frac{1}{y^2+2} dy &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{y^2+(\sqrt{2})^2} dy = \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + C \\ &\stackrel{y=2x-1}{=} \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε ότι βρήκαμε στην (8) και παίρνουμε ότι:

$$\int \frac{x-1}{(2x-1)^2+2} dx = \frac{1}{8} \ln(4x^2-4x+3) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Αντικαθιστούμε την τελευταία στην (7) και έχουμε:

$$\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} dx = x + \frac{1}{8} \ln(4x^2-4x+3) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Περίπτωση 4: Ο παρονομαστής $q(x)$ περιέχει έναν επαναλαμβανόμενο ανάγωγο τετραγωνικό παράγοντα.

Αν το $q(x)$ έχει τον παράγοντα $(ax^2 + bx + c)^r$, με $b^2 - 4ac < 0$, τότε η ανάλυση σε απλά κλάσματα περιέχει ένα άθροισμα της μορφής

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}.$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx$.

Ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή, και ο παρονομαστής είναι ήδη παραγοντοποιημένος, οπότε προχωράμε στην ανάλυση σε απλά κλάσματα, έχοντας κρατήσει κατά νου ότι ο ανάγωγος παράγων $x^2 + 1$ επαναλαμβάνεται δύο φορές. Άρα

$$\begin{aligned} \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \\ \Rightarrow \quad \dots & \\ \Rightarrow -x^3+2x^2-x+1 &= (A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A \\ \Rightarrow A+B=0, \quad C=-1, \quad 2A+B+D=2, \quad C+E=-1, \quad A=1 \\ \Rightarrow A=1, \quad B=-1, \quad C=-1, \quad D=1, \quad E=0. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} & \int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctan x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

Παρατήρηση. Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να μετατρέψουμε τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων άρρητων συναρτήσεων σε υπολογισμό ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων.

Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$.

Θέτουμε $y = \sqrt{x+4}$. Τότε $y^2 = x+4 \Rightarrow x = y^2 - 4$ και $dx = 2y dy$. Άρα

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2 \int \frac{y}{y^2-4} y dy = 2 \int \frac{y^2}{y^2-4} dy = 2 \int \frac{y^2-4+4}{y^2-4} dy \\ &= 2 \int \left(1 + \frac{4}{y^2-4} \right) dy = 2 \int 1 dy + 2 \int \frac{4}{(y-2)(y+2)} dy. \end{aligned}$$

Κάνουμε την ανάλυση του $\frac{4}{(y-2)(y+2)}$ σε απλά κλάσματα και βρίσκουμε

$$\frac{4}{(y-2)(y+2)} = \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2 \int 1 dy + 2 \int \frac{1}{y-2} dy - 2 \int \frac{1}{y+2} dy \\ &= 2y + 2 \ln|y-2| - 2 \ln|y+2| + C = 2y + 2 \ln \left| \frac{y-2}{y+2} \right| + C \\ &\stackrel{y=\sqrt{x+4}}{=} 2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + C. \end{aligned}$$

5.4 Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις σε ολοκληρώματα που περιέχουν τα $a^2 + x^2$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Μερικά ολοκληρώματα αυτού του τύπου προκύπτουν άμεσα, π.χ. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$. Γενικά,

- Όταν εμφανίζεται ο όρος $\sqrt{a^2 - x^2}$ δοκιμάζουμε την αντικατάσταση $x = a \sin \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
- Όταν εμφανίζεται ο όρος $\sqrt{a^2 + x^2}$ δοκιμάζουμε την αντικατάσταση $x = a \tan \theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

- Όταν εμφανίζεται ο όρος $\sqrt{x^2 - a^2}$ δοκιμάζουμε την αντικατάσταση $x = a \sec \theta = \frac{a}{\cos \theta}$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ή $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$

Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$, $|x| < a$, $a > 0$.

Θέτουμε $x = a \sin \theta \Rightarrow dx = a \cos \theta d\theta$.

Τότε $a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2 \theta = a^2(1 - \sin^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta$. Επομένως

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a \cos \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta}} d\theta = \int \frac{a \cos \theta}{\pm a \cos \theta} d\theta = \pm \int 1 d\theta = \pm \theta + C.$$

Όμως $\sin \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \arcsin \frac{x}{a}$, επομένως $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και άρα $\cos \theta \geq 0$. Επομένως το σωστό πρόσημο είναι το «+». Άρα, αφού $\theta = \arcsin \frac{x}{a}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

5.5 Ειδικές περιπτώσεις

Ας δούμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R(\cos x, \sin x) dx,$$

όπου $R(\cos x, \sin x)$ είναι ρητή συνάρτηση των $\sin x$ και $\cos x$.

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \tan \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \arctan y$. Άρα $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$.

Χρησιμοποιούμε και τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς τύπους

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2y}{1 + y^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}.$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε το $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{2y}{1+y^2}} \frac{2}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

2ος τρόπος υπολογισμού:

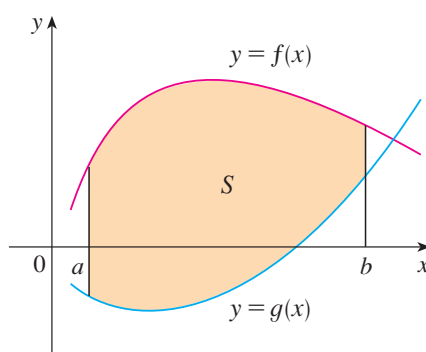
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{(\tan \frac{x}{2})'}{\tan \frac{x}{2}} dx \\ &\stackrel{y=\tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{y} dy = \ln |y| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

6 Εφαρμογές ολοκληρωμάτων

6.1 Εμβαδά επίπεδων χωρίων που περικλείονται από καμπύλες

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = f(x)$, $y = g(x)$, και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$, $x = b$, βλ. Σχήμα 16, όπου οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ είναι ίσο με

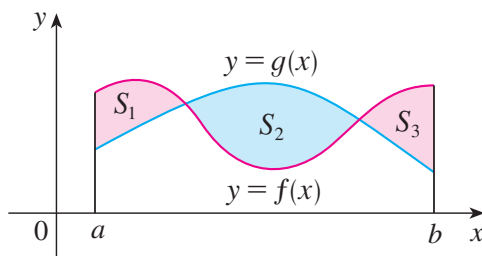
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (9)$$



Σχήμα 16: Εμβαδό χωρίου που περικλείεται από τις $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$, (όταν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$).

