

Παράγωγοι

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών
Σχολή Μηχανικών



Νοέμβριος 2018

1 Ένα γεωμετρικό πρόβλημα (εφαπτομένη καμπύλης) και ένα φυσικό πρόβλημα (ταχύτητα).

Εφαπτομένη. Ας θεωρήσουμε μια καμπύλη C , που είναι το γράφημα μιας συνάρτησης f , δηλαδή έχει εξίσωση $y = f(x)$, και έστω ότι θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από ένα σημείο της καμπύλης $P(a, f(a))$ και εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο αυτό. Θεωρούμε και ένα άλλο γειτονικό σημείο $Q(x, f(x))$, με $x \neq a$, και υπολογίζουμε το συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) της τέμνουσας ευθείας PQ

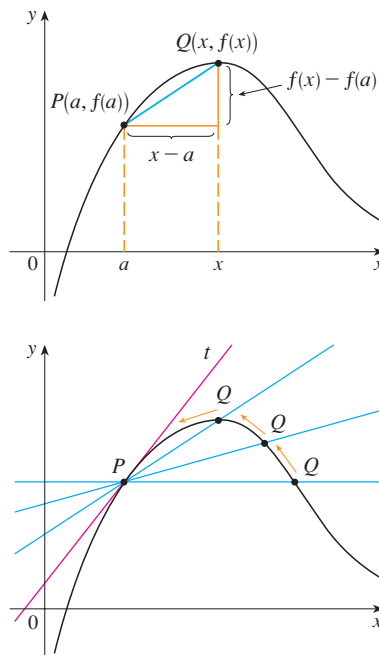
$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

βλ. Σχήμα 1. Τώρα, καθώς το x πλησιάζει το a , το σημείο Q πλησιάζει στο σημείο P . Αν η κλίση m_{PQ} τείνει σε κάποιο αριθμό m , καθώς το $x \rightarrow a$, τότε ορίζουμε ως *εφαπτόμενη ευθεία* της καμπύλης C στο σημείο P , την ευθεία t που διέρχεται από το σημείο P και έχει συντελεστή διεύθυνσης m . Με άλλα λόγια, η εφαπτόμενη ευθεία είναι η «οριακή θέση» της τέμνουσας ευθείας PQ καθώς το Q πλησιάζει προς το P (βλ. Σχήμα 1).

Ορισμός 1.1. Η εφαπτόμενη ευθεία t της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $P(a, f(a))$, είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο P και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει.



Σχήμα 1: Η εφαπτομένη στην καμπύλη $y = f(x)$ στο σημείο P .

Στιγμιαία ταχύτητα. Ας υποθέσουμε ότι ένα όχημα κινείται πάνω σε έναν ευθύ δρόμο με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Η ταχύτητα δεν είναι γνωστή – το ταχύμετρο είναι χαλασμένο – αλλά δουλεύει το ρολόι και ο δείκτης χιλιομετρικών αποστάσεων. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του οχήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Για να το πετύχουμε αυτό μετράμε τις αποστάσεις $s(t_1)$ και $s(t_2)$ του οχήματος από κάποιο σταθερό σημείο της ευθείας σε δυο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 . Τότε η μέση ταχύτητα ανάμεσα στις δυο αυτές χρονικές στιγμές είναι ίση με

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Για να υπολογίσουμε τη στιγμιαία ταχύτητα σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή τ (υπό την προϋπόθεση ότι η ταχύτητα του οχήματος δεν παρουσιάζει απότομες μεταβολές σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα) θεωρούμε τη χρονική μεταβλητή t να πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε στο τ . Τότε ορίζουμε ως στιγμιαία ταχύτητα $v(\tau)$ το όριο της μέσης ταχύτητας

$$v(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau}.$$

2 Παράγωγος

Η ομοιότητα ανάμεσα στον τύπο της κλίσης της εφαπτόμενης ευθείας και στον τύπο της στιγμιαίας ταχύτητας της προηγούμενης παραγράφου δεν είναι συμπτωματική. Πίσω και από τα δύο κρύβεται η έννοια του ρυθμού μεταβολής. Στο πρώτο πρόβλημα είναι ο ρυθμός

μεταβολής του ύψους $f(x)$ ως προς την οριζόντια μετατόπιση x , ενώ στο δεύτερο πρόβλημα, της απόστασης $s(t)$ ως προς τον χρόνο t . Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, όπως και σε πολλές άλλες υπολογισμού ρυθμού μεταβολής διαφόρων ποσοτήτων, καταλήγουμε να υπολογίσουμε ένα όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$. Δίνουμε, λοιπόν, τον εξής ορισμό.

Ορισμός 2.1. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο ξ , συμβολίζεται με $f'(\xi)$, και είναι ίση με

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

εφ' όσον το όριο αυτό υπάρχει.

Άλλοι συμβολισμοί είναι

$$Df(\xi) \quad \text{ή} \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\xi} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $h = x - \xi \Leftrightarrow x = \xi + h$, τότε ένας άλλος ισοδύναμος τρόπος για να γράψουμε την παράγωγο είναι

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}.$$

Αν η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι αριθμός και όχι $\pm\infty$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη στον ξ . Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της, τότε λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο (a, b) και $a < \xi < b$. Είναι προφανές ότι, αν η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στο ξ , τότε έχει παραγώγους στο ξ και από τα δεξιά του και από τα αριστερά του, και αυτές οι πλευρικές παράγωγοι στο ξ είναι ίσες με την παράγωγο στο ξ , δηλαδή

$$f'_-(\xi) = f'_+(\xi) = f'(\xi).$$

Αντιστρόφως, αν η $y = f(x)$ έχει παραγώγους στο ξ και από τα δεξιά του και από τα αριστερά του και αυτές είναι ίσες, τότε η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στο ξ ίση με την κοινή τιμή των δυο πλευρικών παραγώγων.

Παραδείγματα:

1. Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 8x + 9$ στον ξ .

Λύση.

$$\begin{aligned}f'(\xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(\xi + h)^2 - 8(\xi + h) + 9] - [\xi^2 - 8\xi + 9]}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\xi^2 + 2\xi h + h^2 - 8\xi - 8h + 9 - \xi^2 + 8\xi - 9}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\xi h + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2\xi + h - 8) \\&= 2\xi - 8.\end{aligned}$$

2. Η $f(x) = |x|$ ορίζεται στο $(-\infty, \infty)$. Θα ελέγξουμε σε ποιιά διαστήματα είναι παραγωγίσιμη. Αν $x > 0$, τότε $|x| = x$ και μπορούμε να επιλέξουμε h αρκετά μικρό έτσι ώστε και $x + h > 0$ (οπότε $|x + h| = x + h$).

Άρα, για $x > 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Ανάλογα, αν $x < 0$, τότε $|x| = -x$ και μπορούμε να επιλέξουμε h αρκετά μικρό έτσι ώστε και $x + h < 0$ (οπότε $|x + h| = -(x + h)$).

Άρα, για $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Συνεπώς η $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ και $x < 0$.

Απομένει να μελετήσουμε τι συμβαίνει στο $x = 0$. Έχουμε

$$f'_-(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

$$f'_+(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Άρα η $f(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Ορισμός 2.2. Αν θεωρήσουμε το σύνολο όλων των ξ στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ στους οποίους αυτή είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή όλων των ξ για τους οποίους υπάρχει ο $f'(\xi)$ και είναι αριθμός, τότε με αυτό το σύνολο ως πεδίο ορισμού ορίζεται η **παράγωγος συνάρτηση** της $y = f(x)$, η οποία συμβολίζεται

$$f'(x) \quad \text{ή} \quad Df(x) \quad \text{ή} \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx}.$$

Τόσο η συνέχεια όσο και η παραγωγισιμότητα είναι πολύ σημαντικές ιδιότητες για μια συνάρτηση. Στο επόμενο θεώρημα διατυπώνουμε πώς συνδέονται οι ιδιότητες αυτές.

Θεώρημα 2.1. *Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο ξ , τότε η f είναι συνεχής στο ξ .*

Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει. Π.χ. η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Στο σημείο αυτό ας επαναλάβουμε τη γεωμετρική ερμηνεία της έννοιας της παραγώγου. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) , ότι $a < \xi < b$ και ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στον ξ . Όπως είδαμε, η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι ίση με $f'(\xi)$, οπότε:

$$\text{εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας: } y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi), \quad (f'(\xi) \neq \pm\infty).$$

Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ και $f'(\xi) = +\infty$ ή $f'(\xi) = -\infty$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο $(\xi, f(\xi))$ είναι κατακόρυφη και

$$\text{εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας: } x = \xi, \quad (f'(\xi) = \pm\infty).$$

3 Παραδείγματα παραγώγων - Α΄

Παράδειγμα 1. Αν $f(x) = c$, είναι η σταθερή συνάρτηση, τότε $f'(x) = 0$.

Πράγματι,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Παράδειγμα 2. Αν $f(x) = x$, τότε $f'(x) = 1$.

