

Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών
Σχολή Μηχανικών



Νοέμβριος 2018

1 Συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις εμφανίζονται οποτεδήποτε μια μεταβλητή ποσότητα εξαρτάται από τις τιμές μιας άλλης. Ας δούμε τα ακόλουθα παραδείγματα.

1. Το εμβαδόν E ενός κύκλου εξαρτάται από την ακτίνα r του κύκλου. Ο κανόνας που συνδέει την ακτίνα r με το εμβαδόν E ορίζεται από την εξίσωση: $E = \pi r^2$. Σε κάθε θετικό αριθμό r αντιστοιχεί μόνο μια τιμή του E , και λέμε ότι το E είναι συνάρτηση του r .
2. Η απόσταση που χρειάζεται ένα αυτοκίνητο για να σταματήσει είναι συνάρτηση της ταχύτητας με την οποία έτρεχε το αυτοκίνητο, όταν αρχίσαμε να πατάμε το φρένο.

Αν μια μεταβλητή ποσότητα x παίρνει τιμές μέσα από κάποιο σύνολο A , και υπάρχει ένας συγκεκριμένος κανόνας που **για κάθε τιμή της** x καθορίζει **μια μοναδική τιμή** μιας άλλης μεταβλητής ποσότητας y μέσα από κάποιο άλλο σύνολο B , τότε λέμε ότι η μεταβλητή y είναι συνάρτηση της μεταβλητής x , και συμβολίζουμε

$$f : A \rightarrow B, \text{ με } y = f(x).$$

Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε η **συνάρτηση** f με **τύπο** $y = f(x)$. Επίσης, θα λέμε ότι η x είναι η **ανεξάρτητη μεταβλητή** και η y είναι η **εξαρτημένη μεταβλητή**. Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης. Ο αριθμός $f(x)$ λέγεται **εικόνα** του x μέσω της f και τον διαβάζουμε ως « f του x ». Τέλος, λέμε **σύνολο τιμών** της f , και συμβολίζουμε $f(A)$, το σύνολο όλων των εικόνων $f(x)$ όταν το x διατρέχει το σύνολο A .

Εμείς θα ασχοληθούμε με πραγματικές συναρτήσεις (δηλ., η εξαρτημένη μεταβλητή y παίρνει πραγματικές τιμές) πραγματικής μεταβλητής (δηλ., η ανεξάρτητη μεταβλητή $x \in \mathbb{R}$). Γενικά, αν δεν προκαθορίζεται το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, τότε θεωρούμε ως πεδίο ορισμού της το μεγαλύτερο σύνολο για το οποίο ο τύπος έχει έννοια. Π.χ., αν

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x},$$

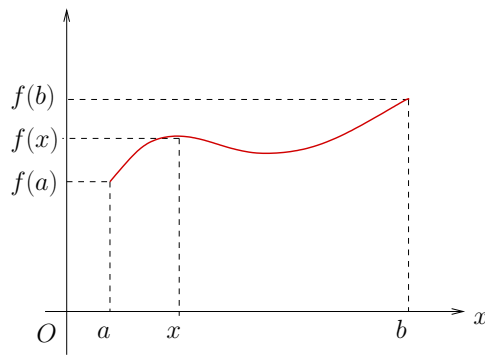
θα πρέπει να εξαιρέσω από το πεδίο ορισμού της f τους αριθμούς $0, 1$, που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Άρα το πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

1.1 Γράφημα συνάρτησης

Πολύ μεγάλη βοήθεια στη μελέτη και κατανόηση των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης $y = f(x)$, προσφέρει η γραφική παράστασή της ή γράφημά της. Για να το κατασκευάσουμε ζωγραφίζουμε δυο κάθετες μεταξύ τους πραγματικές ευθείες στο ίδιο επίπεδο, μια οριζόντια και μια κατακόρυφη, ώστε το σημείο τομής τους να αναπαριστά το 0 και στις δυο ευθείες. Στην οριζόντια ευθεία τοποθετούμε τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x , και την ονομάζουμε x -άξονα, ενώ στην κατακόρυφη τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y , και την ονομάζουμε y -άξονα. Κατόπιν, για κάθε τιμή της x από το πεδίο ορισμού βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή $y = f(x)$, και σχεδιάζουμε το σημείο $(x, y) = (x, f(x))$ φέρνοντας την κατακόρυφη ευθεία από το σημείο x και την οριζόντια ευθεία από το σημείο $y = f(x)$, οπότε το $(x, f(x))$ είναι το σημείο τομής τους. Όλα αυτά τα σημεία $(x, f(x))$ σχηματίζουν τη γραφική παράσταση ή γράφημα της συνάρτησης. Δηλαδή

$$\text{γράφημα της } f = \{(x, f(x)) | x \in A\}.$$

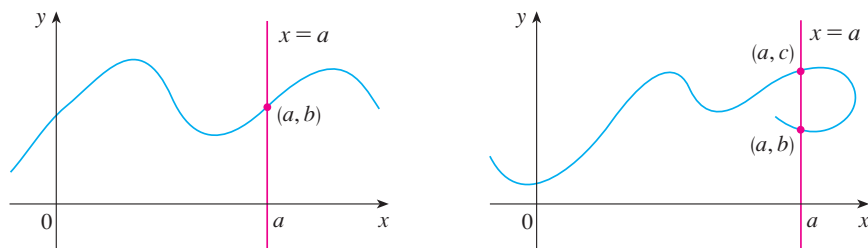
Συνήθως, για να φτιάξουμε το γράφημα μιας συνάρτησης σχεδιάζουμε κάποια σημεία $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $\dots$, $(x_n, f(x_n))$, ώστε τα x_i , $i = 1, \dots, n$, να κατανέμονται όσο το δυνατό πυκνότερα στο πεδίο ορισμού. Υπό ορισμένες προϋποθέσεις, από αυτά τα σημεία που θα ζωγραφίσουμε μπορούμε να μαντέψουμε όλα τα ενδιάμεσα σημεία που λείπουν και να ζωγραφίσουμε με καλή προσέγγιση το γράφημα της συνάρτησης. Παρατηρήστε, ότι το πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ είναι η κατακόρυφη προβολή του γραφήματός της πάνω στον x -άξονα, ενώ το



Σχήμα 1: Γράφημα της f .

σύνολο τιμών της είναι η οριζόντια προβολή του γραφήματος πάνω στον y -άξονα. Π.χ., στο Σχήμα 1, το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $[a, b]$, και το σύνολο τιμών της το διάστημα $[f(a), f(b)]$.

Επίσης, μια καμπύλη του xy -επιπέδου θα είναι γράφημα κάποιας συνάρτησης αν και μόνον αν δεν υπάρχει καμία κατακόρυφη ευθεία που να τέμνει την καμπύλη περισσότερες από μία φορές. Π.χ., στο Σχήμα 2 η δεξιά καμπύλη δεν είναι γράφημα καμιάς συναρτησης, αφού αν ήταν, τότε το a θα είχε δύο διαφορετικές εικόνες b και c .



Σχήμα 2:

Παράδειγμα. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = [x]$, όπου με $[x]$ συμβολίζουμε το **ακέραιο μέρος** του x , δηλ., το μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x . Για παράδειγμα, $[0.3] = 0$, $[2.7] = 2$, $[-1.3] = -2$. Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο Σχήμα 3.

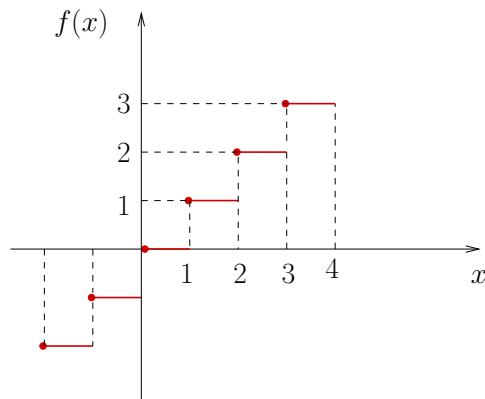
□

1.2 Άρτιες, περιττές, αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις

Ορισμός 1.1. Μια συνάρτηση $y = f(x)$ λέγεται **άρτια** αν

$$f(-x) = f(x),$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.



Σχήμα 3: Γράφημα της $f(x) = [x]$.

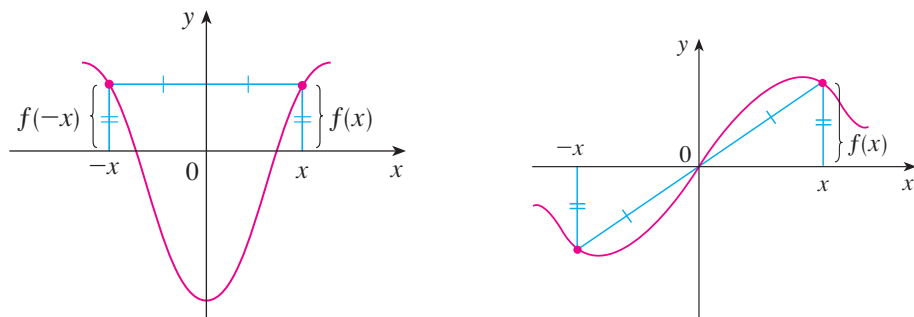
Το γράφημα μιας άρτιας συνάρτησης $y = f(x)$ είναι συμμετρικό ως προς τον y -άξονα, βλ. Σχήμα 4.

Ορισμός 1.2. Μια συνάρτηση $y = f(x)$ λέγεται περιττή αν

$$f(-x) = -f(x),$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

Το γράφημα μιας περιττής συνάρτησης $y = f(x)$ είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων $(0, 0)$, βλ. Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Γράφημα άρτιας συνάρτησης (αριστερά), και περιττής συνάρτησης (δεξιά).

Ορισμός 1.3. Η $y = f(x)$ λέγεται αύξουσα σε ένα διάστημα I του πεδίου ορισμού της αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \text{ στο } I \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Αν η $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η f λέγεται γνησίως αύξουσα στο I .