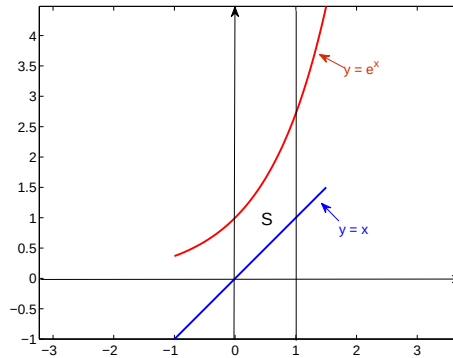
Αν δεν επιβάλλουμε τη συνθήκη $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = f(x)$, $y = g(x)$, και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$, $x = b$, όπου οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις, βλ. Σχήμα 17, είναι ίσο με

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (10)$$



Σχήμα 17: Εμβαδό χωρίου που περικλείεται από τις $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$.

Παράδειγμα 1. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου S που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$, βλ. Σχήμα 18.



Σχήμα 18: Εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $y = e^x$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$.

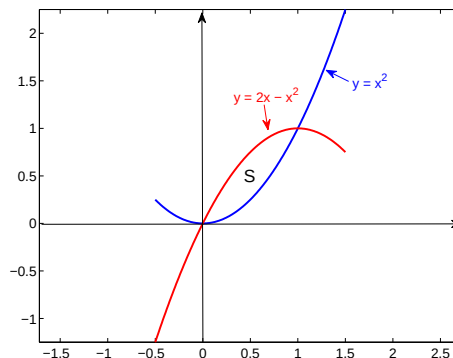
$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 (e^x - x) dx = [e^x]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= (e^1 - e^0) - \left(\frac{1}{2} - 0\right) = e - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου S που περικλείεται από τις παραβολές $y = x^2$ και $y = 2x - x^2$, βλ. Σχήμα 19.

Καταρχήν πρέπει να βρούμε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών:

$$x^2 = 2x - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

$$A = \int_0^1 [(2x - x^2) - x^2] dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$



Σχήμα 19: Εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

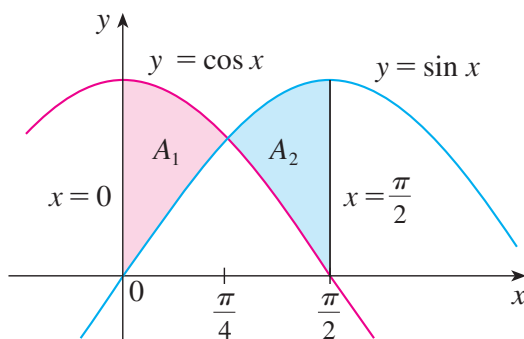
Παράδειγμα 3. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $y = \sin x$, $y = \cos x$, και των ευθειών $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{2}$, βλ. Σχήμα 20.

Καταρχήν βρίσκουμε τα σημεία τομής των καμπυλών $y = \sin x$ και $y = \cos x$. Επειδή $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$. Παρατηρούμε ότι

$$\cos x \geq \sin x \text{ για } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad \text{ενώ} \quad \sin x \geq \cos x \text{ για } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos x - \sin x| dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - \sin 0 - \cos 0 \right) + \left(-\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 \right) + \left(-0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$



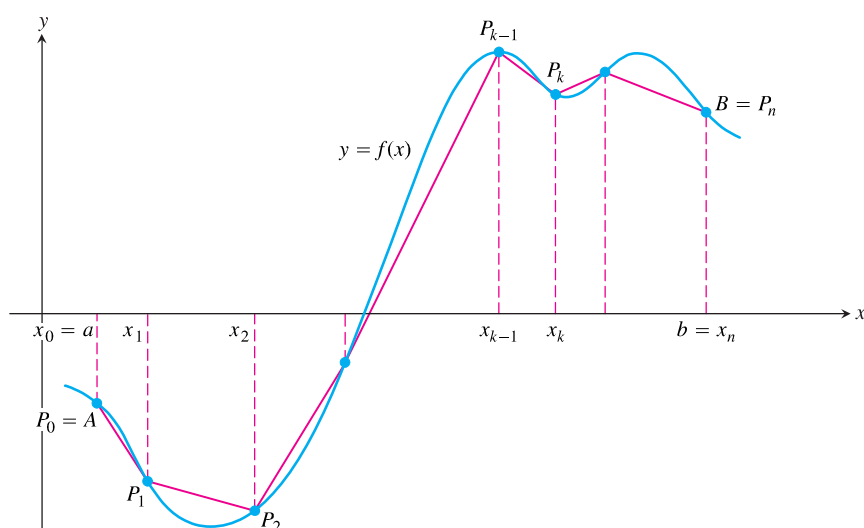
Σχήμα 20: Εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

6.2 Μήκος επίπεδης καμπύλης

Όλοι καταλαβαίνουμε τι εννοούμε λέγοντας μήκος για ένα ευθύγραμμο τμήμα. Όταν όμως ενδιαφερόμαστε να ορίσουμε και να μετρήσουμε το μήκος μιας καμπύλης τότε τα πράγματα περιπλέκονται. Για παράδειγμα, αν η καμπύλη μας είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης που είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα, τότε μπορούμε να ακολουθήσουμε μια διαδικασία που είναι ανάλογη με αυτή που χρησιμοποιήσαμε για να ορίσουμε το εμβαδόν ενός χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των x .