Πράγματι,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Παράδειγμα 3. Αν $f(x) = x^n$, τότε $f'(x) = nx^{n-1}$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}] \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4. Αν $f(x) = \sin x$, τότε $f'(x) = \cos x$.

Θα χρειαστούμε τον ακόλουθο τύπο από την τριγωνομετρία

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos \frac{2x+h}{2} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left(\frac{2x+h}{2} \right) = 1 \cdot \cos x \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5. Αν $f(x) = \cos x$, τότε $f'(x) = -\sin x$.

Θα χρειαστούμε τον ακόλουθο τύπο από την τριγωνομετρία

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A - B}{2} \sin \frac{A + B}{2}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h-x}{2} \sin \frac{x+h+x}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin \frac{2x+h}{2} \right) \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin \left(\frac{2x+h}{2} \right) = -1 \cdot \sin x \\ &= -\sin x. \end{aligned}$$

Στον ακόλουθο πίνακα δίνουμε τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c, c \in \mathbb{R}$ σταθ.	0	e^x	e^x
x	1	a^x	$a^x \ln a$
x^n, n ακέραιος	nx^{n-1}	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x^p, p ρητός, $x > 0$	px^{p-1}	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

4 Πράξεις με παραγώγους

Πρόταση 4.1. Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στον ξ . Τότε το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και, αν $g(\xi) \neq 0$, ο λόγος των δυο συναρτήσεων, είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στον ξ και ισχύουν οι τύποι:

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(\xi) &= f'(\xi) \pm g'(\xi), \\ (fg)'(\xi) &= f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) &= \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}.\end{aligned}$$

(Τα ίδια ισχύουν και για τις πλευρικές παραγώγους.)

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνουμε πώς βρίσκουμε την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης.

Πρόταση 4.2 (Κανόνας της αλυσίδας). Έστω ότι ορίζεται η σύνθεση $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ των $y = f(x)$ και $z = g(y)$. Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και η $z = g(y)$ είναι παραγωγίσιμη στον $\eta = f(\xi)$, τότε η $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi) = g'(f(\xi))f'(\xi).$$

Χρησιμοποιώντας τους εναλλακτικούς συμβολισμούς μας για την παράγωγο, ο κανόνας της αλυσίδας (για τον γενικό x , αντί του ειδικού ξ) γράφεται ως

$$\begin{aligned}D(g \circ f)(x) &= Dg(f(x))Df(x), \\ \frac{dg(f(x))}{dx} &= \frac{dg(y)}{dy} \Big|_{y=f(x)} \frac{df(x)}{dx}, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy} \Big|_{y=f(x)} \frac{dy}{dx}.\end{aligned}$$

5 Παραδείγματα παραγώγων - Β'

Παράδειγμα 1. Αν $f(x) = \tan x$, τότε $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2. Αν $f(x) = a^x$, τότε $f'(x) = a^x \ln a$.

$$\begin{aligned}f(x) &= a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Αν $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, τότε

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Παράδειγμα 4. Αν $f(x) = \sin(x^2 + 3)$, τότε $f'(x) = 2x \cos(x^2 + 3)$.

$$f(x) = (g \circ h)(x), \quad \text{όπου } g(x) = \sin x, \quad h(x) = x^2 + 3.$$

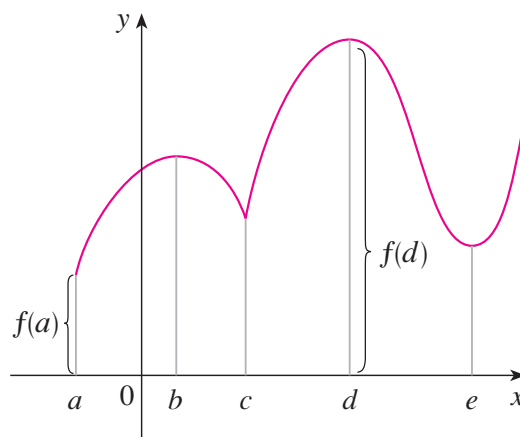
$$\Rightarrow f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \cos(h(x)) \cdot (x^2 + 3)' = \cos(x^2 + 3) \cdot 2x = 2x \cos(x^2 + 3).$$

6 Σημαντικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού

Ορισμός 6.1. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a, b) και έστω $\xi \in (a, b)$. Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού μεγίστου** της $y = f(x)$ αν $f(\xi) \geq f(x)$, για « x κοντά στο ξ ». (Αυτό σημαίνει ότι $f(\xi) \geq f(x)$, για όλα τα x σε κάποιο ανοιχτό διάστημα που περιέχει το ξ .) Ανάλογα, ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ελαχίστου** της $y = f(x)$ αν $f(\xi) \leq f(x)$, για x κοντά στο ξ .

Λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο τοπικού ακροτάτου** της $y = f(x)$ αν είναι σημείο είτε τοπικού μεγίστου είτε τοπικού ελαχίστου.

Αν μια συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή σε κάποιο σημείο, τότε αυτό ονομάζεται σημείο (ολικού) μεγίστου (και, προφανώς, αυτό είναι και σημείο τοπικού μεγίστου). Ανάλογα, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, τότε αυτό ονομάζεται σημείο (ολικού) ελαχίστου (και είναι προφανώς και σημείο τοπικού ελαχίστου).

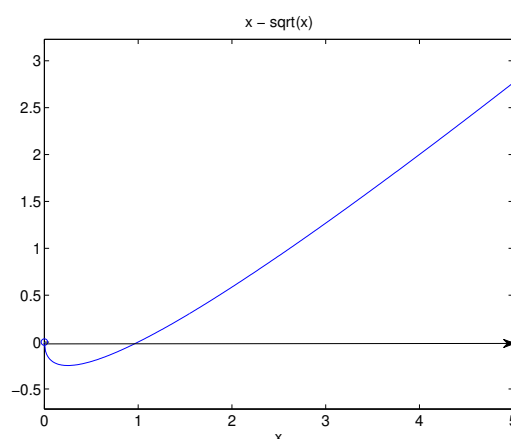
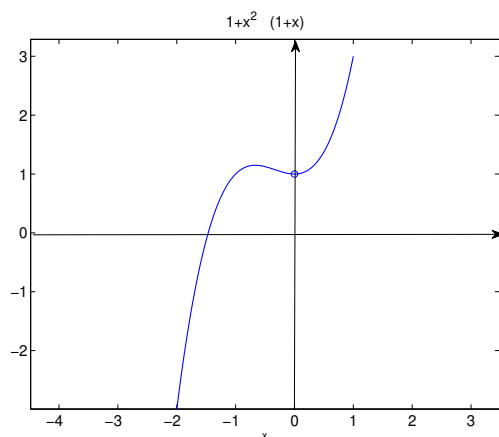


Σχήμα 2: Σημεία τοπικού μεγίστου και τοπικού ελαχίστου.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2 δίνεται το γράφημα μιας συνάρτησης f που παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x = a$, (ολικό) μέγιστο στο $x = d$, τοπικό μέγιστο στο $x = b$, και τοπικό ελάχιστο στο $x = e$.

Παραδείγματα.

1. Έστω $f(x) = 1 + x^2(x + 1)$ (το γράφημα της f δίνεται στο Σχήμα 3 αριστερά). Παρατηρήστε ότι το 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $f(x)$ αφού $1 + x^2(1 + x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$. Βεβαίως το 0 δεν είναι σημείο ολικού ελαχίστου αφού, π.χ., για $x = -2$, το $f(-2) = -3 < 1 = f(0)$.



Σχήμα 3: Γραφήματα της $f(x) = 1 + x^2(x + 1)$ (αριστερά), και $g(x) = x - \sqrt{x}$ (δεξιά).

2. Έστω $g(x) = x - \sqrt{x}$ (το γράφημα της g δίνεται στο Σχήμα 3 δεξιά). Παρατηρήστε ότι το 0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $g(x)$ αφού $x - \sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(0)$ για κάθε $x \in [0, 1)$. Το 0 δεν είναι σημείο ολικού μεγίστου αφού, π.χ., για $x = 4$, το $g(4) = 2 > 0 = g(0)$.

Το πρώτο σημαντικό θεώρημα είναι το εξής.

Θεώρημα 6.1 (Θεώρημα του Fermat). Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και έστω $\xi \in (a, b)$. Αν το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου της f , τότε

- (i) είτε δεν υπάρχει η παράγωγος της $y = f(x)$ στο ξ ,
- (ii) είτε υπάρχει η παράγωγος της $y = f(x)$ στο ξ και ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρικά το Θεώρημα του Fermat ερμηνεύεται ως εξής: Αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το ξ , που είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f , τότε είτε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$, είτε υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία και η κλίση της είναι ίση με 0 (δηλαδή είναι οριζόντια).