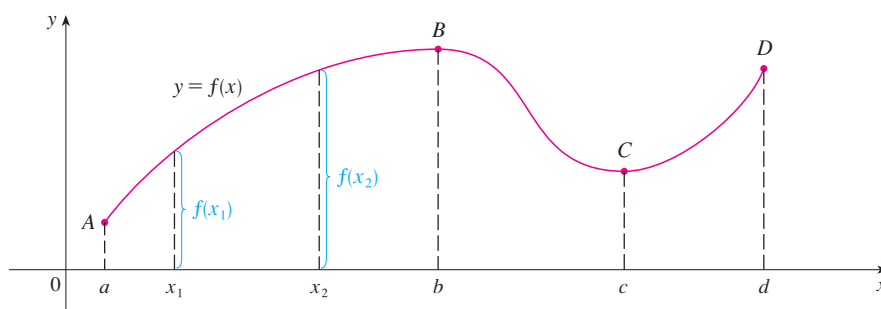
Ομοίως, η $y = f(x)$ λέγεται φθίνουσα σε ένα διάστημα I του πεδίου ορισμού της αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \text{ στο } I \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Αν η $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) > f(x_2)$, τότε η f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο I .

Μια συνάρτηση χαρακτηρίζεται μονότονη σε ένα διάστημα αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο διάστημα αυτό και, αντίστοιχα, γνησίως μονότονη αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Π.χ., κοιτώντας το γράφημα του Σχήματος 5 διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$, γνησίως φθίνουσα στο $[b, c]$, και γνησίως αύξουσα στο $[c, d]$.



Σχήμα 5:

Ορισμός 1.4. Μια συνάρτηση $y = f(x)$ λέγεται 1-1 αν

$$\text{για κάθε } x_1 \neq x_2 \text{ στο πεδίο ορισμού της } \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Π.χ. η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, δεν είναι 1-1, αφού, για παράδειγμα,

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1).$$

Παρατήρηση: Μια συνάρτηση που είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της είναι 1-1.

1.3 Πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις

Πολυωνυμική συνάρτηση ονομάζουμε κάθε συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

όπου n είναι φυσικός αριθμός, και οι $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί και λέγονται συντελεστές του πολυωνύμου. Αν $a_n \neq 0$, τότε ο ακέραιος n ονομάζεται βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης. Το πεδίο ορισμού κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης είναι, φυσικά, ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Π.χ., η συνάρτηση

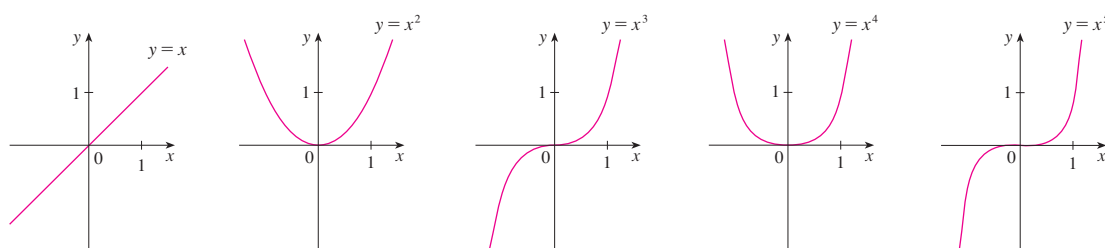
$$f(x) = 2x^6 - x_3 + \frac{1}{2}x - \sqrt{5},$$

είναι μια πολωνυμική συνάρτηση βαθμού 6.

Οι πιο απλές πολωνυμικές συναρτήσεις είναι οι δυνάμεις

$$f(x) = x^n, \quad \text{με } n \text{ φυσικό.}$$

Στο Σχήμα 6 απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = x^n$, για $n = 1, \dots, 5$.



Σχήμα 6: $f(x) = x^n$, για $n = 1, \dots, 5$.

Ρητή συνάρτηση ονομάζουμε κάθε συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

Φυσικά, οι πολωνυμικές συναρτήσεις είναι παραδείγματα ρητών συναρτήσεων, ενώ οι πιο απλές ρητές συναρτήσεις που δεν είναι πολωνυμικές είναι οι δυνάμεις

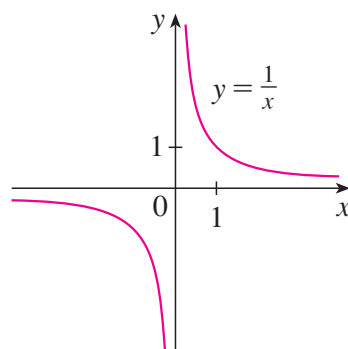
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{με } n \text{ φυσικό.}$$

Όλες έχουν πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Στο Σχήμα 7 απεικονίζεται η γραφική παράσταση της $f(x) = 1/x$.

1.4 Αλγεβρικές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση f θα λέγεται αλγεβρική αν μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας αλγεβρικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση, και εξαγωγή τετραγωνικών ριζών) έχοντας ξεκινήσει με πολώνυμα. Προφανώς, κάθε ρητή συνάρτηση είναι αλγεβρική. Δείτε ακόμα δύο παραδείγματα:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad g(x) = \frac{x^3 - 8x}{x + \sqrt{x}} + (x + 3)\sqrt[3]{x - 1}.$$



Σχήμα 7: $f(x) = \frac{1}{x}$.

1.5 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ορισμός 1.5. Η συνάρτηση $y = f(x)$ λέγεται *περιοδική* αν υπάρχει $T > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x \pm T) = f(x),$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. Αυτό, φυσικά, προϋποθέτει ότι, αν ο x είναι οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f , τότε και οι $x \pm T$ είναι στοιχεία του πεδίου ορισμού της. Ένας τέτοιος αριθμός T ονομάζεται *περίοδος* της $y = f(x)$.

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, που θα περιγράψουμε στη συνέχεια, είναι κλασσικά παραδείγματα περιοδικών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση ημίτονο $f(x) = \sin x$, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x,$$

έχουμε ότι είναι περιοδική με περίοδο 2π .

Η συνάρτηση συνημίτονο $g(x) = \cos x$, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$.

Είναι και αυτή περιοδική με περίοδο 2π . (Δείτε στο Σχήμα 8 τις γραφικές τους παραστάσεις.)

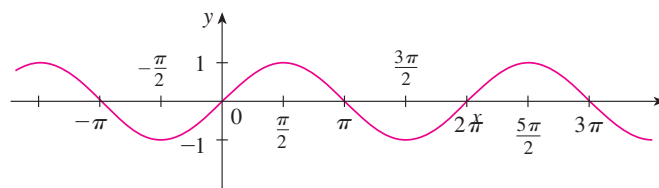
Η συνάρτηση εφαπτόμενη με τύπο $f(x) = \tan x$. Έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2\}, k \in \mathbb{Z}$. Το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$. Είναι περιοδική με περίοδο π .

Η συνάρτηση συνεφαπτόμενη με τύπο $g(x) = \cot x$. Έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$. Το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$. Είναι περιοδική με περίοδο π . (Δείτε στο Σχήμα 9 τις γραφικές τους παραστάσεις.)

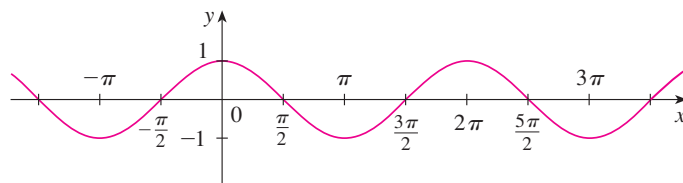
Συχνά, σε εφαρμογές, χρησιμοποιούνται συναρτήσεις της μορφής

$$f(x) = A \sin(\omega x + \phi), \tag{1}$$

όπου τα A, ω, ϕ είναι πραγματικοί αριθμοί με $A, \omega \neq 0$. Τέτοιου τύπου συναρτήσεις λέγονται *ημιτονοειδείς*. Ο αριθμός $|A|$ ονομάζεται **πλάτος** της συνάρτησης, και δεν είναι δύσκολο να

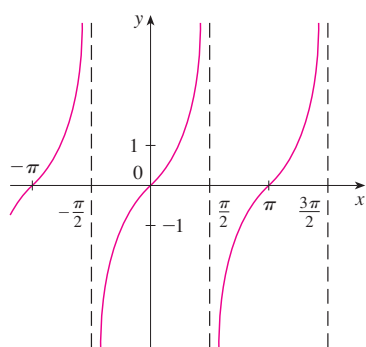


(a) $f(x) = \sin x$

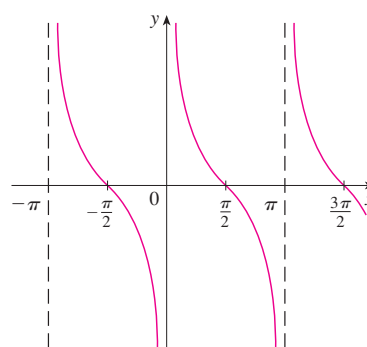


(b) $g(x) = \cos x$

Σχήμα 8: Η συνάρτηση ημίτονο (πάνω) και συνημίτονο (κάτω).



(a) $y = \tan x$



(b) $y = \cot x$

Σχήμα 9: Η συνάρτηση εφαπτομένη (αριστερά) και συνεφαπτομένη (δεξιά).

ελέγχουμε ότι η f είναι περιοδική συνάρτηση με **περίοδο** $T = 2\pi/|\omega|$. Το ϕ λέγεται **αρχική φάση**, ενώ ο αριθμός $-\phi/\omega$ λέγεται **διαφορά φάσης** και δηλώνει πόσο χρειάζεται να μετατοπιστεί οριζόντια η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = A \sin \omega x$ ώστε να συμπίσει με τη γραφική παράσταση της $y = A \sin(\omega x + \phi)$. Επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα διάστημα στο οποίο οι τιμές της συνάρτησης πραγματοποιούν έναν «κύκλο» λύνοντας την ανίσωση: $0 \leq \omega x + \phi \leq 2\pi$.

Παράδειγμα. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = 3 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$.

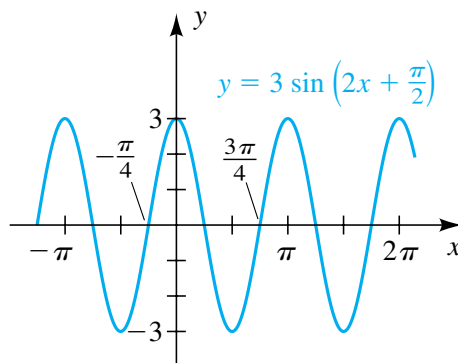
Η συνάρτηση αυτή είναι της μορφής (1) με $A = 3$, $\omega = 2$, $\phi = \frac{\pi}{2}$. Το πλάτος της συνάρτησης είναι 3, που σημαίνει ότι οι τιμές της συνάρτησης κυμαίνονται από -3 έως 3 , και η περίοδος της είναι ίση με $2\pi/|\omega| = 2\pi/2 = \pi$.