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη της οποίας θέλουμε να καθορίσουμε το μήκος είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$, με πεδίο ορισμού το $[a, b]$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η f έχει παράγωγο που είναι και αυτή συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$. Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται **ομαλή**, και η αντίστοιχη καμπύλη λέγεται **ομαλή καμπύλη** αφού δεν παρουσιάζει αιχμές, «σπασίματα», γωνίες κλπ.

Στη συνέχεια, παίρνουμε μια διαμέριση του $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, και συμβολίζουμε με $P_k, k = 0, 1, \dots, n$, τα σημεία της καμπύλης με συντεταγμένες $(x_k, y_k) = (x_k, f(x_k))$, βλ. Σχήμα 21.



Σχήμα 21: Το μήκος της πολυγωνικής γραμμής $P_0P_1 \dots P_n$ προσεγγίζει το μήκος της καμπύλης $y = f(x)$ από το σημείο A έως το B .

Στη συνέχεια ενώνουμε τα διαδοχικά σημεία $P_{k-1}, P_k, k = 0, 1, \dots, n$, με ευθύγραμμα τμήματα, κατασκευάζοντας με αυτόν τον τρόπο μια πολυγωνική γραμμή $P_0P_1 \dots P_n$, της οποίας το μήκος προσεγγίζει το μήκος της καμπύλης. Θέτουμε

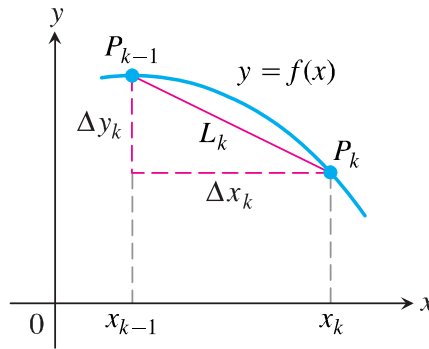
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \text{και} \quad \Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1}),$$

και ας εστιάσουμε την προσοχή μας σε ένα υποδιάστημα, π.χ. στο $[x_{k-1}, x_k]$, βλ. Σχήμα 22. Άμεσα βλέπουμε ότι το μήκος του ευθ. τμήματος $P_{k-1}P_k$ είναι

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}. \quad (11)$$

Τώρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει σημείο $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k) \Leftrightarrow \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = f'(\xi_k) \Leftrightarrow \Delta y_k = f'(\xi_k) \Delta x_k. \quad (12)$$



Σχήμα 22: Το μήκος του ευθ. τμήματος $P_{k-1}P_k$ προσεγγίζει το μήκος της καμπύλης $y = f(x)$ μεταξύ των σημείων P_{k-1} και P_k .

Άρα μπορούμε να προσεγγίσουμε το μήκος της καμπύλης $y = f(x)$ από το σημείο A έως το B με το άθροισμα

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n L_k &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \stackrel{(12)}{=} \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(\xi_k) \Delta x_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k. \end{aligned}$$

Το τελευταίο αυτό άθροισμα είναι ένα άθροισμα Riemann της συνάρτησης $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$, που είναι συνεχής, επομένως αν πάρουμε όρια για $n \rightarrow \infty$ έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n L_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Έτσι καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 6.1. Αν f' είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε το μήκος της καμπύλης $y = f(x)$ από το σημείο $A(a, f(a))$ έως το σημείο $B(b, f(b))$ είναι η τιμή του ολοκληρώματος

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (13)$$

Παράδειγμα. Βρείτε το μήκος της καμπύλης $y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2} - 1$ από το $x = 0$ μέχρι το $x = 1$.

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + 8x.$$

Επομένως από τον ορισμό (13) έχουμε

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x} dx.$$

Θέτουμε $u = 1 + 8x \Rightarrow du = 8 dx \Rightarrow \frac{1}{8} du = dx$. Όταν $x = 0$, $u = 1$, ενώ για $x = 1$, $u = 9$. Άρα

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+8x} dx = \frac{1}{8} \int_1^9 \sqrt{u} du = \frac{1}{8} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = \frac{13}{6}.$$

□

Μερικές φορές είναι βολικό να εκφράσουμε το x ως συνάρτηση του y , π.χ. αν έχουμε $x = g(y)$, $a \leq y \leq b$. Τότε το μήκος της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \quad (14)$$

Τέλος, αν μια καμπύλη δίνεται παραμετρικά από τις εξισώσεις $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t \in [t_a, t_b]$, τότε ισχύει ο ακόλουθος τύπος για τον υπολογισμό του μήκους καμπύλης

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (15)$$

Παράδειγμα. Βρείτε το μήκος κύκλου ακτίνας ρ .