Το Θεώρημα του Fermat έχει την ακόλουθη συνέπεια: Αν ψάχνουμε τα σημεία τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα, τότε αρκεί να τα αναζητήσουμε ανάμεσα στα παρακάτω σημεία:

- Τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος,

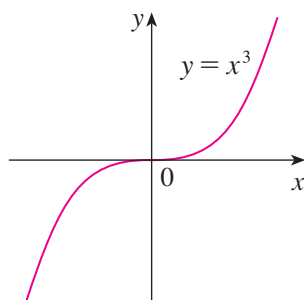
- τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο, και
- τα σημεία στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0.

Κανένα άλλο σημείο δεν είναι υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παραδείγματα.

1. Το 0 είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης $f(x) = |x|$, η οποία είναι ορισμένη σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$, αλλά η συνάρτηση αυτή δεν έχει παράγωγο στο 0.
2. Το 0 είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης $g(x) = x^2$, η οποία είναι ορισμένη σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Η παράγωγος της συνάρτησης στο 0 είναι, πράγματι, $g'(0) = 0$.

Παρατήρηση: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ (βλ. Σχήμα 4). Στο $\xi = 0$, $f'(0) = 0$, αλλά το $\xi = 0$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος Fermat.



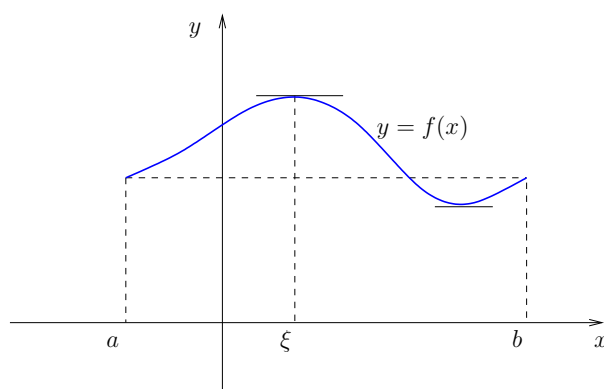
Σχήμα 4: Γράφημα της $f(x) = x^3$.

Το επόμενο σημαντικό θεώρημα είναι το

Θεώρημα 6.2 (Θεώρημα του Rolle). Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και ότι έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (a, b) . Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει κάποιος $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

Το Θεώρημα του Rolle εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $\xi \in (a, b)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$, αλλά δεν μας λέει τίποτα για το πώς να εντοπίσουμε ένα τέτοιο ξ . Επίσης, αν η f στο Θεώρημα του Rolle δεν έχει παράγωγο έστω και σε ένα μόνο σημείο του (a, b) , υπάρχει περίπτωση να μην υπάρχει κανένα ξ στο (a, b) ώστε $f'(\xi) = 0$. Για παράδειγμα, η $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ και $f(-1) = f(1) = 1$. Δεν υπάρχει όμως κανένα $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

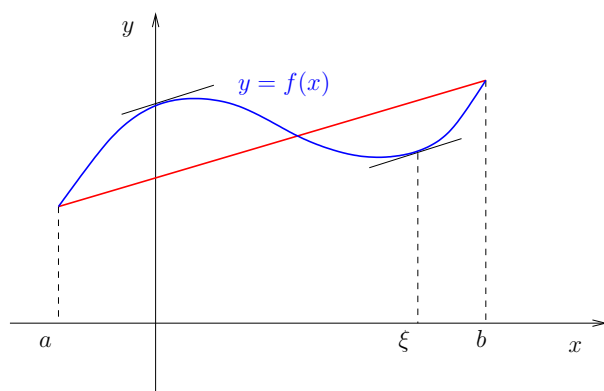
Το επόμενο είναι το τρίτο σημαντικό θεώρημα.



Σχήμα 5: Θεώρημα του Rolle.

Θεώρημα 6.3 (Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange)). Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και ότι έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (a, b) . Τότε υπάρχει κάποιο $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Σχήμα 6: Θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange).

Γεωμετρικά, το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) ερμηνεύεται ως εξής: Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) , τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημά της σε κάποιο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει την ίδια κλίση και, άρα, είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

6.1 Εφαρμογές (Τι μας λέει η παράγωγος μιας συνάρτησης για τη συνάρτηση;)

Η ακόλουθη πρόταση είναι εφαρμογή του Θεωρήματος 6.3.

Πρόταση 6.1. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I . Τότε

1. Η f είναι σταθερή στο I αν και μόνο αν $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I .
2. Η f είναι αύξουσα στο I αν και μόνο αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I .
(Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.)
3. Η f είναι φθίνουσα στο I αν και μόνο αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I .
(Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.)

Επίσης, η επόμενη πρόταση μας βοηθάει να αναγνωρίσουμε το είδος των σημείων τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης.

Πρόταση 6.2. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα (a, b) , και $\xi \in (a, b)$.

1. Αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f .
2. Αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f .

Παράδειγμα. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^2(x-1)^2$. Τότε $f'(x) = 2x(x-1)(2x-1)$. Άρα $f'(x) < 0$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (1/2, 1)$, ενώ $f'(x) > 0$ για $x \in (0, 1/2) \cup (1, +\infty)$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(1/2, 1)$, και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0, 1/2)$ και $(1, +\infty)$. Όλα αυτά συνοψίζονται στον πίνακα και τη γραφική παράσταση του Σχήματος 7.

7 Δεύτερη παράγωγος

Ορισμός 7.1. Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το ξ , και η παράγωγος $y = f'(x)$ έχει και αυτή παράγωγο στο ξ , δηλαδή υπάρχει το όριο

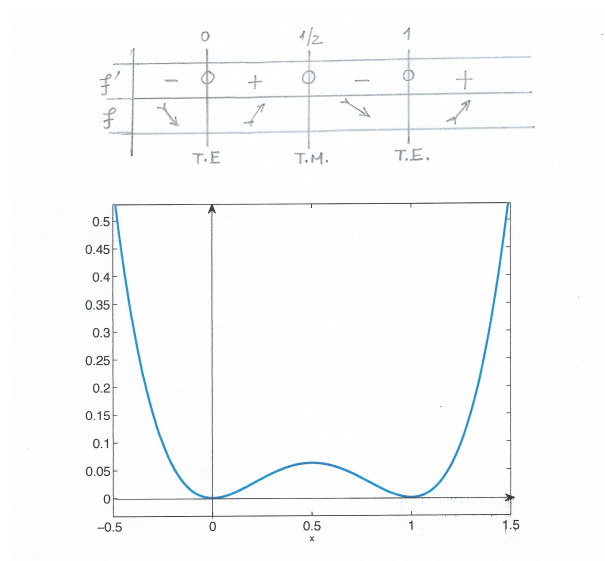
$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi},$$

τότε το όριο αυτό λέγεται δεύτερη παράγωγος της f στο ξ . Συμβολίζουμε τη δεύτερη παράγωγο ως

$$f''(\xi) \quad \text{ή} \quad D^2 f(\xi) \quad \text{ή} \quad \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=\xi} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}.$$

Σημειώστε ότι ανάλογα ορίζουμε την τρίτη παράγωγο ως την πρώτη παράγωγο της δεύτερης παραγώγου και, γενικά ορίζουμε ως n -οστή παράγωγο την πρώτη παράγωγο της $(n-1)$ -οστής παραγώγου. Για την n -οστή παράγωγο χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$f^{(n)}(\xi) \quad \text{ή} \quad D^n f(\xi) \quad \text{ή} \quad \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=\xi} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(\xi)}{x - \xi}.$$



Σχήμα 7: Γράφημα της $f(x) = x^2(x-1)^2$.

7.1 Εφαρμογές δεύτερης παραγώγου

Τοπικά ακρότατα συνάρτησης. Στην ακόλουθη πρόταση δίνεται ένα απλό κριτήριο για να ελέγχουμε αν ένας αριθμός είναι σημείο τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης.

Πρόταση 7.1. Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b) , $\xi \in (a, b)$ και η $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο στον ξ .

1. Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.
2. Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι **κυρτή** στο διάστημα I (ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) αν για κάθε x_1, x_2 στο I με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$, βλ. Σχήμα 8 (αριστερά).

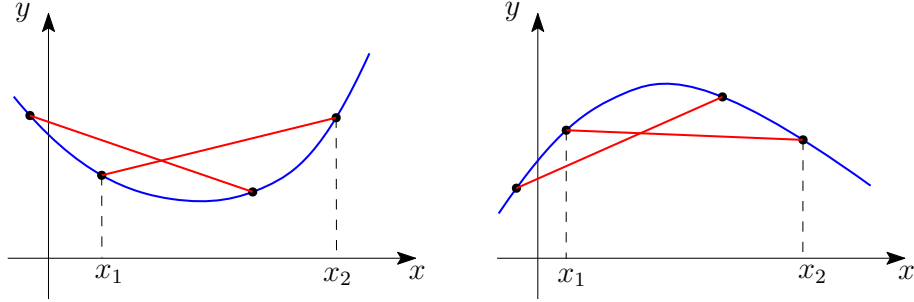
Θα λέμε ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι **κοίλη** στο διάστημα I (ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) αν για κάθε x_1, x_2 στο I με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$, βλ. Σχήμα 8 (δεξιά).