Για να υπολογίσουμε ένα διάστημα στο οποίο οι τιμές της συνάρτησης πραγματοποιούν έναν

«κύκλο» λύνουμε την ανίσωση

$$0 \leq 2x + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα 10.



Σχήμα 10: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

1.6 Αντίστροφη συνάρτηση

Κάποιες φορές, οι δυο μεταβλητές της $y = f(x)$ μπορούν, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, να αλλάξουν ρόλους, δηλαδή η y να είναι η ανεξάρτητη και η x να είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή η x να είναι συνάρτηση της y . Αυτό, βάσει του ορισμού της συνάρτησης, προϋποθέτει ότι σε κάθε τιμή της y από το σύνολο τιμών της f αντιστοιχεί μια μοναδική τιμή της x από το πεδίο ορισμού. Δηλαδή, πρέπει για κάθε τιμή της y από το σύνολο τιμών η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο x να έχει μια μοναδική λύση από το πεδίο ορισμού. Αν αυτή η προϋπόθεση ισχύει, τότε καθορίζεται μια νέα συνάρτηση που ονομάζεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f , συμβολίζεται f^{-1} και έχει τύπο

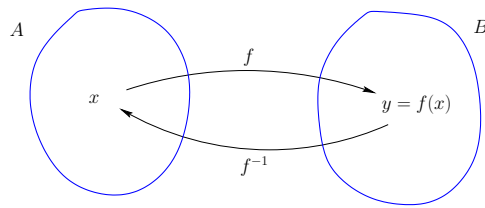
$$x = f^{-1}(y).$$

Δηλαδή:

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x),$$

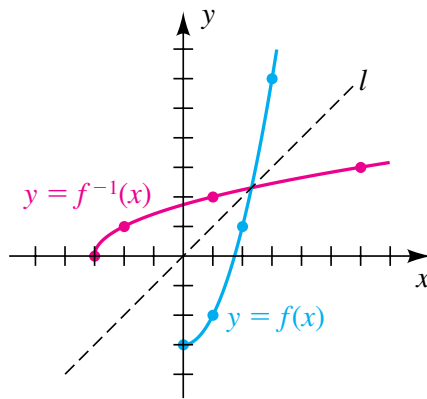
για κάθε x στο πεδίο ορισμού και κάθε y στο σύνολο τιμών της f , βλ. το διάγραμμα του Σχ. 11. Έτσι το πεδίο ορισμού της αρχικής συνάρτησης μετατρέπεται σε σύνολο τιμών της αντίστροφης και το σύνολο τιμών της αρχικής μετατρέπεται σε πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

Για να μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης f θα πρέπει η f να είναι 1-1. Επίσης, η ισοδυναμία « $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ » μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: το σημείο (x, y) ανήκει στο γράφημα της $y = f(x)$ αν και μόνο αν το σημείο (y, x) ανήκει



Σχήμα 11: Αντίστροφες συναρτήσεις.

στο γράφημα της $x = f^{-1}(y)$. Όμως τα σημεία (x, y) και (y, x) είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο, δηλαδή την ευθεία $y = x$, άρα τα γραφήματα μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο, βλ. Σχήμα 12.



Σχήμα 12: Γραφική παράσταση αντίστροφων συναρτήσεων.

Για να υπολογίσουμε την αντίστροφη της συνάρτησης $y = f(x)$ ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Γράφουμε την $y = f(x)$.
- Λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς x (αν αυτό είναι εφικτό).
- Για να εκφράσουμε την f^{-1} ως συνάρτηση του x , εναλλάσσουμε τα x και y . Η εξίσωση που θα προκύψει θα είναι η $y = f^{-1}(x)$.

Παράδειγμα. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 2$. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Για να βρούμε την αντίστροφη γράφουμε

$$y = x^3 + 2$$

και λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς x :

$$x^3 = y - 2 \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{y - 2}, & \text{αν } y \geq 2 \\ -\sqrt[3]{2 - y}, & \text{αν } y < 2 \end{cases}.$$

Τέλος, εναλλάσσουμε τα x και y , και έχουμε

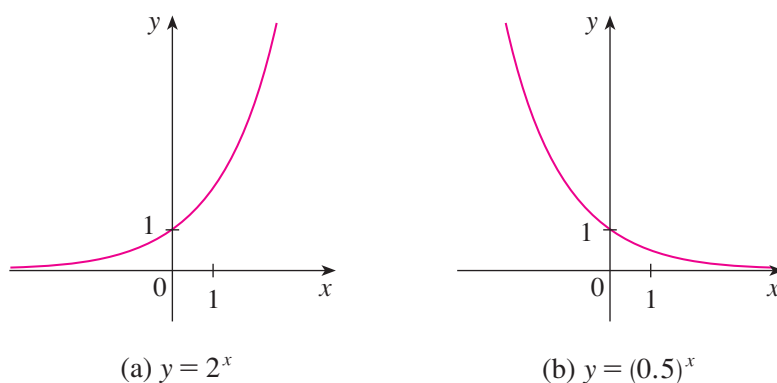
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2}, & \text{αν } x \geq 2 \\ -\sqrt[3]{2-x}, & \text{αν } x < 2 \end{cases}.$$

1.7 Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση

Για οποιονδήποτε $a > 0$ η συνάρτηση

$$f(x) = a^x$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ονομάζεται **εκθετική συνάρτηση** με βάση a . Αν $a > 1$ ή $0 < a < 1$, τότε το σύνολο τιμών της $y = a^x$ είναι το $(0, +\infty)$. Επίσης, η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, αν $a > 1$, και γνησίως φθίνουσα, αν $0 < a < 1$. Στο Σχήμα 13 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = a^x$, για $a = 2$ (αριστερά), και για $a = \frac{1}{2}$ (δεξιά).



Σχήμα 13: Γραφική παράσταση εκθετικών συναρτήσεων.

Η πιο γνωστή εκθετική συνάρτηση (πολλές φορές αναφέρεται ως **η** εκθετική συνάρτηση) είναι αυτή που έχει ως βάση τον αριθμό e . Ο αριθμός αυτός ορίζεται ως το όριο της ακολουθίας

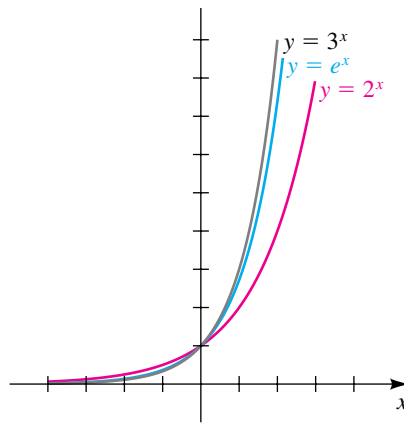
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

δηλαδή, ο αριθμός εκείνος στον οποίο πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά οι αριθμοί $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, καθώς το n μεγαλώνει απεριόριστα. Ο αριθμός e είναι άρρητος και μια προσέγγισή του (με 5 σωστά δεκαδικά ψηφία) είναι

$$e \approx 2.71828.$$

Στο Σχήμα 14 βλέπουμε τη γραφική παράσταση των $y = 2^x$, $y = e^x$ και $y = 3^x$.

Αν $0 < a < 1$ ή $a > 1$, η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως μονότονη (άρα και 1-1), οπότε ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτηση. Για να υπολογίσουμε τον τύπο της λύνουμε την $x^a = y$ ως προς

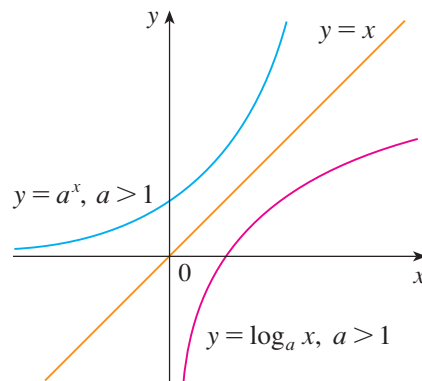


Σχήμα 14: Γραφική παράσταση των $y = 2^x$, $y = e^x$ και $y = 3^x$.

x και βρίσκουμε $x = \log_a y$. Αφού εναλλάξουμε τα σύμβολα των μεταβλητών x και y , ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι

$$y = \log_a x.$$

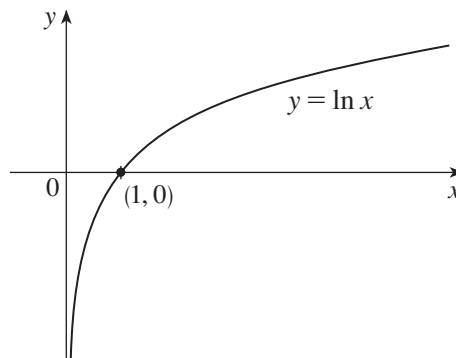
Την $g(x) = \log_a x$, δηλαδή την αντίστροφη της $f(x) = a^x$, την ονομάζουμε **λογαριθμική συνάρτηση** με βάση a . Το πεδίο ορισμού της είναι το $(0, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της το $\mathbb{R}$. Στο Σχήμα 15 απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις των $y = a^x$ και $y = \log_a x$, για $a > 1$.



Σχήμα 15: Γραφικές παραστάσεις των $y = a^x$ και $y = \log_a x$, για $a > 1$.

Ο λογάριθμος με βάση e λέγεται **φυσικός** (ή νεπέριος) λογάριθμος, και συμβολίζεται με $\ln x$. Το γράφημα της $y = \ln x$ φαίνεται στο Σχήμα 16. Επίσης, ο λογάριθμος με βάση 10 λέγεται **δεκαδικός** λογάριθμος, και συμβολίζεται με $\log x$. Δηλαδή

$$\log_e x = \ln x \quad \text{και} \quad \log_{10} x = \log x.$$



Σχήμα 16: Γραφική παράσταση της $y = \ln x$.