Παραμετροποιούμε τον κύκλο ως εξής:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Επομένως $\frac{dx}{d\theta} = -\rho \sin \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = \rho \cos \theta$, και

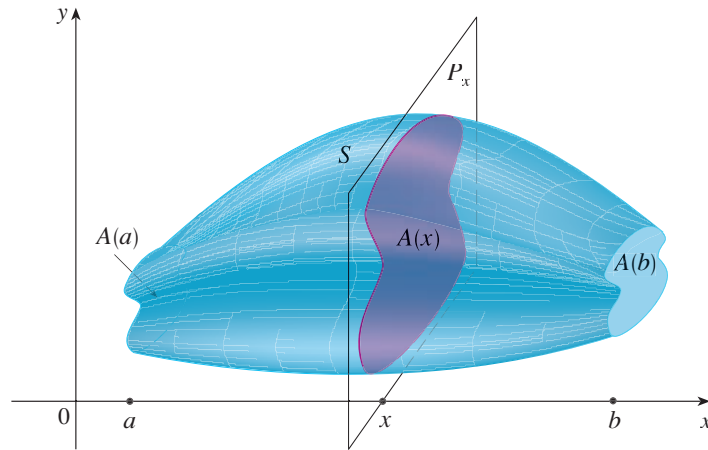
$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \rho d\theta = \rho [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi\rho. \end{aligned}$$

□

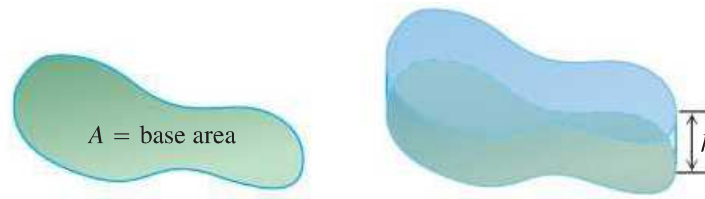
6.3 Υπολογισμός όγκου στερεού με χρήση του εμβαδού διατομής

Όλοι έχουμε τουλάχιστον μια διαισθητική ιδέα για το τι λέμε όγκο ενός στερεού. Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τον όγκο ενός στερεού χρησιμοποιώντας το εμβαδό διατομών του. Μια **διατομή** ενός στερεού S είναι το επίπεδο χωρίο που σχηματίζεται από την τομή του S με ένα επίπεδο, βλ. Σχήμα 23. Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός στερεού S όπως αυτό του Σχήματος 23.

Θα ξεκινήσουμε επεκτείνοντας τον ορισμό του κυλίνδρου, όπως τον μάθαμε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, για κυλινδρικά στερεά με βάσεις γενικότερου σχήματος, βλ. Σχήμα 24. Αν γνωρίζουμε το εμβαδόν της βάσης του κυλινδρικού στερεού, έστω A , και το ύψος h , τότε ο όγκος του κυλινδρικού στερεού είναι



Σχήμα 23: Το εμβαδόν $A(x)$ της διατομής του στερεού S που σχηματίζεται από την τομή του S με το επίπεδο P_x που είναι κάθετο στον x -άξονα και διέρχεται από το σημείο $(x, 0)$, $x \in [a, b]$.



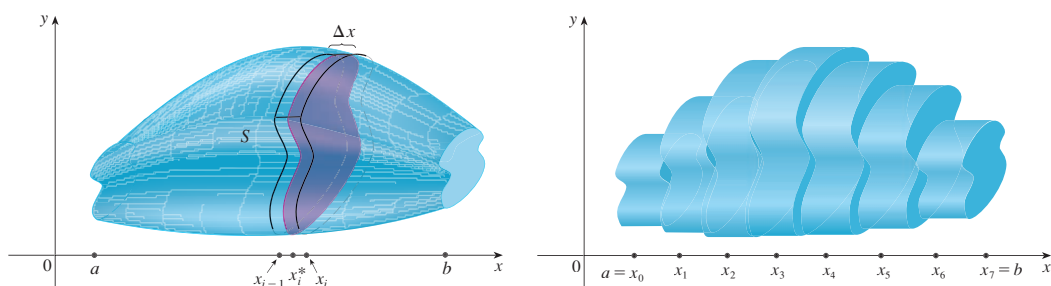
Σχήμα 24: Κυλινδρικό στερεό με εμβαδό βάσης A και ύψος h .

$$\text{Όγκος} = \text{βάση} \times \text{ύψος} = A \cdot h.$$

Ο τύπος αυτός θα αποτελέσει τη βάση για να ορίσουμε και τον όγκο στερεών που δεν είναι κυλινδρικά, όπως π.χ. αυτό του Σχήματος 23. Έστω ότι $A(x)$ είναι το εμβαδόν της διατομής του στερεού S που σχηματίζεται από την τομή του S με ένα επίπεδο P_x που είναι κάθετο στον x -άξονα και διέρχεται από το σημείο $(x, 0)$, $x \in [a, b]$. Παρατηρήστε ότι το εμβαδόν $A(x)$ της διατομής αυτής μεταβάλλεται με το x στο διάστημα $[a, b]$. Έστω ακόμη ότι η A είναι μια συνεχής συνάρτηση του x . Τότε, όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια, μπορούμε να ορίσουμε και να υπολογίσουμε τον όγκο του S ως το ορισμένο ολοκλήρωμα της $A(x)$. Συγκεκριμένα, ξεκινάμε χωρίζοντας το S σε n «φέτες» ίσου πάχους Δx . (Σκεφτείτε ότι κόβετε μια φραντζόλα ψωμί σε φέτες ίσου πάχους.) Σε κάθε διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, επιλέγουμε ενδιάμεσα σημεία x_i^* και έτσι προσεγγίζουμε την i -οστή φέτα S_i από το κυλινδρικό στερεό με εμβαδό βάσης $A(x_i^*)$ και πάχος Δx , βλ. Σχήμα 25 (αριστερά).