Στη συνέχεια, θα διατυπώσουμε σε μαθηματική γλώσσα τις έννοιες της κυρτής και της κοίλης συνάρτησης. Προφανώς, η εξίσωση της ευθείας (l) που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ είναι η

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Τώρα, αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε $x \in [x_1, x_2]$, τότε το σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$ θα βρίσκεται κάτω από το αντίστοιχο σημείο (x, y) της ευθείας (l) αν και μόνον αν

$$f(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) + f(x_1). \quad (1)$$



Σχήμα 8: Γράφημα κυρτής συνάρτησης (αριστερά), κοίλης συνάρτησης (δεξιά).

Άρα, θα λέμε ότι η $y = f(x)$ είναι κυρτή σε ένα διάστημα I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε x στο $[x_1, x_2]$ ισχύει η ανισότητα (1).

Ακολουθώντας τον ίδιο ακριβώς συλλογισμό, θα λέμε ότι η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο διάστημα I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε x στο $[x_1, x_2]$ ισχύει η ανισότητα

$$f(x) \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) + f(x_1). \quad (2)$$

Θα δούμε άλλον έναν τρόπο για να διατυπώσουμε τις ανισότητες (1) και (2), που χαρακτηρίζουν τις κυρτές και κοίλες συναρτήσεις. Καταρχήν, εύκολα διαπιστώνουμε ότι για κάθε $t \in [0, 1]$ ο αριθμός $x = (1-t)x_1 + tx_2$ βρίσκεται ανάμεσα στους x_1 και x_2 . Αντιστρόφως, για κάθε x που βρίσκεται ανάμεσα στους x_1 και x_2 υπάρχει μοναδικό $t \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $x = (1-t)x_1 + tx_2$. Για να το δούμε αυτό, λύνουμε ως προς t και βρίσκουμε $t = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, ο οποίος ανήκει στο $[0, 1]$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε την ανισότητα (1) στη μορφή

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (f(x_2)-f(x_1))t + f(x_1) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Συνεπώς, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τον ορισμό της κυρτότητας ως εξής: Η $y = f(x)$ είναι κυρτή σε ένα διάστημα I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε x στο $[x_1, x_2]$ ισχύει η ανισότητα

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (3)$$

Εντελώς ανάλογα, θα λέμε ότι η $y = f(x)$ είναι κοίλη αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε x στο $[x_1, x_2]$ ισχύει

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (4)$$

(Αν $x_1 = x_2$, οι (3) και (4) ισχύουν ως ισότητες.)

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$.)

$$\begin{aligned} f((1-t)x_1 + tx_2) &= ((1-t)x_1 + tx_2)^2 = (1-t)^2x_1^2 + 2x_1x_2t(1-t) + t^2x_2^2 \\ &\leq (1-t)^2x_1^2 + (x_1^2 + x_2^2)t(1-t) + t^2x_2^2 \\ &= [(1-t)^2 + t(1-t)]x_1^2 + [t(1-t) + t^2]x_2^2 = (1-t)x_1^2 + tx_2^2. \end{aligned}$$

(2) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, για κάθε $t \in [0, 1]$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = |(1-t)x_1 + tx_2| \leq (1-t)|x_1| + t|x_2| = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

□

Οι ακόλουθες δύο προτάσεις δίνουν κριτήρια για το πότε μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα.

Πρόταση 7.2. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I .

1. Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο $I \Leftrightarrow$ η παράγωγος f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I .
2. Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο $I \Leftrightarrow$ η παράγωγος f' είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του I .

Πρόταση 7.3. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει δεύτερη παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I .

1. Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I .
2. Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I .

Σημεία καμπής. Έστω ότι η $y = f(x)$ ορίζεται στο διάστημα (a, b) , $\xi \in (a, b)$, και η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ . Αν η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο $(a, \xi]$ και κοίλη στο $[\xi, b)$ ή, αντιθέτως, αν είναι κοίλη στο $(a, \xi]$ και κυρτή στο $[\xi, b)$, τότε ο ξ είναι **σημείο καμπής** της συνάρτησης.

Πρόταση 7.4. Έστω ότι η $y = f(x)$ ορίζεται στο διάστημα (a, b) , $\xi \in (a, b)$, και η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ . Αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε x στο $(a, \xi]$ και $f''(x) \leq 0$ για κάθε x στο $[\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης. Ανάλογα, αν $f''(x) \leq 0$ για κάθε x στο $(a, \xi]$ και $f''(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[\xi, b)$, τότε και πάλι ο ξ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.

8 Η έννοια του διαφορικού μιας συνάρτησης

Ας θυμηθούμε ξανά τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης $y = f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

όπου $\Delta x = h$ και $\Delta y = f(x+h) - f(x)$.

Τώρα, σταθεροποιούμε το x , αφήνουμε το h να μεταβάλλεται και ορίζουμε την ποσότητα

$$\epsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x). \quad (5)$$

Προφανώς

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Η ποσότητα $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ εκφράζει τη μεταβολή που επιφέρουμε στην εξαρτημένη μεταβλητή y όταν μεταβάλλουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή x κατά την ποσότητα $\Delta x = h$. Από την (5) έχουμε:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon \Delta x,$$

οπότε η μεταβολή Δy είναι το άθροισμα δύο όρων: α) του $f'(x)\Delta x$ που είναι ανάλογος του Δx , και β) του $\epsilon \Delta x$ που μπορεί να γίνει όσο μικρός θέλουμε σε σχέση με το Δx , επιλέγοντας το Δx να είναι αρκούντως μικρό.

Αυτόν τον κυρίαρχο πρώτο όρο θα τον ονομάζουμε **διαφορικό** dy της y και θα γράφουμε

$$dy = df(x) = f'(x) \Delta x. \quad (6)$$

Άρα για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f και κάθε σταθερό x το διαφορικό είναι μια καλώς ορισμένη γραμμική συνάρτηση του $h = \Delta x$.

Παράδειγμα. Για τη συνάρτηση $y = x^2$ έχουμε:

$$dy = d(x^2) = 2x \Delta x = 2xh.$$

□

Παρατηρήστε ότι στην ειδική περίπτωση όπου θεωρήσουμε τη συνάρτηση $y = x$, της οποίας η παράγωγος ισούται με 1, έχουμε ότι:

$$dy = dx = 1 \Delta x = \Delta x.$$

Άρα, όταν το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, είναι συνεπές με τον ορισμό μας να γράφουμε dx αντί για Δx .

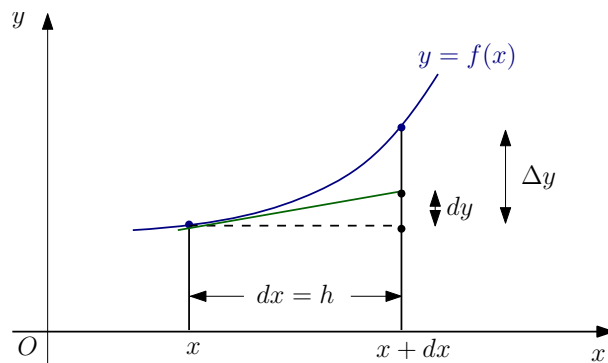
Επομένως, το διαφορικό οποιασδήποτε συνάρτησης $y = f(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$dy = df(x) = f'(x) dx. \quad (7)$$

Επιπλέον, η μεταβολή Δy της εξαρτημένης μεταβλητής γράφεται πλέον στη μορφή:

$$\Delta y = f'(x) dx + \epsilon dx = dy + \epsilon dx,$$

και βλέπουμε ότι διαφέρει από το διαφορικό dy κατά τον όρο ϵdx , ο οποίος εν γένει δεν είναι ίσος με το μηδέν.



Σχήμα 9: Η μεταβολή Δy και το διαφορικό dy .

Παράδειγμα. Για την $y = x^2$ έχουμε:

$$dy = 2x dx$$

και

$$\Delta y = (x + dx)^2 - x^2 = 2x dx + (dx)^2 = dy + \epsilon dx,$$

όπου $\epsilon = dx$. □

Σημειώνουμε ότι, μέχρι στιγμής, είχαμε χρησιμοποιήσει το σύμβολο dy/dx για την παράγωγο καθαρά συμβολικά. Μετά από τη συζήτηση που κάναμε για τα διαφορικά μπορούμε πια να θεωρήσουμε την παράγωγο ως πηλίκο των διαφορικών dy και dx (που δεν είναι τίποτα άλλο από καλώς ορισμένες γραμμικές συναρτήσεις του h).