1.8 Πράξεις και σύνθεση συναρτήσεων

Έστω f, g συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B , αντίστοιχα. Τότε ορίζουμε τις συναρτήσεις $f + g, f - g, fg$ και f/g ως εξής:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{με πεδίο ορισμού το } A \cap B,$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{με πεδίο ορισμού το } A \cap B,$$

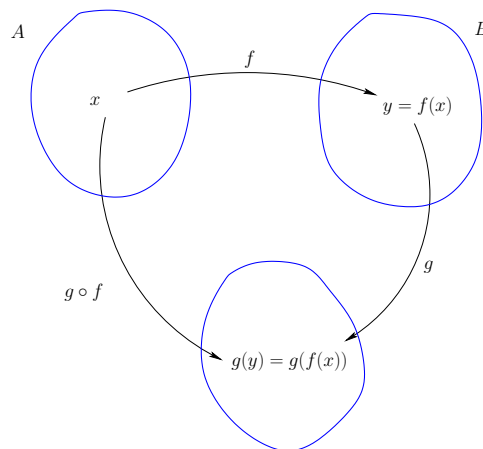
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \text{με πεδίο ορισμού το } A \cap B,$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{με πεδίο ορισμού το } \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}.$$

Επίσης, ορίζουμε ως σύνθεση των f και g , και συμβολίζουμε $g \circ f$, τη συνάρτηση που ορίζεται ως

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{για κάθε } x \in A \text{ τέτοιο ώστε } f(x) \in B,$$

(βλ. το διάγραμμα του Σχ. 17).



Σχήμα 17: Σύνθεση συναρτήσεων.

Παράδειγμα. Έστω $f : [2, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ με $f(x) = \sqrt{x-2}$, και $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ με $g(x) = x^2$. Βρείτε τις $g \circ f$ και $f \circ g$.

Λύση: Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f ώστε τα $f(x) = \sqrt{x-2}$ να ανήκουν στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή, όλα τα $x \in [2, +\infty) : \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι το $[2, +\infty)$. Επίσης,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x-2})^2 = |x-2| = x-2.$$

(Η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή $x \in [2, +\infty)$.)

Ανάλογα, το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ αποτελείται από τα $x \in \mathbb{R} : x^2 \in [2, +\infty)$, δηλαδή είναι το $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. Επίσης,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2-2}.$$

□

1.9 Μετασχηματισμοί συναρτήσεων

Έστω ότι γνωρίζουμε το γράφημα της συνάρτησης $y = f(x)$. Θα δούμε πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε γραφήματα άλλων συναρτήσεων που προκύπτουν από την $y = f(x)$ αν εφαρμόσουμε συγκεκριμένους μετασχηματισμούς. Ας ξεκινήσουμε με τη λεγόμενη μεταφορά.

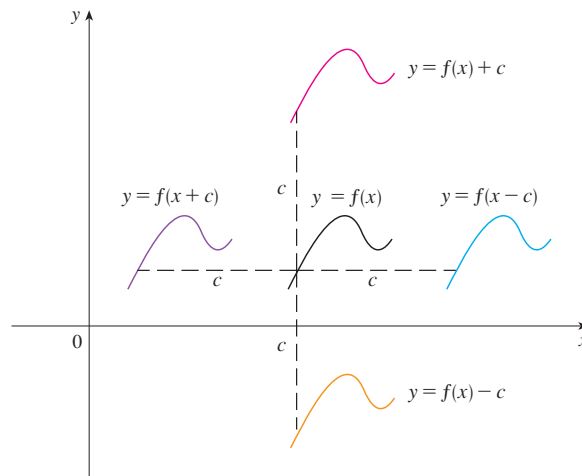
Έστω ένας αριθμός $c > 0$. Τότε για να βρούμε το γράφημα της (βλ. Σχήμα 18)

- $y = f(x) + c$, μεταφέρουμε το γράφημα της $y = f(x)$ κατά c μονάδες προς τα πάνω.
- $y = f(x) - c$, μεταφέρουμε το γράφημα της $y = f(x)$ κατά c μονάδες προς τα κάτω.
- $y = f(x - c)$, μεταφέρουμε το γράφημα της $y = f(x)$ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.
- $y = f(x + c)$, μεταφέρουμε το γράφημα της $y = f(x)$ κατά c μονάδες προς τα αριστερά.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τους λεγόμενους μετασχηματισμούς ανάκλασης και ομοιοθεσίας.

Έστω ένας αριθμός $c > 1$. Τότε για να βρούμε το γράφημα της (βλ. Σχήμα 19)

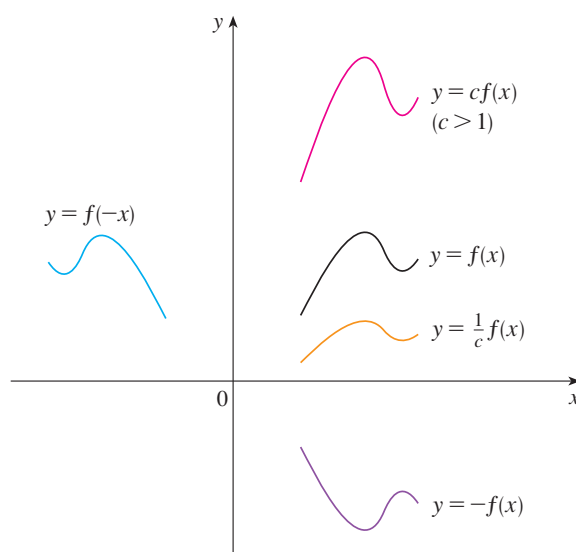
- $y = -f(x)$, σχεδιάζουμε το συμμετρικό του γραφήματος της $y = f(x)$ ως προς τον x -άξονα.
- $y = f(-x)$, σχεδιάζουμε το συμμετρικό του γραφήματος της $y = f(x)$ ως προς τον y -άξονα.
- $y = cf(x)$, «επιμηκύνουμε» το γράφημα της $y = f(x)$ κατακόρυφα κατά ένα συντελεστή c .
(Λέμε ότι το γράφημα της $y = cf(x)$ είναι το κατακόρυφο ομοιόθετο με λόγο c του γραφήματος της $y = f(x)$.)



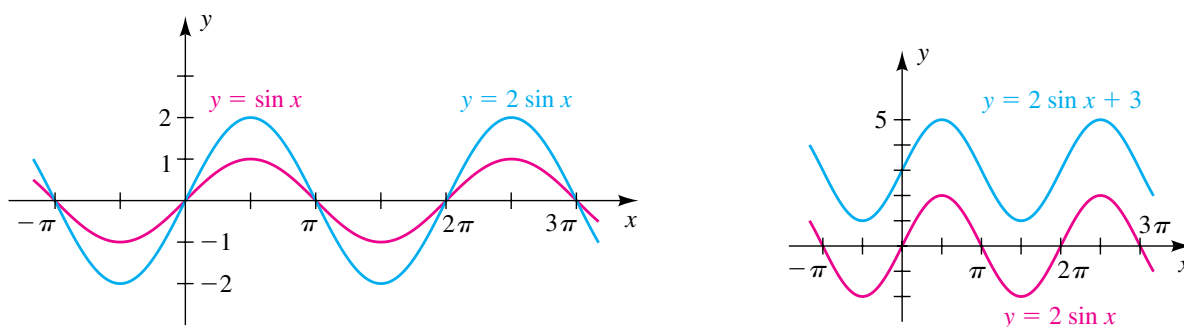
Σχήμα 18: Κατακόρυφη και οριζόντια μεταφορά του γραφήματος της $y = f(x)$ για $c > 0$.

- $y = \frac{1}{c} f(x)$, «συμπιέζουμε» το γράφημα της $y = f(x)$ κατακόρυφα κατά ένα συντελεστή c .
(Λέμε ότι το γράφημα της $y = \frac{1}{c} f(x)$ είναι το κατακόρυφο ομοιόθετο με λόγο $1/c$ του γραφήματος της $y = f(x)$.)
- $y = f(cx)$, «συμπιέζουμε» το γράφημα της $y = f(x)$ οριζόντια κατά ένα συντελεστή c .
(Λέμε ότι το γράφημα της $y = f(cx)$ είναι το οριζόντιο ομοιόθετο με λόγο c του γραφήματος της $y = f(x)$.)
- $y = f(x/c)$, «επιμηκύνουμε» το γράφημα της $y = f(x)$ οριζόντια κατά ένα συντελεστή c .
(Λέμε ότι το γράφημα της $y = f(x/c)$ είναι το οριζόντιο ομοιόθετο με λόγο $1/c$ του γραφήματος της $y = f(x)$.)

Παράδειγμα. Στο Σχήμα 20, αριστερά βλέπουμε το κατακόρυφο ομοιόθετο του γραφήματος της $y = \sin x$ με λόγο $c = 2$. Δηλαδή για να βρούμε τη γραφική παράσταση της $y = 2 \sin x$ πολλαπλασιάζουμε την τεταγμένη κάθε σημείου του γραφήματος της $y = \sin x$ επί 2. Στο δεξί μέρος του Σχήματος 20 βλέπουμε τη γραφική παράσταση της $y = 2 \sin x + 3$, που προκύπτει μεταφέροντας κατακόρυφα το γράφημα της $y = 2 \sin x$ κατά 3.



Σχήμα 19: Ανάκλαση και ομοιοθεσία του γραφήματος της $y = f(x)$ για $c > 1$.



Σχήμα 20: Γραφήματα των $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$ και $y = 2 \sin x + 3$.

2 Όρια συναρτήσεων

«Μη αυστηρός» ορισμός του ορίου: Για μιά συνάρτηση $f(x)$ θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = L \quad (\text{ή} \quad f(x) \rightarrow L \quad \text{καθώς} \quad x \rightarrow \xi),$$

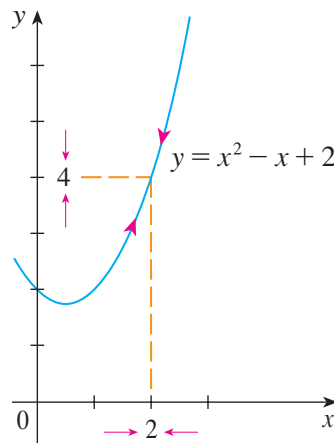
και θα λέμε «το όριο της $f(x)$, καθώς το x τείνει στο ξ , είναι L » ή

«η συνάρτηση $f(x)$ συγκλίνει στο L , καθώς το x τείνει στο ξ »

αν οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησής μας πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο L , για όλα τα x που βρίσκονται αρκούντως κοντά στο ξ (αλλά με $x \neq \xi$).

Παρατηρήστε ότι η σχέση $x \neq \xi$ στον ορισμό, υπονοεί ότι για να βρούμε το όριο της $f(x)$, καθώς το x τείνει στο ξ , δεν ενδιαφερόμαστε για την τιμή της συνάρτησης για $x = \xi$. Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί το ξ να μην ανήκει καν στο πεδίο ορισμού της f . Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το πώς συμπεριφέρεται η συνάρτηση κοντά στο ξ .