Ο όγκος του κυλινδρικού αυτού στερεού είναι $A(x_i^*) \Delta x$, άρα μια προσέγγιση του όγκου της i -οστής φέτας S_i θα είναι

$$V(S_i) \approx A(x_i^*) \Delta x.$$



Σχήμα 25: Αριστερά: Μια τυπική λεπτή «φέτα» πάχους Δx του στερεού S . Δεξιά: Προσέγγιση του όγκου του στερεού S με «λεπτά» κυλινδρικά στερεά.

Άρα μπορούμε να προσεγγίσουμε τον ολικό όγκο του στερεού S αθροίζοντας τον όγκο των φετών:

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x.$$

Αυτό όμως είναι ένα άθροισμα Riemann για τη συνάρτηση $A(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, επομένως αναμένουμε ότι καθώς λεπταίνουμε ολοένα και περισσότερο τη διαμέριση του $[a, b]$ θα έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx.$$

Επομένως ορίζουμε το ορισμένο αυτό ολοκλήρωμα ως τον όγκο του στερεού S .

Ορισμός 6.2. Ο όγκος V ενός στερεού με εμβαδό διατομής που δίνεται από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $A(x)$, για $x \in [a, b]$, είναι

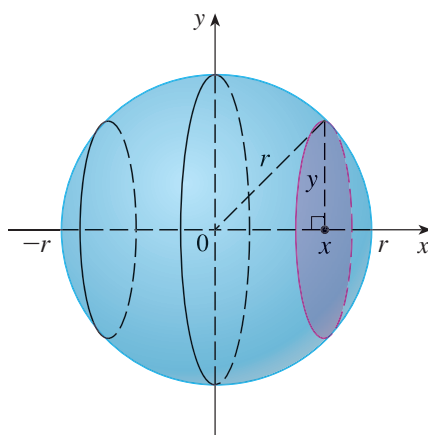
$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Επομένως στις περιπτώσεις που η $A(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και, ειδικότερα, συνεχής, υπολογίζουμε τον όγκο ενός στερεού εκτελώντας τα ακόλουθα βήματα:

1. Σχεδιάζουμε το στερεό και μια τυπική διατομή του.
2. Βρίσκουμε ένα τύπο για το εμβαδό μιας τυπικής διατομής $A(x)$.
3. Καθορίζουμε τα όρια ολοκλήρωσης a και b .
4. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση $A(x)$ από a έως b για να βρούμε τον όγκο του στερεού.

Παράδειγμα 1. Δείξτε ότι ο όγκος της σφαίρας με ακτίνα r είναι ίσος με

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$



Σχήμα 26: Σφαίρα ακτίνας r .

Τοποθετούμε τη σφαίρα έτσι ώστε το κέντρο της να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, βλ. Σχήμα 26.

Τότε η τομή του το επιπέδου P_x και της σφαίρας είναι ένας κύκλος που η ακτίνα του y μπορεί να υπολογιστεί ως συνάρτηση του x με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Πράγματι, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Επομένως, το εμβαδόν της διατομής είναι

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2).$$

Άρα, χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 6.2 μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο της σφαίρας ως το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(x) dx = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

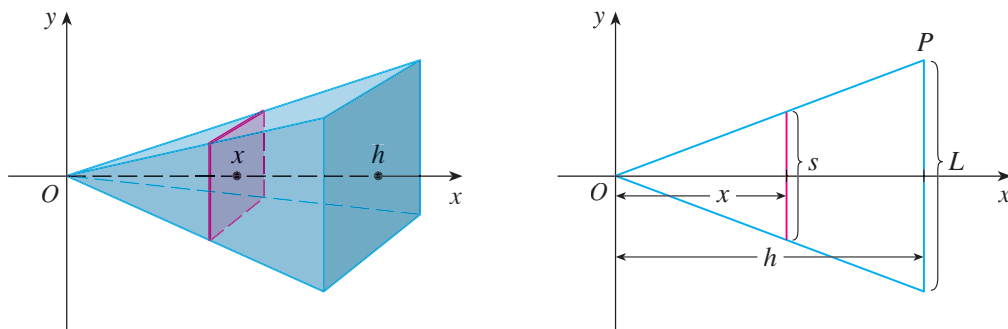
□

Παράδειγμα 2. Βρείτε τον όγκο μιας πυραμίδας που η βάση της είναι τετράγωνο πλευράς L και το ύψος της είναι ίσο με h .

Τοποθετούμε την κορυφή της πυραμίδας στην αρχή των αξόνων έτσι ώστε ο κεντρικός της άξονας να βρίσκεται πάνω στον x -άξονα, βλ. Σχήμα 27.

Τότε η τομή κάθε επίπεδου P_x που διέρχεται από το x και είναι κάθετο στον x -άξονα με την πυραμίδα είναι ένα τετράγωνο με πλευρά μήκους, ας πούμε, s . Θα πρέπει τώρα να εκφράσουμε το s συναρτήσει του x . Αυτό μπορεί να γίνει αν παρατηρήσουμε τα όμοια τρίγωνα στο Σχήμα 27, δεξιά. Επομένως, έχουμε ότι

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{L}{h} x.$$



Σχήμα 27: Πυραμίδα με τετραγωνική βάση πλευράς L και ύψος h .

Επομένως, το εμβαδόν της διατομής είναι

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2} x^2.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και πάλι τον Ορισμό 6.2 μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο της πυραμίδας ως το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2} x^2 dx = \frac{L^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\ &= \frac{L^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} L^2 h. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3. Βρείτε τον όγκο του στερεού του Σχήματος 28, που δημιουργείται αν περιστρέψουμε γύρω από τον x -άξονα το χωρίο που περικλείεται από το γράφημα της $y = \sqrt{x}$ και τον x -άξονα, για $0 \leq x \leq 1$.