Τέλος, αν ξαναγράψουμε τη σχέση μεταξύ της μεταβολής $\Delta y = f(x + h) - f(x)$ και του διαφορικού της f στη μορφή

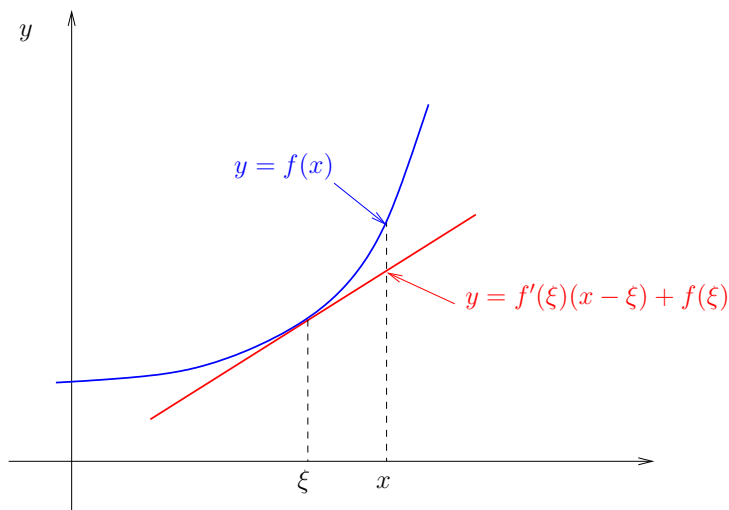
$$f(x + h) = f(x) + h f'(x) + \epsilon h,$$

παρατηρούμε ότι η έκφραση $f(x + h)$, αν τη δούμε ως συνάρτηση του h , γράφεται ως άθροισμα της γραμμικής συνάρτησης $f(x) + h f'(x)$ και του όρου ϵh , ο οποίος μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρός θέλουμε σε σχέση με το h αν επιλέξουμε το h να είναι αρκούντως μικρό. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι προσεγγίζουμε την καμπύλη από την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο x , βλ. Σχήμα 9.

9 Θέματα προσέγγισης

Είδαμε μέχρι τώρα ότι μια καμπύλη και η εφαπτόμενη της ευθεία σε ένα σημείο της καμπύλης δεν «απέχουν πολύ» στην περιοχή κοντά στο σημείο επαφής. Π.χ. στο Σχήμα 10, καθώς το x πλησιάζει κοντά στο ξ , το $f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ πλησιάζει στο $f(x)$, δηλαδή

$$f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi). \quad (8)$$



Σχήμα 10: Εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Το γεγονός αυτό μας δίνει την εξής ιδέα: Αν γνωρίζουμε την τιμή μιας συνάρτησης $f(\xi)$ στο σημείο ξ , μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγίσεις των τιμών $f(x)$ της συνάρτησης για σημεία x που βρίσκονται κοντά στο ξ χρησιμοποιώντας την (8). Η προσέγγιση (8) καλείται η **γραμμική προσέγγιση της f στο ξ** . Η γραμμική συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι η εφαπτομένη ευθεία, δηλαδή, η

$$\ell(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi),$$

λέγεται **γραμμικοποίηση της f στο ξ** .

Παράδειγμα. Υπολογίστε προσεγγιστικά την $\sqrt{3.98}$ γραμμικοποιώντας τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+3}$ στο $\xi = 1$.

Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$, επομένως

$$f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) = f(1) + f'(1)(x - 1) \Rightarrow f(x) \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 1). \quad (9)$$

Άρα

$$\sqrt{3.98} = \sqrt{0.98 + 3} = f(0.98) \stackrel{(9)}{\approx} 2 + \frac{1}{4}(0.98 - 1) = 1.995.$$

Σημειώστε ότι η ακριβής τιμή είναι $\sqrt{3.98} = 1.994\,993\,73 \dots$ □

Αποδεικνύεται ότι κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε το σφάλμα της προσέγγισης (8). Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι αν f, f' είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα μεταξύ των ξ και x και υπάρχει η f'' στο ανοικτό διάστημα μεταξύ των ξ και x , τότε

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \frac{(x - \xi)^2}{2}f''(\eta), \quad (10)$$

όπου το η είναι ένας αριθμός μεταξύ των ξ και x . Η (10) λέγεται **τύπος του Taylor με τετραγωνικό σφάλμα**.

Ανάλογα, αν f, f', f'' είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα μεταξύ των ξ και x και υπάρχει η f''' στο ανοικτό διάστημα μεταξύ των ξ και x , τότε

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \frac{(x - \xi)^2}{2}f''(\xi) + \frac{(x - \xi)^3}{6}f'''(\nu), \quad (11)$$

όπου το ν είναι ένας αριθμός μεταξύ των ξ και x . Η (11) λέγεται τύπος του Taylor με κυβικό σφάλμα.

Ο γενικός **τύπος του Taylor** για μια συνάρτηση f τέτοια ώστε οι $f, f', \dots, f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα μεταξύ των ξ και x και υπάρχει η $f^{(n+1)}$ στο ανοικτό διάστημα μεταξύ των ξ και x είναι

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \frac{(x - \xi)^2}{2!}f''(\xi) + \dots + \frac{(x - \xi)^n}{n!}f^{(n)}(\xi) + \frac{(x - \xi)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(\eta), \quad (12)$$

όπου το η είναι ένας αριθμός μεταξύ των ξ και x .

Τη σχέση (12) μπορούμε να τη γράψουμε και στη μορφή

$$f(x) = P_n(x; \xi) + R_n(x; \xi), \quad (13)$$

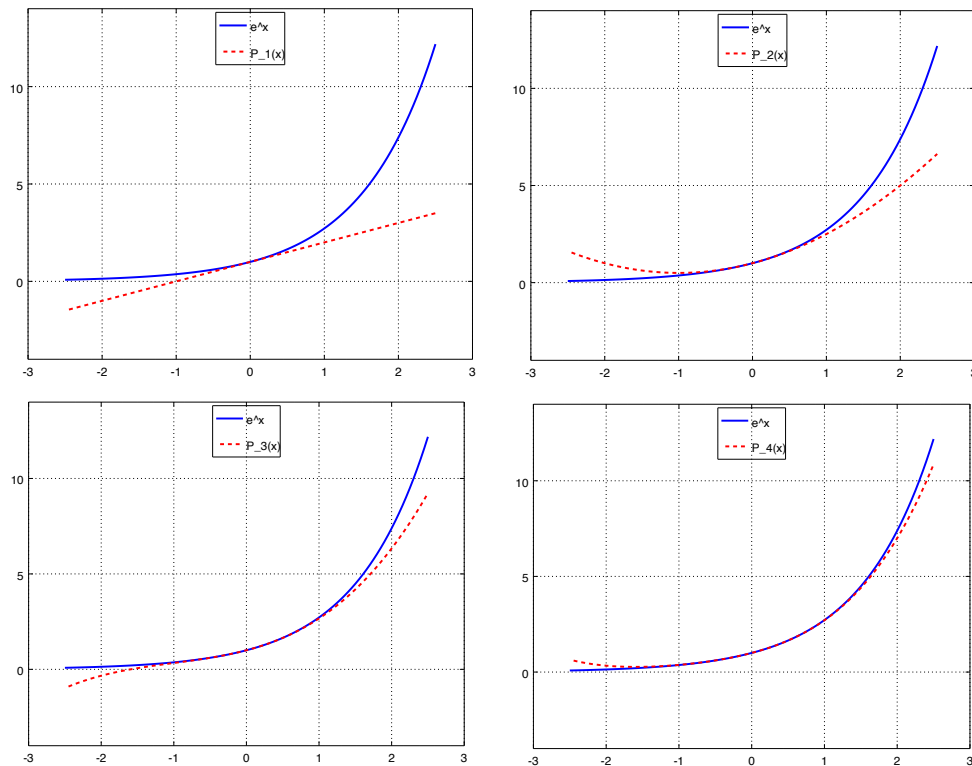
όπου

$$\begin{aligned} P_n(x; \xi) &= f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \dots + \frac{(x - \xi)^n}{n!}f^{(n)}(\xi) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x - \xi)^k, \end{aligned} \quad (14)$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n που ονομάζεται **πολυώνυμο Taylor** της συνάρτησης f για τιμές του x κοντά στο ξ , και η ποσότητα

$$R_n(x; \xi) = \frac{(x - \xi)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(\eta), \quad (15)$$

λέγεται **υπόλοιπο Taylor**. Ουσιαστικά, το υπόλοιπο Taylor μας δίνει μια ιδέα για το σφάλμα που θα κάνουμε αν προσεγγίσουμε μια (πολύπλοκη) συνάρτηση f με το πολυώνυμο Taylor βαθμού n που δίνεται στη σχέση (14).



Σχήμα 11: Το γράφημα της $f(x) = e^x$ και του πολυνύμου Taylor $P_n(x)$ για $n = 1$ (πάνω αριστερά), $n = 2$ (πάνω δεξιά), $n = 3$ (κάτω αριστερά), $n = 4$ (κάτω δεξιά).

Παράδειγμα. Θα χρησιμοποιήσουμε το πολυνώνιο Taylor για να προσεγγίσουμε τιμές της συνάρτησης $f(x) = e^x$ για x κοντά στο 0.