Παράδειγμα. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 2$. Ενδιαφερόμαστε για τη συμπεριφορά της για τιμές του x κοντά στο 2.



Σχήμα 21: Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - x + 2$.

Στον ακόλουθο πίνακα παραθέτουμε τις τιμές $f(x)$ καθώς το x πλησιάζει στο 2, από μικρότερες και από μεγαλύτερες τιμές.

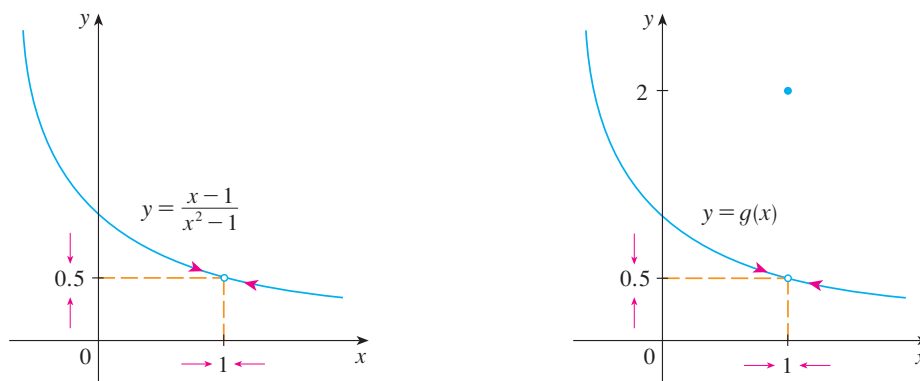
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.000	2.000000	3.000	8.000000
1.500	2.750000	2.500	5.750000
1.900	3.710000	2.100	4.310000
1.950	3.852500	2.050	4.152500
1.990	3.970100	2.010	4.030100
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Τόσο από τις τιμές του πίνακα, όσο και από τη γραφική παράσταση του Σχ. 21, παρατηρούμε ότι καθώς το x πλησιάζει στο 2, το $f(x)$ τείνει προς τον αριθμό 4, άρα $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2) = 4$.

□

Παράδειγμα. Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}.$$



Σχήμα 22: Γραφικές παραστάσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$.

Οι γραφικές τους παραστάσεις (για $x > -1$) δίνονται στο Σχήμα 22. Παρατηρούμε ότι η πρώτη δεν ορίζεται για $x = 1$, ενώ για τη δεύτερη έχουμε $g(1) = 2$. Όμως τόσο οι τιμές της f , όσο και οι τιμές της g , πλησιάζουν στο $\frac{1}{2}$ καθώς το x πλησιάζει οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο 1, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{2}$. □

Πλευρικά όρια: Για μία συνάρτηση $f(x)$ θα λέμε ότι το όριο της $f(x)$, καθώς το x τείνει στο ξ από τα αριστερά, είναι L , και θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = L,$$

αν οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησής μας πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο L , για όλα τα x που βρίσκονται αρκούντως κοντά στο ξ , και είναι **μικρότερα** του ξ .

Ανάλογα, θα λέμε ότι το όριο της $f(x)$, καθώς το x τείνει στο ξ από τα δεξιά, είναι L , και θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = L,$$

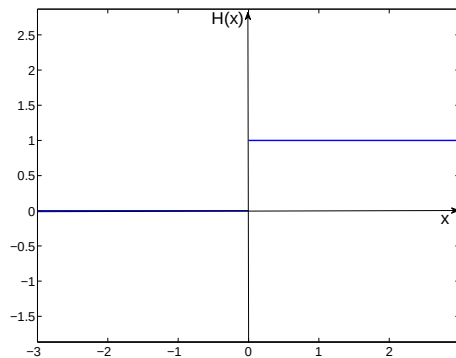
αν οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησής μας πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο L , για όλα τα x που βρίσκονται αρκούντως κοντά στο ξ , και είναι **μεγαλύτερα** του ξ .

Παράδειγμα. Θεωρήστε τη συνάρτηση Heaviside με τύπο

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Η γραφική της παράσταση δίνεται στο Σχήμα 23 και παρατηρούμε ότι:

- καθώς το x πλησιάζει στο 0 από δεξιά (από θετικές τιμές), $H(x) \rightarrow 1$, ενώ
- καθώς το x πλησιάζει στο 0 από αριστερά (από αρνητικές τιμές), $H(x) \rightarrow 0$.



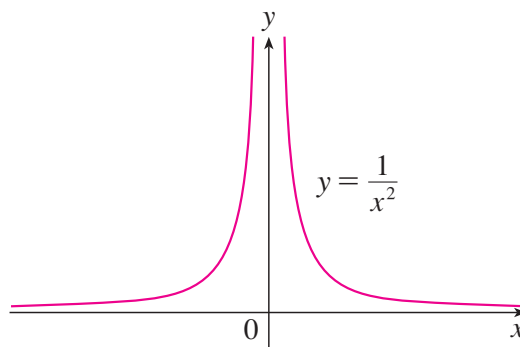
Σχήμα 23: Γραφική παράσταση της συνάρτησης Heaviside $y = H(x)$.

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.1. Το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = L$ αν και μόνον αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$ και είναι ίσα με L .

Παράδειγμα. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Στον πίνακα που ακολουθεί υπολογίζουμε μερικές τιμές της, καθώς το x πλησιάζει προς το 0.

x	± 1	± 0.5	± 0.1	± 0.01	± 0.001
$f(x)$	1	4	100	10 000	1 000 000



Σχήμα 24: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Τόσο από τον πίνακα των τιμών της $f(x)$, όσο και από τη γραφική της παράσταση (βλ. Σχήμα 24), διαπιστώνουμε ότι καθώς το $x \rightarrow 0$, τότε και το $x^2 \rightarrow 0$, ενώ το $1/x^2$ παίρνει θετικές τιμές που ολοένα και μεγαλώνουν. Επομένως οι τιμές της $f(x)$ δεν προσεγγίζουν κάποιο συγκεκριμένο αριθμό καθώς το x πλησιάζει προς το 0, άρα το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει. $\square$

Για να περιγράψουμε τη συγκεκριμένη αυτή συμπεριφορά της συνάρτησης του προηγούμενου παραδείγματος χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Με το συμβολισμό αυτό δεν εννοούμε ότι το όριο υπάρχει, ούτε θεωρούμε το $+\infty$ ως έναν αριθμό, αλλά απλά εκφράζουμε τον τρόπο με τον οποίο το όριο αυτό δεν υπάρχει: το $1/x^2$ γίνεται οσοδήποτε μεγάλο καθώς το x πλησιάζει προς το 0.

Έστω f μια συνάρτηση που ορίζεται σε ένα διάστημα που περιέχει το ξ (χωρίς να ορίζεται κατ' ανάγκην στο ίδιο το ξ). Τότε, με το συμβολισμό

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty,$$

εννοούμε ότι οι τιμές της $f(x)$ μπορεί να γίνουν οσοδήποτε μεγάλες, καθώς το x πλησιάζει αρκούντως κοντά στο ξ , αλλά με $x \neq \xi$.

Ανάλογα, με το συμβολισμό

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty,$$

εννοούμε ότι οι τιμές της $f(x)$ μπορεί να γίνουν οσοδήποτε μεγάλες αρνητικές, καθώς το x πλησιάζει αρκούντως κοντά στο ξ , αλλά με $x \neq \xi$.

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν και για τα πλευρικά όρια:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = -\infty \end{array}$$

Λέμε ότι η ευθεία $x = \xi$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της καμπύλης $y = f(x)$ αν ισχύει τουλάχιστον ένα από τα ακόλουθα:

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = -\infty \end{array}$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-2}$, και θέλουμε να υπολογίσουμε τα όρια

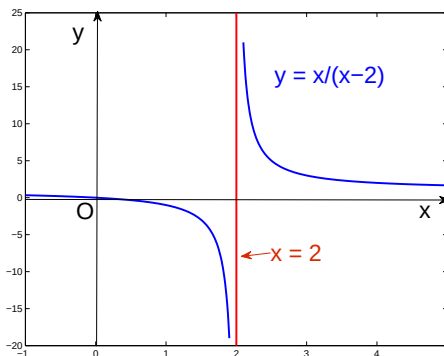
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2}.$$

Αν το x πλησιάζει το 2 από τιμές μεγαλύτερες του 2, τότε ο παρονομαστής είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός, ενώ ο αριθμητής πλησιάζει στο 2. Επομένως, το πηλίκο θα είναι ένας

μεγάλος θετικός αριθμός. Άρα διαισθητικά περιμένουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty.$$

Ανάλογα, αν το x πλησιάζει το 2 από τιμές μικρότερες του 2, τότε ο παρονομαστής είναι



Σχήμα 25: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

ένας πολύ μικρός αρνητικός αριθμός, ενώ ο αριθμητής είναι θετικός και πλησιάζει και πάλι στο 2. Επομένως, το πηλίκο θα είναι ένας μεγάλος κατ' απόλυτη τιμή, αρνητικός αριθμός. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty.$$

Στο Σχήμα 25 δίνεται η γραφική παράσταση της $y = \frac{x}{x-2}$, και η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. □

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $(a, +\infty)$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

αν οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο L καθώς το x παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες θετικές τιμές.

Ανάλογα,

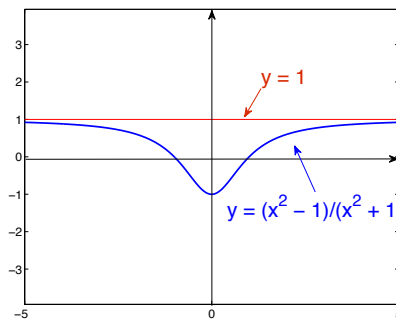
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

αν οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο L καθώς το x παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες κατ' απόλυτη τιμή, αρνητικές τιμές.