Η τομή κάθε επίπεδου P_x που διέρχεται από το x και είναι κάθετο στον x -άξονα με το στερεό αυτό είναι ένας κύκλος ακτίνας $\sqrt{x}$. Επομένως, το εμβαδόν της διατομής είναι

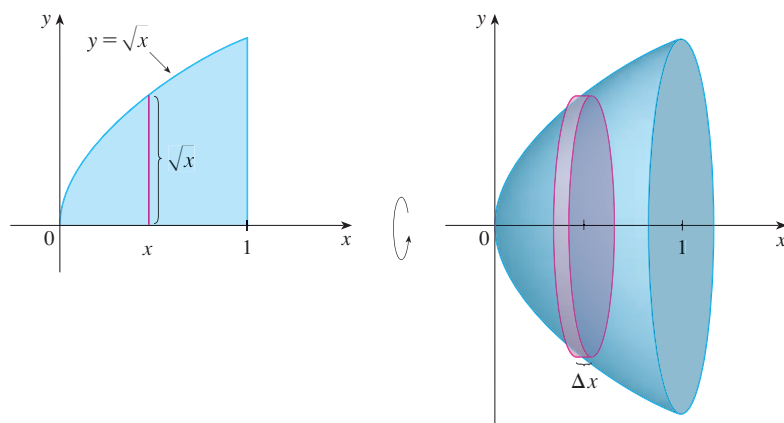
$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x,$$

και άρα ο ζητούμενος όγκος είναι

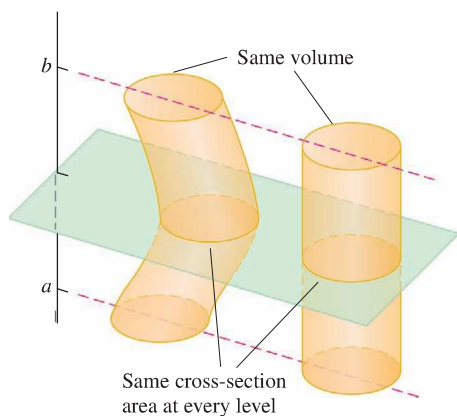
$$V = \int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 \pi x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

□

Παράδειγμα 4. Στη γεωμετρία, η αρχή του Cavalieri για στερεά μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι δύο στερεά περιέχονται μεταξύ δύο παράλληλων επιπέδων. Αν η



Σχήμα 28: Το στερεό που προκύπτει αν περιστρέψουμε γύρω από τον x -άξονα το χωρίο που περικλείεται από το γράφημα της $y = \sqrt{x}$ και τον x -άξονα, για $0 \leq x \leq 1$.



Σχήμα 29: Αριστερά: Αρχή του Cavalieri. Τα δύο αυτά στερεά έχουν ίσο όγκο. Δεξιά: Αναπαράσταση της αρχής του Cavalieri με δύο στήλες νομισμάτων.

τομή κάθε επιπέδου, που είναι παράλληλο προς τα επίπεδα αυτά, με τα στερεά ορίζει χωρία που έχουν ίσο εμβαδόν, τότε τα στερεά αυτά έχουν ίσο όγκο.

Αυτό προκύπτει άμεσα από τον Ορισμό 6.2, βλ. Σχήμα 29 (αριστερά), αφού τόσο οι συναρτήσεις που καθορίζουν το εμβαδόν της κάθε διατομής $A(x)$, όσο και τα όρια ολοκλήρωσης, είναι ίδια και για τα δύο στερεά. Στο δεξί μέρος του Σχήματος 29, δίνεται μια αναπαράσταση της αρχής του Cavalieri με δύο στήλες νομισμάτων.

7 Γενικευμένα ολοκληρώματα Riemann

Ας παρατηρήσουμε τα «ολοκληρώματα» $\int_1^{+\infty} x \, dx$ και $\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx$. Είναι φανερό ότι και τα δυο ξεφεύγουν από το πλαίσιο της θεωρίας των ολοκληρωμάτων που είδαμε μέχρι τώρα. Στο πρώτο «ολοκλήρωμα» το διάστημα $[1, +\infty)$ δεν είναι κλειστό και φραγμένο, ενώ στο δεύτερο «ολοκλήρωμα» η συνάρτηση $y = 1/x$ δεν ορίζεται στο διάστημα $[0, 1]$ και, μάλιστα, δεν είναι καν φραγμένη στο διάστημα αυτό αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Τέτοιου τύπου “ολοκληρώματα”, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, ονομάζονται γενικευμένα ή καταχρηστικά ολοκληρώματα. Θα δούμε αμέσως τώρα δύο κατηγορίες τέτοιων ολοκληρωμάτων.

Τύπος I: «Άπειρα διαστήματα».

1. Αν το $\int_a^t f(x) \, dx$ υπάρχει για οποιοδήποτε αριθμό $t \geq a$, τότε

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) \, dx,$$

αν υπάρχει το όριο αυτό.

2. Αν το $\int_t^b f(x) \, dx$ υπάρχει για οποιοδήποτε αριθμό $t \leq b$, τότε

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) \, dx,$$

αν υπάρχει το όριο αυτό.

Αν υπάρχουν τα παραπάνω όρια θα λέμε ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ και $\int_{-\infty}^b f(x) \, dx$ συγκλίνουν, ενώ θα λέμε ότι αποκλίνουν αν τα όρια αυτά δεν υπάρχουν.