Το πολυνώνιο (14) για $f(x) = e^x$ και $\xi = 0$ παίρνει τη μορφή:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Στο Σχήμα 11 σχεδιάζουμε (από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά) τις γραφικές παραστάσεις της εκθετικής συνάρτησης e^x και των προσεγγίσεών της με τα πολυνώνια Taylor βαθμού 1 έως 4. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει ο βαθμός του πολυνύμου η προσέγγιση γίνεται ολοένα και καλύτερη αλλά μόνον για τιμές του x κοντά στο 0. Π.χ., αν επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε την τιμή e^4 με το πολυνώνιο Taylor βαθμού 4 θα έχουμε:

$$e^4 = 54.59815 \approx 1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6} + \frac{4^4}{24} = 34.33333.$$

Η προσέγγιση αυτή έχει σχετικό σφάλμα¹ περίπου 37%! Τα αποτελέσματα αυτά υποδεικνύουν ότι η προσέγγιση μιας συνάρτησης με πολυνώνιο Taylor είναι μια «τοπική» διαδικασία,

¹Υπενθυμίζουμε ότι ως σχετικό σφάλμα ορίζουμε το πηλίκο $\frac{|\text{ακριβής τιμή} - \text{προσεγγιστική τιμή}|}{|\text{ακριβής τιμή}|}$, ενώ ως απόλυτο σφάλμα την ποσότητα $|\text{ακριβής τιμή} - \text{προσεγγιστική τιμή}|$. Παρατηρήστε ότι το σχετικό σφάλμα δεν ορίζεται αν η ακριβής τιμή είναι 0.

υπό την έννοια ότι δίνει καλά αποτελέσματα για τιμές του x κοντά στο ξ , δηλαδή στην περίπτωση μας κοντά στο 0. □

10 Απροσδιόριστες μορφές: Κανόνας Ι' Hopitâl

Ο πρώτος κανόνας του Ι' Hopitâl μας βοηθάει στον υπολογισμό ορίων της απροσδιόριστης μορφής $\frac{0}{0}$.

Πρόταση 10.1 (Πρώτος Κανόνας Ι' Hopitâl). Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα I (εκτός πιθανώς από το σημείο ξ που περιέχεται στο I) και ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0.$$

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή. Δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ο δεύτερος κανόνας του Ι' Hopitâl μας βοηθάει στον υπολογισμό ορίων της απροσδιόριστης μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Πρόταση 10.2 (Δεύτερος Κανόνας Ι' Hopitâl). Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα I (εκτός πιθανώς από το σημείο ξ που περιέχεται στο I) και ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad -\infty.$$

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή. Δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

(Παρατηρήστε ότι στις υποθέσεις του Δεύτερου Κανόνα του Ι' Hopitâl δεν αναφέρεται αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ ούτε το ποιά ακριβώς είναι η τιμή του (αν αυτό υπάρχει). Επομένως, οι απροσδιόριστες μορφές $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι ειδικές περιπτώσεις του Δεύτερου Κανόνα του Ι' Hopitâl, όπως τον διατυπώσαμε.)

11 Παραμετρικές εξισώσεις καμπύλης

Θεωρούμε δυο συναρτήσεις $x = f(t)$ και $y = g(t)$ συνεχείς σε κάποιο διάστημα I της μεταβλητής t . Το σύνολο C των σημείων $(x, y) = (f(t), g(t))$ του επιπέδου, όταν η μεταβλητή t διατρέχει το διάστημα I , χαρακτηρίζεται καμπύλη στο επίπεδο. Οι συναρτήσεις $x = f(t)$ και $y = g(t)$ που περιγράφουν την καμπύλη C λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης**, ενώ η μεταβλητή t ονομάζεται παράμετρος της καμπύλης.

Πολλές φορές η παράμετρος t δηλώνει χρόνο, οπότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε το σημείο $(x, y) = (f(t), g(t))$ ως τη θέση ενός κινούμενου σωματιδίου πάνω στην καμπύλη C στη χρονική στιγμή t .

Έστω x και y παραγωγίσιμες συναρτήσεις του t και $\frac{dx}{dt} \neq 0$ για $t \in I$. Τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η $x = f(t)$ ορίζει έμμεσα το t ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x , ας πούμε $t = h(x)$. Τότε η $y = g(t) = g(h(x))$ είναι επίσης παραγωγίσιμη συνάρτηση του x ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Παράδειγμα 1. Θεωρήστε την καμπύλη $x = 2t + 3, y = t^2 - 1$. Τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{2} = t = \frac{x-3}{2}.$$

Παράδειγμα 2. Σχεδιάστε την τροχιά που διαγράφει το σημείο $P(x, y)$ αν $x = t + \frac{1}{t}, y = t - \frac{1}{t}, t > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}x + y &= t + \frac{1}{t} + t - \frac{1}{t} = 2t, \\x - y &= t + \frac{1}{t} - t + \frac{1}{t} = \frac{2}{t}.\end{aligned}$$

Επομένως,

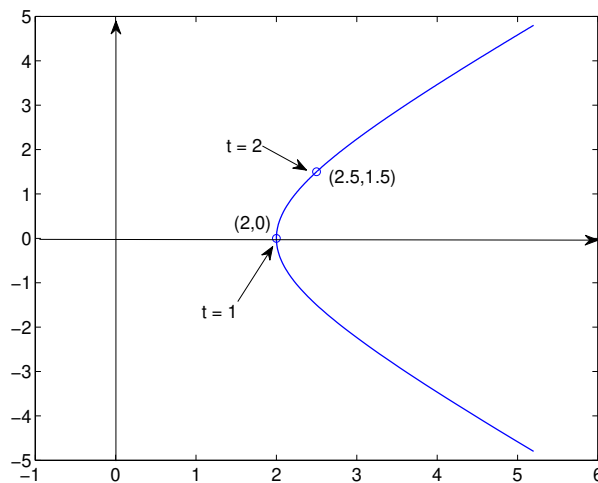
$$x - y = \frac{2}{t} = \frac{2}{\frac{x+y}{2}} \Rightarrow (x - y)(x + y) = 4 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4.$$

Άρα η ζητούμενη καμπύλη είναι υπερβολή, βλ. Σχήμα 12.

Αν θέλω την κλίση σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης εκτός από το $t = 1$ (κατακόρυφη εφαπτομένη) χρησιμοποιώ τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{1 - \frac{1}{t^2}} = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}.$$

Παράδειγμα 3. Αν $x^2 + y^2 = 25$ υπολογίστε την $\frac{dy}{dx}$. Στη συνέχεια βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $(3, 4)$.



Σχήμα 12: Υπερβολή $x^2 - y^2 = 4$.

Έχουμε

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0. \quad (16)$$

Όμως το y είναι συνάρτηση του x , οπότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2) \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}.$$

Επομένως, από την (16) έχουμε

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

οπότε για $x = 3$ ($y = 4$) έχουμε $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$.

Άρα, η εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο στο σημείο $(3, 4)$ θα έχει εξίσωση:

$$y - 4 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=3} (x - 3) \Leftrightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Leftrightarrow 3x + 4y = 25.$$

12 Εφαρμογές παραγώγων – Προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ορισμένα παραδείγματα προβλημάτων υπολογισμού μεγίστων και ελαχίστων.

Παράδειγμα 1. Βρείτε δύο αριθμούς των οποίων το άθροισμα είναι 20, και έχουν το μεγαλύτερο δυνατό γινόμενο.

Λύση. Αν ο ένας αριθμός είναι x , τότε ο άλλος είναι $20 - x$. Ας παραστήσουμε το γινόμενο τους ως μια συνάρτηση, έστω f . Τότε

$$f(x) = x(20 - x).$$

Επειδή θέλουμε οι αριθμοί να είναι θετικοί, πρέπει $x \geq 0$ και $20 - x \geq 0$, άρα $0 \leq x \leq 20$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0, 20]$. Αναζητούμε σημεία μεγίστου της f , άρα θα υπολογίσουμε ρίζες της παραγώγου f' . Έχουμε

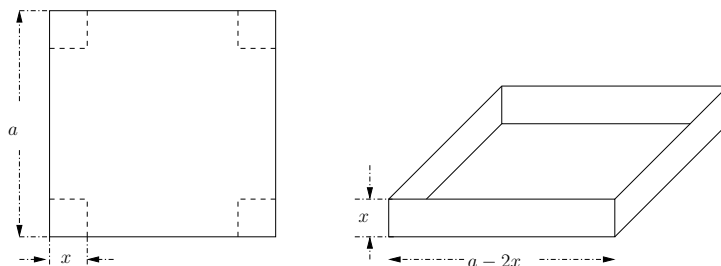
$$f'(x) = 20 - 2x = 2(10 - x). \quad \text{Άρα } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Συνεπώς το ολικό μέγιστο θα επιτυγχάνεται είτε στα άκρα του διαστήματος ή στο σημείο $x = 10$, δηλαδή είναι ένας από τους τρεις αριθμούς

$$f(0) = 0, \quad f(10) = 10(20 - 10) = 100, \quad f(20) = 0.$$

Άρα η f παίρνει μέγιστη τιμή για $x = 10$, και οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 10 και 10. □

Παράδειγμα 2. Έχουμε ένα τετράγωνο χαρτόνι πλευράς a . Από κάθε γωνία του, κόβουμε ένα τετράγωνο πλευράς x και το διπλώνουμε, όπως στο ακόλουθο σχήμα, ώστε να φτιάξουμε ένα κουτί. Ποιό πρέπει να είναι το μέγεθος του τετραγώνου που θα κόψουμε από κάθε γωνία έτσι ώστε το κουτί να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο όγκο;



Λύση. Αν x είναι η πλευρά του τετραγώνου που θα κόψουμε, τότε ο όγκος του κουτιού θα δίνεται από τον τύπο: (εμβαδό βάσης) $\times$ (ύψος), και άρα ως συνάρτηση του x θα είναι

$$V(x) = x(a - 2x)^2 = a^2x - 4ax^2 + 4x^3, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

Η πρώτη παράγωγος είναι

$$V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2 = (a - 2x)(a - 6x).$$

Άρα $V'(x) = 0$ όταν $x = a/6$ ή $x = a/2$. Από αυτά μόνον το $x = a/6$ ανήκει στο εσωτερικό του διαστήματος $[0, a/2]$.