Αν συμβαίνει ένα από τα παραπάνω, τότε η ευθεία $y = L$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της καμπύλης $y = f(x)$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, και θέλουμε να υπολογίσουμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$



Σχήμα 26: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Στο Σχήμα 26 βλέπουμε τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$. Παρατηρούμε ότι καθώς οι τιμές του x μεγαλώνουν, οι τιμές του $f(x)$ πλησιάζουν ολοένα και κοντύτερα στο 1. Το ίδιο συμβαίνει και καθώς το x παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες κατ' απόλυτη τιμή, αρνητικές τιμές. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1,$$

και η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη. □

Ορισμός 2.1. Μία ευθεία l με εξίσωση $y = mx + b$ ονομάζεται (πλάγια) ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$ του γραφήματος της f αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - b) = 0.$$

Ανάλογα, μία ευθεία l με εξίσωση $y = mx + b$ ονομάζεται (πλάγια) ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$ του γραφήματος της f αν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx - b) = 0.$$

2.1 Ιδιότητες των ορίων

Στη συνέχεια θα δούμε μερικά αποτελέσματα σχετικά με πράξεις ανάμεσα σε συναρτήσεις. Όλα αυτά τα αποτελέσματα θα διατυπώνονται για συντομία με το σύμβολο $\lim$ αντί των $\lim_{x \rightarrow \xi}$ ή $\lim_{x \rightarrow \xi^\pm}$ ή $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$, όπου θεωρούμε αυτονόητο ότι τα όρια που εμφανίζονται στην ίδια διατύπωση είναι όλα του ίδιου τύπου.

Πρόταση 2.2.

- Αν υπάρχει το $\lim f(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim(-f(x))$ και

$$\lim(-f(x)) = -\lim f(x).$$

- Αν υπάρχουν τα $\lim f(x)$, $\lim g(x)$, και το $\lim f(x) \pm \lim g(x)$ (δηλαδή το άθροισμα/διαφορά των δυο ορίων) δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το $\lim(f(x) \pm g(x))$ και

$$\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x).$$

- Αν υπάρχουν τα $\lim f(x)$, $\lim g(x)$, και το $\lim f(x) \lim g(x)$ (δηλαδή το γινόμενο των δυο ορίων) δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το $\lim(f(x)g(x))$ και

$$\lim(f(x)g(x)) = \lim f(x) \lim g(x).$$

- Αν υπάρχει το $\lim f(x)$, και το $1/(\lim f(x))$ (δηλαδή το αντίστροφο του ορίου) δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή, αν $\lim f(x) \neq 0$), τότε υπάρχει και το $\lim \frac{1}{f(x)}$ και

$$\lim \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim f(x)}.$$

Αν $\lim f(x) = 0$, και η $y = f(x)$ είναι θετική κοντά στο όριο του x , τότε $\lim \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Αν $\lim f(x) = 0$, και η $y = f(x)$ είναι αρνητική κοντά στο όριο του x , τότε $\lim \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

- Αν υπάρχουν τα $\lim f(x)$, $\lim g(x)$, και το $\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ (δηλαδή ο λόγος των δυο ορίων) δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το $\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ και

$$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

- Αν υπάρχει το $\lim f(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim |f(x)|$ και

$$\lim |f(x)| = |\lim f(x)|.$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι ακόλουθες συμβολικές πράξεις δεν ορίζονται, και χαρακτηρίζονται ως **απροσδιόριστες μορφές**:

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty)$$

$$(\pm\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}$$

Τέλος, στις ακόλουθες προτάσεις δίνουμε μερικές ακόμα ιδιότητες των ορίων.

Πρόταση 2.3 (Πολυώνυμο). Αν $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ είναι κάποια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi) = a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + a_1 \xi + a_0.$$

Πρόταση 2.4 (Πηλίκα πολυωνύμων). Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}, \quad \text{υπό την προϋπόθεση ότι } g(\xi) \neq 0.$$

Πρόταση 2.5. Αν $f(x) = g(x)$ για $x \neq \xi$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$, δεδομένου ότι τα όρια αυτά υπάρχουν.

Θεώρημα 2.1. Αν ισχύει $f(x) \leq g(x)$, για x κοντά στο ξ (εκτός ίσως από το ξ), και υπάρχουν τα όρια των f και g καθώς το $x \rightarrow \xi$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \xi} g(x).$$

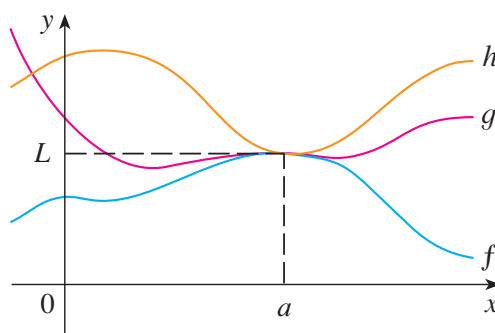
Θεώρημα 2.2 (Κριτήριο παρεμβολής ή «Θεώρημα Sandwich»). Αν $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, όταν το x είναι κοντά στο ξ (εκτός ίσως από το ξ), υπάρχουν τα όρια των f και h καθώς το $x \rightarrow \xi$, και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} h(x) = L,$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = L.$$

Π.χ., στο Σχήμα 27, η συνάρτηση $g(x)$ «συμπιέζεται» μεταξύ των f και h , για τιμές του x κοντά στο a . Επειδή οι f και h έχουν το ίδιο όριο L για $x \rightarrow a$, η g «εξαναγκάζεται» να έχει το ίδιο όριο L στο a .



Σχήμα 27: Γραφική αναπαράσταση του «Θεωρήματος Sandwich».

Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει μια μέθοδο για να βρίσκουμε (όταν φυσικά υπάρχουν) τις πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης. (Γι' ατην απόδειξή της ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει, π.χ., στις σημειώσεις Απειροστικού Λογισμού του Μιχ. Παπαδημητράκη, βλ. Βιβλιογραφία.)

Πρόταση 2.6. (i) Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = mx + b$ είναι ασύμπτωτη ευθεία της συνάρτησης $y = f(x)$ στο $+\infty$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = b.$$

Αντιστρόφως, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και είναι αριθμός και ορίσουμε το m να είναι ίσο με το όριο αυτό και αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$ και είναι αριθμός και ορίσουμε το b να είναι ίσο με το όριο αυτό, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = mx + b$ είναι ασύμπτωτη ευθεία της συνάρτησης στο $+\infty$.

(ii) Ισχύουν τα ανάλογα με του (i) για ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$ και με όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty}$.

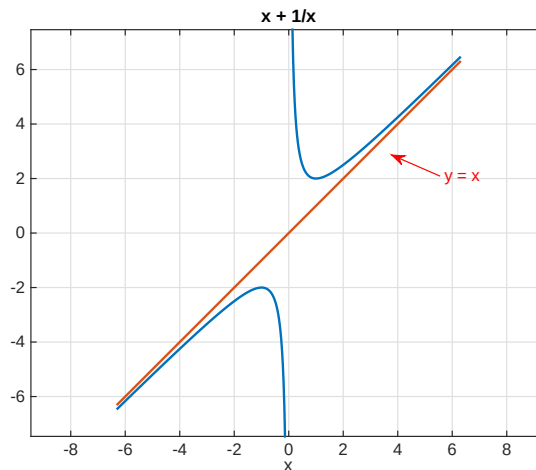
Παράδειγμα. Θεωρούμε την $f(x) = x + 1/x$ στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Αρχικά υπολογίζουμε το όριο

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1,$$

και στη συνέχεια το όριο

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 1 \cdot x\right) = 0.$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 1x + 0 = x$.



Σχήμα 28: Η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f(x) = x + 1/x$.

Επίσης,

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 \quad \text{και} \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 1 \cdot x\right) = 0.$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$ είναι και πάλι η ευθεία με εξίσωση $y = 1x + 0 = x$, βλ. Σχήμα 28. □

2.2 Παραδείγματα υπολογισμού ορίων

Παράδειγμα 1. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}.$$

Λύση. Η συνάρτηση αυτή είναι πηλίκος δύο πολυωνύμων, και ο παρονομαστής $x + 2$ δεν μηδενίζεται όταν $x = 2$. Επομένως, από την Πρόταση 2.4 έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{2 + 2} = \frac{12}{4} = 3.$$

□

Παράδειγμα 2. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}.$$

Λύση. Η συνάρτηση αυτή είναι πηλίκος δύο πολυωνύμων, αλλά ο παρονομαστής $x + 2$ μηδενίζεται όταν $x = -2$. Επίσης, για $x = -2$ και ο αριθμητής είναι ίσος με μηδέν, άρα αν αντικαταστήσουμε την τιμή $x = -2$ οδηγούμαστε στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Όμως

$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{x^3 + 2^3}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 2^2)}{x + 2}.$$

Επομένως, για $x \neq -2$, θα έχουμε $f(x) = g(x)$, όπου $g(x) = x^2 - 2x + 4$. Αρα, από την Πρόταση 2.5 έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) = (-2)^2 - 2(-2) + 4 = 12.$$

□

Παράδειγμα 3. Δείξτε ότι

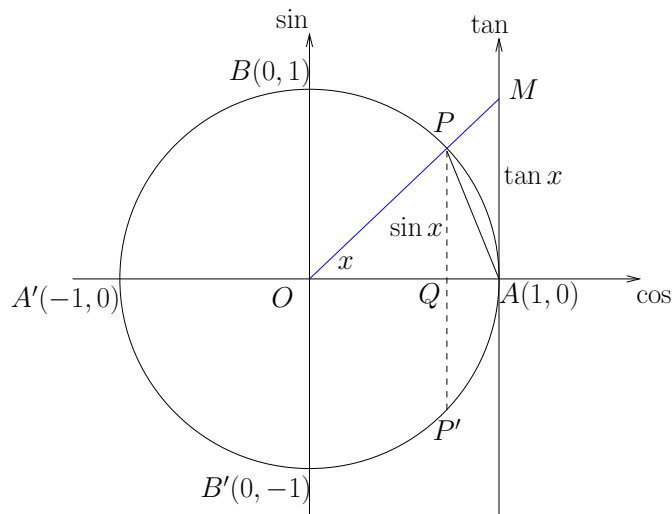
$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

όπου η γωνία x μετριέται σε rad (ακτίνια).

Λύση. Για να υπολογίσουμε τα όρια αυτά θα χρειαστεί αρχικά να αποδείξουμε δύο πολύ χρήσιμες ανισώσεις. Καταρχήν

$$|\sin x| \leq |x|. \quad (2)$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε την (2) για $0 < x < \pi/2$. Έστω $0 < x < \pi/2$ και P το σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου που αντιστοιχεί στο x , βλ. Σχ. 29. Φέρνουμε την κάθετη PQ στην οριζόντια διάμετρο $A'A$, οπότε το τόξο AP έχει μήκος x , και το ευθύγραμμο τμήμα PQ έχει μήκος $\sin x$. Θεωρούμε και το συμμετρικό P' του P ως προς την $A'A$, οπότε το μήκος του ευθ. τμήματος PP' είναι $2 \sin x$ και το τόξο PP' έχει μήκος $2x$. Άρα $0 < 2 \sin x < 2x \Rightarrow 0 < \sin x < x$ και, επομένως, $|\sin x| \leq |x|$.