3. Αν υπάρχουν τα $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ και $\int_{-\infty}^b f(x) \, dx$, τότε ορίζουμε

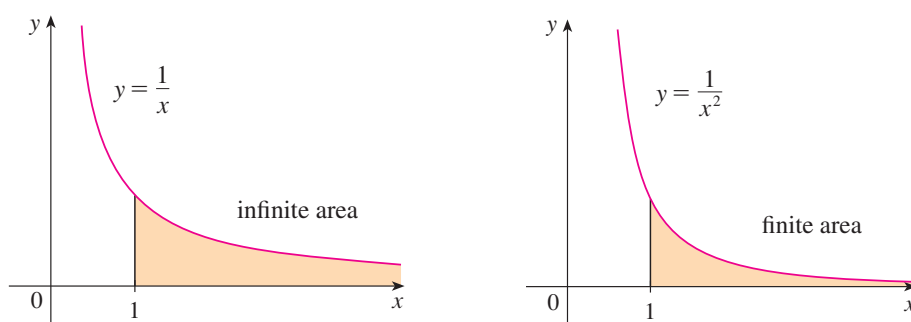
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^a f(x) \, dx + \int_a^{+\infty} f(x) \, dx.$$

Παράδειγμα 1. Το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει;

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\ln |x| \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty.$$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$ αποκλίνει. □

Παράδειγμα 2. Το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει;



Σχήμα 30: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ αριστερά, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ δεξιά.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1.$$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$. □

Παράδειγμα 3. Το $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει;

$$\int_t^0 x e^x dx = \int_t^0 x (e^x)' dx = [x e^x]_t^0 - \int_t^0 e^x dx = [x e^x]_t^0 - [e^x]_t^0 = -t e^t - 1 + e^t.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{e^{-t}} \stackrel{\text{r H\^opital}}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-e^t) = 0.$$

Άρα

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 x e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [-t e^t - 1 + e^t] = 0 - 1 + \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 - 1 + 0 = -1,$$

οπότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^0 x e^x dx = -1$. □

Παράδειγμα 4. Το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει;

Επιλέγουμε $a = 0$ και χωρίζουμε το ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Τώρα

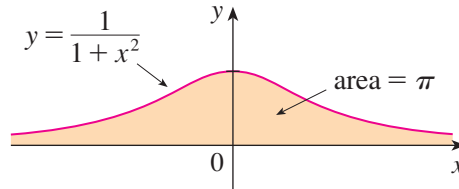
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [\arctan t]_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\arctan 0 - \arctan t) \\ &= 0 - \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan t = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ανάλογα, βλέπουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Συνεπώς $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

□



Σχήμα 31: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Τύπος II: Ολοκληρώματα ασυνεχών συναρτήσεων.

1. Αν f είναι συνεχής στο $[a, b)$ και ασυνεχής στο b , τότε

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx,$$

αν υπάρχει το όριο αυτό.

2. Αν f είναι συνεχής στο $(a, b]$ και ασυνεχής στο a , τότε

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx,$$

αν υπάρχει το όριο αυτό.

3. Αν η f είναι ασυνεχής στο c , $a < c < b$, και τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^c f(x) dx$ και $\int_c^b f(x) dx$ συγκλίνουν, τότε

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Παράδειγμα 5. Υπολογίστε το $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$ αν είναι δυνατόν.

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx &= \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^5 (x-2)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} 2 \left[\sqrt{x-2} \right]_t^5 = 2 \left(\sqrt{3} - \lim_{t \rightarrow 2^+} \sqrt{t-2} \right) = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = 2\sqrt{3}$. □

Παράδειγμα 6. Υπολογίστε το $\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx$ αν είναι δυνατόν.

Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη για την $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Άρα χωρίζουμε το ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1} dx.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[\ln |x-1| \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(\ln |t-1| \right) - \ln(|-1|) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(1-t) = -\infty \quad (\text{αφού } 1-t \rightarrow 0^+, \text{ καθώς } t \rightarrow 1^-). \end{aligned}$$

Επομένως δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το $\int_1^3 \frac{1}{x-1} dx$, και το $\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx$ αποκλίνει.

Παρατήρηση: Αν δεν είχαμε παρατηρήσει το γεγονός ότι το $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη, και κάναμε

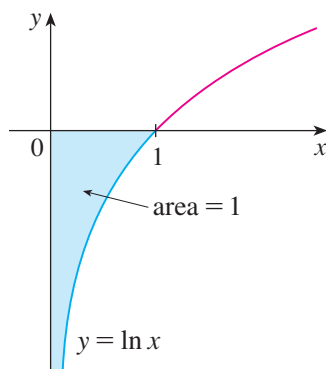
$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx = \left[\ln |x-1| \right]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,$$

αυτό θα ήταν **λάθος**. Η συνάρτηση που θέλουμε να ολοκληρώσουμε στο διάστημα $[0, 3]$, απειρίζεται στο $x = 1$, άρα το ολοκλήρωμα πρέπει να υπολογιστεί ως γενικευμένο ολοκλήρωμα. □

Παράδειγμα 7. Υπολογίστε το $\int_0^1 \ln x dx$ αν είναι δυνατόν.

Έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη, βλ. Σχήμα 32. Συνεπώς

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \ln x dx.$$



Σχήμα 32: $\int_0^1 \ln x dx$.

$$\begin{aligned}
\int_t^1 \ln x \, dx &= \int_t^1 (x)' \ln x \, dx = \left[x \ln x \right]_t^1 - \int_t^1 x (\ln x)' \, dx \\
&= 1 \ln 1 - t \ln t - \int_t^1 x \frac{1}{x} \, dx = -t \ln t - \int_t^1 1 \, dx = -t \ln t - (1 - t) \\
&= -t \ln t + t - 1.
\end{aligned}$$

Όμως

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (t \ln t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} \stackrel{\text{r'Hôpital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t) = 0,$$

επομένως

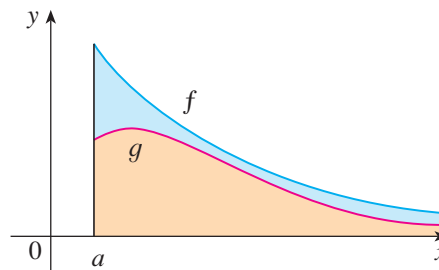
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x \, dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \ln x \, dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [-t \ln t + t - 1] \\
&= -\lim_{t \rightarrow 0^+} (t \ln t) + \lim_{t \rightarrow 0^+} t - 1 = 0 + 0 - 1 = -1.
\end{aligned}$$

□

Σε κάποιες περιπτώσεις είναι αδύνατον να υπολογιστεί η ακριβής τιμή ενός γενικευμένου ολοκληρώματος, αλλά ακόμα και σε αυτές τις περιπτώσεις θα θέλαμε να γνωρίζουμε κατά πόσον συγκλίνει ή αποκλίνει. Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμο το ακόλουθο θεώρημα. (Το θεώρημα αυτό διατυπώνεται για γενικευμένα ολοκληρώματα τύπου I, αλλά με τις κατάλληλες τροποποιήσεις ισχύει και για γενικευμένα ολοκληρώματα τύπου II.)

Θεώρημα 7.1 (Θεώρημα σύγκρισης). *Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) \geq g(x)$, για $x \geq a$, τότε*

- (i) *Αν το $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ συγκλίνει.*
- (ii) *Αν το $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ αποκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ αποκλίνει.*



Σχήμα 33: Θεώρημα σύγκρισης.

Αν και δεν δίνουμε την απόδειξη του θεωρήματος αυτού, μπορούμε διαισθητικά να δούμε ότι είναι ένα αναμενόμενο αποτέλεσμα κοιτώντας το Σχήμα 33.

Παράδειγμα 8. Ελέγξτε αν το $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

Για $x \geq 1$ έχουμε ότι $\frac{1}{x} < \frac{1+e^{-x}}{x}$ και, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 1, το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ αποκλίνει, άρα από το Θεώρημα Σύγκρισης έχουμε ότι και το $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$ αποκλίνει. $\square$

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(i) $\int_{-1}^5 x^5 dx.$

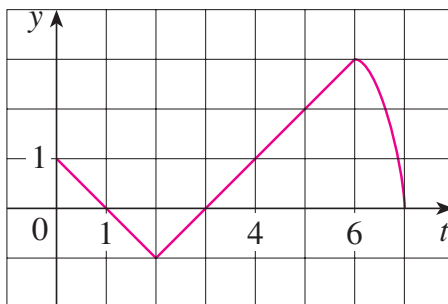
(ii) $\int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx.$

(iii) $\int_1^2 \frac{3x-2}{\sqrt{x}} dx.$

(iv) $\int_1^e \frac{x^2+x+1}{x} dx.$

(v) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx.$

2. Έστω $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, όπου f είναι η συνάρτηση που το γράφημά της απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



(α) Υπολογίστε τις τιμές $g(x)$ για $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(β) Εκτιμήστε την τιμή $g(7)$.

(γ) Που λαμβάνει η g μέγιστη και ελάχιστη τιμή;

(δ) Σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική παράσταση για την g .

3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$(i) \quad \int e^{\sin x} \cos x \, dx.$$

$$(ii) \quad \int \frac{4}{(1+2x)^3} \, dx.$$

$$(iii) \quad \int \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx.$$

$$(iv) \quad \int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}} \, dx.$$

$$(v) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(\sin x) \, dx.$$

4. Αν η f είναι συνεχής και $\int_0^4 f(x) \, dx = 10$, βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^2 f(2x) \, dx$.

5. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(-x) \, dx = \int_{-b}^{-a} f(x) \, dx.$$

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$(i) \quad \int x \ln x \, dx.$$

$$(ii) \quad \int (2x+3)e^x \, dx.$$

$$(iii) \quad \int e^{2x} \sin 3x \, dx.$$

$$(iv) \quad \int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x) \, dx.$$

$$(v) \quad \int \sin \sqrt{x} \, dx. \text{ (Υποδ: Κάντε πρώτα αντικατάσταση και μετά ολοκλήρωση κατά μέρη.)}$$

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$(i) \quad \int \frac{2}{x^2+3x-4} \, dx.$$

$$(ii) \quad \int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)} \, dx.$$

$$(iii) \quad \int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)} \, dx.$$

$$(iv) \quad \int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x} \, dx.$$

$$(v) \quad \int \frac{x}{x-6} \, dx.$$

$$(vi) \quad \int \frac{x^3+4}{x^2+4} \, dx.$$

8. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $y = x + 1$, $y = 9 - x^2$, και των ευθειών $x = -1$ και $x = 2$.
9. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $y = e^x$, $y = \sin x$, και των ευθειών $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{2}$.
10. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $y = 12 - x^2$, $y = x^2 - 6$.
11. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $y = |x|$, $y = x^2 - 2$.

Σημείωση: Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό. Κάποια από τα σχήματα του κεφαλαίου αυτού έχουν παρθεί από τα βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- Μιχ. Παπαδημητράκης, Απειροστικός Λογισμός: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής, Σημειώσεις Παραδόσεων, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.
- J. Stewart, Calculus, 6th ed., Thomson Brooks/Cole, 2008.
- E. Swokowski, J. Cole, Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, Classic 12th Edition, Brooks/Cole, 2010.
- M.D. Weir, J., G.B. Thomas, Thomas' Calculus, Addison-Wesley, 2010.