Για τη δεύτερη παράγωγο έχουμε

$$V''(x) = -8a + 24x. \quad \text{Άρα } V''(x) = 0 \Leftrightarrow x = a/3.$$

Τα στοιχεία αυτά καθώς και το πρόσημο των V' , V'' συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$
f'	+	0	-	-
f''	-		-	0
f	$\nearrow \cup$		$\searrow \cup$	$\searrow \cup$

Άρα το μέγιστο λαμβάνεται για $x = a/6$. □

Παράδειγμα 3. Ένας παραγωγός μπορεί να πουλήσει έναν αριθμό x προϊόντων την εβδομάδα στην τιμή $P = 200 - 0.01x$ €, το ένα, ενώ το κόστος για την παραγωγή των x προϊόντων είναι $y = 50x + 20000$ €. Πόσα προϊόντα πρέπει να πουλήσει ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος; *Λύση.* Τα εβδομαδιαία έσοδα από την πώληση x προϊόντων είναι $xP = 200x - 0.01x^2$. Το κέρδος, ως συνάρτηση του x , είναι

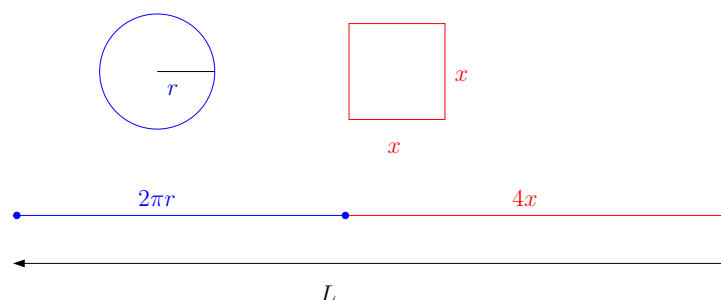
$$T(x) = xP - y = 200x - 0.01x^2 - 50x - 20000 = -0.01x^2 + 150x - 20000.$$

Προφανώς

$$T'(x) = -0.02x + 150. \quad \text{Άρα } T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 7500.$$

Για $x < 7500$, $T'(x) > 0$, και άρα η $T(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, ενώ για $x > 7500$, $T'(x) < 0$, και άρα η $T(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Συνεπώς η $T(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 7500$, οπότε αυτός είναι ο αριθμός των προϊόντων που πρέπει να πουλήσει ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος.

Παράδειγμα 4. Ένα σύρμα μήκους L χρησιμοποιείται για να κατασκευάσουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο. Πώς να μοιράσουμε το σύρμα ώστε τα δύο σχήματα να έχουν το μέγιστο εμβαδόν.



Λύση. Αν r είναι η ακτίνα του κύκλου και x η πλευρά του τετραγώνου, τότε το εμβαδόν των δύο σχημάτων είναι $A = \pi r^2 + x^2$. Προφανώς

$$L = 2\pi r + 4x \Leftrightarrow x = \frac{L - 2\pi r}{4}.$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε το εμβαδόν A ως συνάρτηση μόνο της ακτίνας r , δηλαδή

$$A(r) = \pi r^2 + \left(\frac{L - 2\pi r}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \left(L^2 - 4\pi Lr + 4\pi(4 + \pi)r^2 \right).$$

Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το r είναι $r = 0$, ενώ η μέγιστη είναι $2\pi r = L \Leftrightarrow r = \frac{L}{2\pi}$. Επομένως το πεδίο ορισμού της $A(r)$ είναι το $[0, \frac{L}{2\pi}]$.

Προφανώς

$$A'(r) = \frac{4\pi}{16} (2(4 + \pi)r - L). \quad \text{Άρα } A'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{L}{8 + 2\pi}.$$

Άρα για $0 < r < \frac{L}{8+2\pi}$, $A'(r) < 0$ και επομένως η $A(r)$ είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ για $\frac{L}{8+2\pi} < r < \frac{L}{2\pi}$, $A'(r) > 0$ και επομένως η $A(r)$ είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον,

$$A''(r) = \frac{\pi}{2}(4 + \pi) > 0,$$

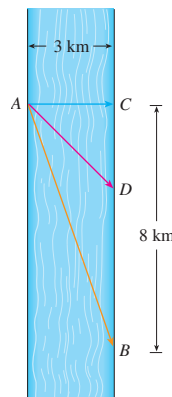
οπότε η $A(r)$ είναι κυρτή σε ολόκληρο το διάστημα $[0, \frac{L}{2\pi}]$.

Συνεπώς η $A(r)$ λαμβάνει μέγιστο σε ένα από τα δύο άκρα του διαστήματος, δηλ. στο $r = 0$ ή στο $r = \frac{L}{2\pi}$. Τώρα,

- για $r = 0$, ($x = \frac{L}{4}$) το $A(0) = \frac{L^2}{16}$, ενώ
- για $r = \frac{L}{2\pi}$, ($x = 0$) το $A(\frac{L}{2\pi}) = \frac{L^2}{4\pi}$.

Επειδή $\frac{L^2}{4\pi} > \frac{L^2}{16}$, έχουμε τη μέγιστη τιμή όταν $r = \frac{L}{2\pi}$. Δηλαδή δεν πρέπει να κόψουμε καθόλου το σύρμα, αλλά απλώς να το λυγίσουμε σε κύκλο. $\square$

Παράδειγμα 5. Ένας άνθρωπος ξεκινά με τη βάρκα του από το σημείο A της όχθης ενός ποταμού (σε σχήμα λωρίδας) πλάτους 3 km, και θέλει να φτάσει στο σημείο που βρίσκεται 8 km νοτιότερα στην αντίθετη όχθη όσο το δυνατόν νωρίτερα. Έχει δύο επιλογές, ή να κωπηλατήσει οριζόντια μέχρι το σημείο C και μετά να τρέξει μέχρι το σημείο B , ή να κωπηλατήσει σε ευθεία γραμμή μέχρι κάποιο σημείο D μεταξύ των C και B , και στη συνέχεια να τρέξει μέχρι το σημείο B . Αν υποθέσουμε ότι κωπηλατεί με ταχύτητα 6 km/h και τρέχει με 8 km/h, σε ποιο σημείο θα πρέπει να αφήσει τη βάρκα ώστε να φτάσει στο B όσο το δυνατόν γρηγορότερα;



Λύση. Έστω x η απόσταση $|CD|$. Τότε η απόσταση που πρέπει να διανύσει τρέχοντας είναι $|DB| = 8 - x$, και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα βρίσκουμε ότι $|AD| = \sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}$.

Για να υπολογίσουμε τους χρόνους που χρειάζεται για να διανύσει τις διάφορες αποστάσεις χρησιμοποιούμε τη σχέση «χρόνος = απόσταση/ταχύτητα». Άρα ο χρόνος που χρειάζεται για να κωπηλατήσει από το A έως το D είναι $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$, ενώ ο χρόνος που χρειάζεται για να τρέξει από το D έως το B είναι $\frac{8-x}{8}$. Άρα ο συνολικός χρόνος T ως συνάρτηση του x είναι

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}.$$

Το πεδίο ορισμού της $T(x)$ είναι το $[0, 8]$. Αναζητούμε τα σημεία ελαχίστου της $T(x)$. Έχουμε

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}.$$

Τώρα επειδή $x \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{x^2+9} \\ &\Leftrightarrow 16x^2 = 9(x^2+9) \Leftrightarrow 7x^2 = 81 \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Άρα τα υποψήφια σημεία ελαχίστου είναι τα άκρα του διαστήματος $x = 0$ και $x = 8$, και η ρίζα της παραγώγου $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$. Έχουμε

$$T(0) = 1.5, \quad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33, \quad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42.$$

Η μικρότερη τιμή εμφανίζεται για $x = 9/\sqrt{7}$, οπότε ο ελάχιστος χρόνος θα προκύψει αν κωπηλατήσει μέχρι το σημείο D που βρίσκεται $9/\sqrt{7}$ km, δηλαδή 3.4 km περίπου, νοτιότερα από το αρχικό σημείο. □

13 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Παραγωγίστε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x \cos x}$.