Σχήμα 29: Μήκος του $PQ <$ μήκος τόξου $AP <$ μήκος του MA .

Αν, τώρα, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, τότε $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, οπότε $0 < \sin(-x) < -x \Leftrightarrow 0 < -\sin x < -x$ και, επομένως, και πάλι $|\sin x| \leq |x|$.

Αν $x = 0$, η ανισότητα ισχύει ως ισότητα $0 = 0$.

Τέλος, αν $|x| \geq \pi/2$, τότε $|\sin x| \leq 1 < \pi/2 \leq |x|$. □

Η δεύτερη ανισότητα που θα αποδείξουμε είναι

$$|x| \leq |\tan x|, \quad \text{για } |x| < \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Απόδειξη. Αν $0 < x < \pi/2$, παίρνουμε στον τριγωνομετρικό κύκλο το σημείο P που αντιστοιχεί στο x και προεκτείνουμε την OP μέχρι να συναντήσει στο σημείο M τον άξονα των εφαπτομένων (δηλ. την ευθεία που είναι κάθετη στην οριζόντια διάμετρο $A'A$ στο σημείο A). Τότε το μήκος του τόξου AP είναι x και το μήκος του ευθ. τμήματος AM είναι $\tan x$. Το εμβαδόν του τριγώνου OAM είναι ίσο με $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$ και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα OAP είναι ίσο με $\frac{x}{2}$ (διότι το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με π , ενώ το εμβαδόν του τομέα είναι αναλογικά ίσο με $\frac{x}{2\pi} \cdot \pi$). Συγκρίνοντας τα εμβαδά, βλέπουμε ότι $0 < x < \tan x$, οπότε $|x| < |\tan x|$. Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, τότε $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, οπότε $0 < -x < \tan(-x) = -\tan x$, οπότε και πάλι $|x| < |\tan x|$.

Τέλος, αν $x = 0$, η ανισότητα ισχύει ως ισότητα ($0 = 0$). □

Από την ανισότητα (2) έχουμε

$$|\sin x| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq \sin x \leq |x|.$$

Όταν $x \rightarrow 0$, τότε $\pm|x| \rightarrow 0$, οπότε από το Θεώρημα 2.2 (Sandwich) έχουμε ότι και η συνάρτηση $\sin x$ συγκλίνει στο 0, καθώς $x \rightarrow 0$.

Τώρα, από την γνωστή ταυτότητα $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, και επειδή για $x \rightarrow 0$ έχουμε ότι $\frac{x}{2} \rightarrow 0$, άρα και $\sin^2 \frac{x}{2} \rightarrow 0$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Αν συνδυάσουμε τις ανισότητες (2) και (3), βλέπουμε άμεσα ότι για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, από το Θεώρημα 2.2 (Sandwich) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. $\square$

Παράδειγμα 4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

$\square$

Παράδειγμα 5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{(t=3x)}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3 \cdot 1 = 3.$$

$\square$

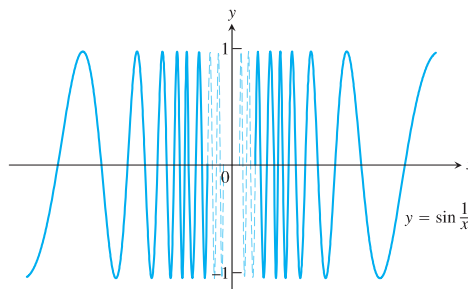
Παράδειγμα 6. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Λύση. Ας θεωρήσουμε τα σημεία $x_k = \frac{1}{k\pi}$, όπου k ακέραιος. Φυσικά, καθώς το k παίρνει όλο και μεγαλύτερες τιμές το x_k τείνει προς το 0. Τότε

$$\sin \frac{1}{x_k} = \sin \frac{1}{\frac{1}{k\pi}} = \sin(k\pi) = 0.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τα $y_k = \frac{1}{2k\pi \pm \frac{\pi}{2}}$. Και πάλι καθώς το k παίρνει όλο και μεγαλύτερες τιμές το y_k τείνει προς το 0. Τώρα όμως

$$\sin \frac{1}{y_k} = \sin \frac{1}{\frac{1}{2k\pi \pm \frac{\pi}{2}}} = \sin \left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \right) = \pm 1.$$



Σχήμα 30: Γραφική παράσταση της $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Δηλαδή, όπως βλέπουμε και από τη γραφική παράσταση του Σχήματος 30, οι τιμές της $f(x)$ καθώς το $x \rightarrow 0$ ταλαντώνονται όλο και ταχύτερα μεταξύ του -1 και του 1 , και δεν πλησιάζουν σε κάποιο συγκεκριμένο αριθμό. Άρα το όριο αυτό δεν υπάρχει. $\square$

Παράδειγμα 7. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

Λύση. Καταρχήν, παρατηρήστε ότι δεν μπορούμε να πούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x},$$

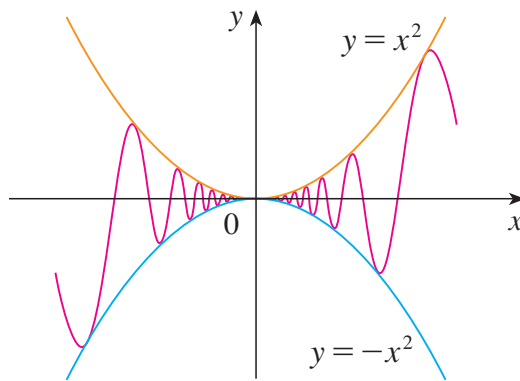
μιας και, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 6, το δεύτερο όριο δεν υπάρχει. Όμως

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2.$$

Προφανώς

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0,$$

άρα από το Θεώρημα 2.2 (Sandwich) έχουμε ότι και $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ (βλ. Σχήμα 31).



Σχήμα 31: Γραφική παράσταση των $y = -x^2$, $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (κόκκινη καμπύλη), και $y = x^2$.

3 Αυστηρός ορισμός του ορίου

Οι ορισμοί του ορίου που είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους είναι κατάλληλοι για μια διαισθητική κατανόηση των βασικών εννοιών του Απειροστικού Λογισμού. Παρόλα αυτά θα πρέπει να καταφύγουμε στον αυστηρό ορισμό του ορίου αν ο στόχος μας είναι η βαθύτερη κατανόηση των εννοιών και η δυνατότητα να αποδεικνύουμε με αυστηρότητα διάφορα αποτελέσματα.

Σύμφωνα με όσα είπαμε στην Παράγραφο 2, όταν λέμε ότι το όριο της $f(x)$ είναι L καθώς το x τείνει στο ξ , εννοούμε ότι οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησής μας πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο L , για όλα τα x που βρίσκονται αρκούντως κοντά στο ξ (αλλά με $x \neq \xi$). Ένας ακριβέστερος ορισμός βασίζεται στο να προσδιορίσουμε με ακρίβεια πόσο μικρή θα πρέπει να θεωρήσουμε την απόσταση $|x - \xi|$ έτσι ώστε η απόσταση $|f(x) - L|$ να γίνει μικρότερη

από κάποιο δεδομένο αριθμό. Θα προσπαθήσουμε ξεκαθαρίσουμε λίγο καλύτερα αυτή την ιδέα μέσω ενός παραδείγματος.

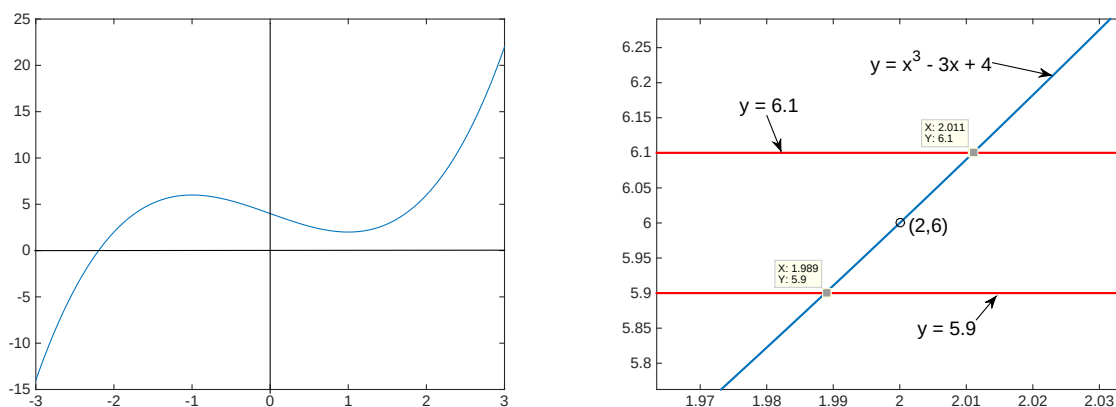
Παράδειγμα. Θα προσπαθήσουμε με τη βοήθεια μιας γραφικής παράστασης να βρούμε έναν αριθμό δ τέτοιον ώστε

$$|(x^3 - 3x + 4) - 6| < 0.1 \quad \text{για κάθε } x \text{ που ικανοποιεί} \quad |x - 2| < \delta.$$

Προφανώς

$$|(x^3 - 3x + 4) - 6| < 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad 5.9 < x^3 - 3x + 4 < 6.1.$$

Επομένως, θέλουμε να προσδιορίσουμε τις τιμές του x για τις οποίες το γράφημα της $y = x^3 - 3x + 4$, που απεικονίζεται στο αριστερό μέρος του Σχήματος 32, βρίσκεται μεταξύ των οριζόντιων ευθειών $y = 5.9$ και $y = 6.1$. Για το λόγο αυτό εστιάζουμε («ζουμάρουμε») στα γραφήματα της $y = x^3 - 3x + 4$ και των οριζόντιων ευθειών $y = 5.9$ και $y = 6.1$ κοντά στο σημείο $(2, 6)$, όπως βλέπουμε στο δεξιό μέρος του Σχήματος 32. Από το γράφημα αυτό (που κατασκευάσαμε με τη βοήθεια του MATLAB) μπορούμε να εκτιμήσουμε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της καμπύλης $y = x^3 - 3x + 4$ με τις ευθείες $y = 5.9$ και $y = 6.1$. Βρίσκουμε ότι η τετμημένη του σημείου τομής της καμπύλης $y = x^3 - 3x + 4$ με την ευθεία $y = 5.9$ είναι περίπου 1.989, ενώ η τετμημένη του σημείου τομής της καμπύλης $y = x^3 - 3x + 4$ με την ευθεία $y = 6.1$ είναι περίπου 2.011. (Ακριβέστερα, για $x = 1.989$ το $y \approx 5.9017$, ενώ για $x = 2.011$ το $y \approx 6.0977$.)