Λύση: Η f είναι σύνθεση των $g(x) = x \cos x$ και $h(x) = e^x$, δηλαδή

$$f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x \cos x) = e^{x \cos x}.$$

Άρα, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) g'(x) = e^{x \cos x} (x \cos x)' \\ &= e^{x \cos x} [x' \cos x + x(\cos x)'] = e^{x \cos x} (\cos x - x \sin x). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2. Αποδείξτε ότι $e^x \geq 1 + x$ για $x \geq 0$.

Λύση: Για να δείξουμε ότι $e^x \geq 1+x$ για $x \geq 0$, αρκεί, ισοδύναμα, να δείξουμε ότι $e^x - x - 1 \geq 0$ για $x \geq 0$. Θέτουμε

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

Τότε $f'(x) = e^x - 1$, και επειδή η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι $e^x \geq e^0 = 1$ για $x \geq 0$, συνεπώς $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$, για $x \geq 0$. Άρα η f είναι αύξουσα για $x \geq 0$, οπότε

$$f(x) \geq f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad \text{για } x \geq 0.$$

Παράδειγμα 3. Βρείτε ένα πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού μικρότερου ή ίσου του 3, που να έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ ίσο με 0, και τοπικό μέγιστο στο $x = -2$ ίσο με 3.

Λύση: Έστω ότι το πολυώνυμο βαθμού 3 είναι της μορφής

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Αφού η $p(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$, πρέπει $p'(1) = 0$, και επειδή παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -2$, πρέπει $p'(-2) = 0$. Επιπλέον, αφού η τιμή της στο $x = 1$ είναι 0, και στο $x = -2$ είναι 3 πρέπει $p(1) = 0$ και $p(-2) = 3$. Προφανώς

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Τώρα

$$p(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c + d = 0 \tag{17}$$

$$p(-2) = 3 \Leftrightarrow -8a + 4b - 2c + d = 3 \tag{18}$$

$$p'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0 \tag{19}$$

$$p'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a - 4b + c = 0 \tag{20}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη (18) - (17) και έχουμε

$$-9a + 3b - 3c = 3 \Leftrightarrow -3a + b - c = 1. \tag{21}$$

Τώρα, προσθέτοντας (21) + (19), έχουμε

$$3b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}, \tag{22}$$

ενώ προσθέτοντας (21) + (20), έχουμε

$$9 - 3b = 1 \stackrel{(22)}{\Leftrightarrow} 9a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{9}. \tag{23}$$

Αντικαθιστούμε τις (22), (23) στην (19)

$$c = -3a - 2b \Leftrightarrow c = -\frac{12}{9}. \tag{24}$$

Τέλος, από την (17) και τις (22)–(24), έχουμε

$$d = -a - b - c \Leftrightarrow d = \frac{7}{9}. \quad (25)$$

Συνεπώς το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το

$$p(x) = \frac{1}{9} (2x^3 + 3x^2 - 12x + 7).$$

Παράδειγμα 4. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$, και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

Λύση: Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και έχει ως πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3). \quad \text{Άρα} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 3.$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2). \quad \text{Άρα} \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

Έτσι κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα

	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$	
f'	−	0	−	−	0	+
f''	+	0	−	0	+	+
f						

Δηλαδή,

- στο $(-\infty, 0)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και στρέφει τα κοίλα άνω,
- στο $(0, 2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και στρέφει τα κοίλα κάτω,
- στο $(2, 3)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και στρέφει τα κοίλα άνω,
- στο $(3, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στρέφει τα κοίλα άνω.

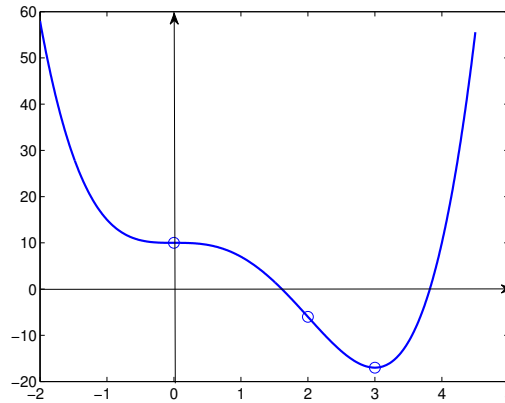
Υπολογίζουμε ορισμένες τιμές

$$f(0) = 10, \quad f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 10 = -6, \quad f(3) = -17.$$

Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της f . Παρατηρήστε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία στο διάστημα $(1, 2)$ και μία στο διάστημα $(3, 4)$.



□

Παράδειγμα 5. Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$

Λύση: Το πρώτο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Χρησιμοποιούμε τον πρώτο κανόνα l' Hopitâl και έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x + x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Το δεύτερο όριο είναι και αυτό απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Από κανόνα l' Hopitâl έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3x^2} = +\infty.$$

Το τρίτο όριο για $x \rightarrow 0^+$ είναι απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty) - (+\infty)$, ενώ για $x \rightarrow 0^-$ είναι απροσδιοριστία της μορφής $(-\infty) - (-\infty)$. Εργαζόμαστε ως εξής

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

□

Ασκήσεις

1. Αν $f(x) = 3x^2 - 5x$, υπολογίστε την $f'(2)$, και βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στην παραβολή $y = 3x^2 - 5x$ στο σημείο $(2, 2)$.

2. Ελέγξτε αν υπάρχει η $f'(0)$ με

$$(i) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \quad \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{αν } x = 0 \end{cases}, \quad (ii) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{αν } x = 0 \end{cases}.$$

3. Παραγωγίστε τις ακόλουθες συναρτήσεις

$$(i) \quad f(x) = 2 - \frac{2}{3}x.$$

$$(ii) \quad g(x) = \frac{3}{4}x^8.$$

$$(iii) \quad h(x) = \frac{\sqrt{10}}{x^7}.$$

$$(iv) \quad s(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

$$(v) \quad t(x) = \frac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

$$(vi) \quad u(x) = \frac{x^2}{1 + 2x}.$$

4. Παραγωγίστε τις ακόλουθες συναρτήσεις

$$(i) \quad f(x) = \frac{1 + \sin x}{x + \cos x}.$$

$$(ii) \quad g(x) = \frac{\sin x}{x^2}.$$

$$(iii) \quad h(x) = \tan(\sin x).$$

$$(iv) \quad s(x) = \sin(\sqrt{x}).$$

$$(v) \quad t(x) = \sqrt{4 + 3x}.$$

$$(vi) \quad u(x) = \sin(x \cos x).$$

$$(vii) \quad v(x) = \sin^2(\pi x).$$

5. Βρείτε τα σημεία της καμπύλης $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια.

6. Αποδείξτε ότι η καμπύλη $y = 6x^3 + 5x - 3$ δεν έχει καμιά εφαπτόμενη ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης 4.

7. Βρείτε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού p , τέτοιο ώστε $p(2) = 5$, $p'(2) = 3$ και $p''(2) = 2$.

8. Βρείτε μια παραβολή $y = ax^2 + bx + c$ που έχει κλίση 4 στο $x = 1$, κλίση -8 στο $x = -1$, και διέρχεται από το σημείο $(2, 15)$.

9. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & , \quad \text{αν } x \leq 1, \\ x^2 - 2x + 2 & , \quad \text{αν } x > 1. \end{cases}$$

Είναι η f παραγωγίσιμη στο 1; Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των f και f' .

10. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad \text{αν } x \leq 2, \\ mx + b & , \quad \text{αν } x > 2. \end{cases}$$

Βρείτε τα m, b έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

11. Σε ποιά διαστήματα η συνάρτηση $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$ είναι παραγωγίσιμη; Δώστε τον τύπο της f' και σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των f και f' .

12. Αν $g(x) = x^5$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$;

13. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$ και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

14. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

15. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

16. Βρείτε τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης $f(x) = x^5 - x^3 + 2$, για $-1 \leq x \leq 1$.

17. Βρείτε τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$.

18. Βρείτε τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης $f(x) = x - 2 \cos x$, για $-2 \leq x \leq 0$.

19. Αν $g(x) = 2 + (x - 5)^3$, δείξτε ότι $g'(5) = 0$, αλλά η g δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 5.

20. Βρείτε τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης $f(x) = x - 2 \sin x$, για $0 \leq x \leq \pi$.

Σημείωση: Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό. Κάποια από τα σχήματα του κεφαλαίου αυτού έχουν παρθεί από τα βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- Μιχ. Παπαδημητράκης, Απειροστικός Λογισμός: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής, Σημειώσεις Παραδόσεων, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.
- R. Courant, F. John. Introduction to Calculus and Analysis I.
- J. Stewart, Calculus, 6th ed., Thomson Brooks/Cole, 2008.
- E. Swokowski, J. Cole, Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, Classic 12th Edition, Brooks/Cole, 2010.
- M.D. Weir, J., G.B. Thomas, Thomas' Calculus, Addison-Wesley, 2010.