Σχήμα 32: Αριστερά: Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 3x + 4$. Δεξιά: Η γραφική παράσταση της $y = x^3 - 3x + 4$ και των ευθειών $y = 5.9$ και $y = 6.1$ για τιμές του x κοντά στο $x = 2$.

Άρα είναι ασφαλές να πούμε ότι

$$5.9 < x^3 - 3x + 4 < 6.1 \quad \text{για κάθε } x \text{ που ικανοποιεί την ανίσωση } 1.989 < x < 2.011,$$

ή, ισοδύναμα, ότι

$$|(x^3 - 3x + 4) - 6| < 0.1 \quad \text{για κάθε } x \text{ που ικανοποιεί } |x - 2| < 0.011.$$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε x απέχει από το 2 απόσταση μικρότερη από $\delta = 0.011$, είμαστε σε θέση να πούμε ότι το $f(x)$ θα απέχει από το 6 απόσταση μικρότερη του 0.1.

Αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία αντικαθιστώντας τώρα τον αριθμό 0.1 με τον μικρότερο 0.05 θα βρούμε ότι

$$|(x^3 - 3x + 4) - 6| < 0.05 \quad \text{για κάθε } x \text{ που ικανοποιεί } |x - 2| < 0.0055.$$

□

Στην πραγματικότητα, αυτό που συμβαίνει στο προηγούμενο παράδειγμα είναι ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό ϵ και αν θεωρήσω, οσοδήποτε μικρός και αν είναι, μπορώ πάντα να βρω έναν θετικό αριθμό δ έτσι ώστε

$$|(x^3 - 3x + 4) - 6| < \epsilon \quad \text{για κάθε } x \text{ που ικανοποιεί } |x - 2| < \delta.$$

Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x + 4) = 6.$$

Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο «αυστηρό» ορισμό του ορίου:

Ορισμός 3.1. Θα λέμε ότι η $y = f(x)$ συγκλίνει στον L (ή τείνει στον L ή έχει όριο τον L) καθώς ο x τείνει στον ξ , και θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = L,$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - L| < \epsilon$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$.

(Σημειώστε ότι η απαίτηση $0 < |x - \xi|$ είναι ισοδύναμη με την $x \neq \xi$.)

Παράδειγμα. Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 3.1 για να αποδείξετε ότι

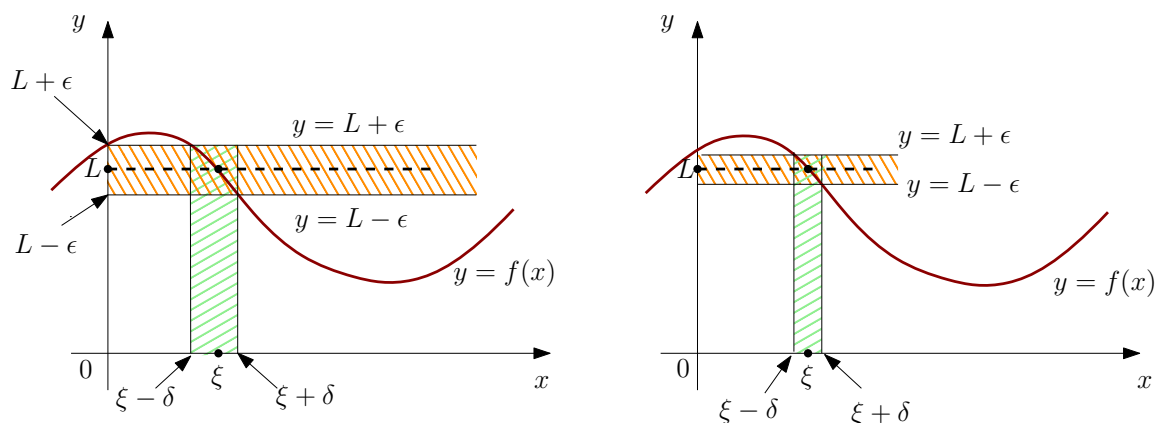
$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1 για $\xi = 0$ και $L = 0$, πρέπει να βρούμε έναν αριθμό $\delta > 0$ τέτοιον ώστε

$$|x^2 - 0| < \epsilon \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ που ικανοποιεί } 0 < |x - 0| < \delta,$$

ή, ισοδύναμα,

$$|x^2| < \epsilon \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ που ικανοποιεί } 0 < |x| < \delta.$$



Σχήμα 33: Γραφική αναπαράσταση του Ορισμού 3.1.

Όμως, ισχύει ότι

$$x^2 < \epsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{\epsilon} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\epsilon}.$$

Άρα, αν επιλέξουμε $\delta = \sqrt{\epsilon}$, τότε προφανώς θα έχουμε ότι

$$x^2 < \epsilon \Leftrightarrow |x| < \delta,$$

που αποδεικνύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. □

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι πολλές φορές δεν είναι καθόλου εύκολο να αποδείξει κανείς τη σύγκλιση μιας συνάρτησης σε κάποιο όριο χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 3.1. Για παράδειγμα, για μια πιο πολύπλοκη συνάρτηση όπως η $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, μια τέτοια απόδειξη δεν θα ήταν εύκολη. Ευτυχώς, κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο γιατί μπορούμε χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 3.1 να αποδείξουμε τις ιδιότητες των ορίων της Παραγράφου 2.1 και, στη συνέχεια, να τις χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τα όρια πολύπλοκων συναρτήσεων χωρίς να καταφεύγουμε κάθε φορά στον ορισμό με τα ϵ και δ .

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τον Ορισμό 3.1 για να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1. Αν τα $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = L_1$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = L_2$ υπάρχουν, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x))$ και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) + \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = L_1 + L_2.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \epsilon,$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $f + g$ που ικανοποιεί $0 < |x - \xi| < \delta$.

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας έχουμε ότι

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|.$$

Άρα αν καταφέρουμε να κάνουμε καθέναν από τους όρους $|f(x) - L_1|$ και $|g(x) - L_2|$ μικρότερο από $\epsilon/2$, τότε θα πετύχουμε $|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \epsilon$.

Επειδή $\epsilon/2 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = L_1$ έχουμε ότι υπάρχει ένα $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{για κάθε } x \quad 0 < |x - \xi| < \delta_1.$$

Ανάλογα, επειδή $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = L_2$ έχουμε ότι υπάρχει ένα $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{για κάθε } x \quad 0 < |x - \xi| < \delta_2.$$

Εστω $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, δηλαδή ο μικρότερος από τους αριθμούς δ_1 και δ_2 .

Τότε αν

$$0 < |x - \xi| < \delta$$

προφανώς θα έχουμε και ότι $0 < |x - \xi| < \delta_1$ και $0 < |x - \xi| < \delta_2$, οπότε

$$|f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{και} \quad |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Άρα

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

οπότε από τον Ορισμό 3.1 έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2.$$

□

Φυσικά, και οι περιπτώσεις των ορίων μιας συνάρτησης στο άπειρο και των άπειρων ορίων μπορούν να ορισθούν με αυστηρότητα. Π.χ.,

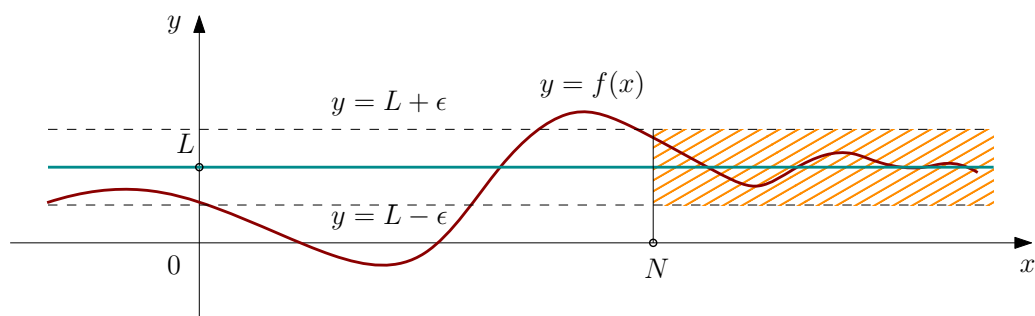
Ορισμός 3.2. Έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος $N > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την $x > N$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

και λέμε ότι η $y = f(x)$ συγκλίνει στον L ή τείνει στον L ή έχει όριο τον L καθώς ο x τείνει στο $+\infty$.



Σχήμα 34: Γραφική αναπαράσταση του Ορισμού 3.2.

Παράδειγμα. Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 3.2 για να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.2 αναζητούμε έναν $N > 0$ τέτοιον ώστε

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon \quad \text{για κάθε } x > 0 \text{ που ικανοποιεί } x > N.$$

(Υποθέτουμε ότι το $x > 0$ μιας και ενδιαφερόμαστε για το τι συμβαίνει για μεγάλες θετικές τιμές του x .)

Αφού $x > 0$ έχουμε

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \epsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\epsilon} \quad \text{για κάθε } x > 0 \text{ που ικανοποιεί } x > N.$$

Άρα, αν επιλέξουμε $N = 1/\epsilon$, τότε προφανώς $1/x < \epsilon \Leftrightarrow x > N$. □

Ορισμός 3.3. Έστω ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει κάποιος κατάλληλος $\delta > 0$ ώστε, αν $0 < |x - \xi| < \delta$ και ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε θα ισχύει $f(x) > M$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$$

και λέμε ότι η $y = f(x)$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή τείνει στο $+\infty$ ή έχει όριο το $+\infty$ καθώς ο x τείνει στον ξ .

(Για περισσότερες πληροφορίες στην έννοια του ορίου και την αυστηρή θεμελίωσή του, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί π.χ. να ανατρέξει στις σημειώσεις Απειροστικού Λογισμού του Μιχ. Παπαδημητράκη, βλ. Βιβλιογραφία.)

4 Συνέχεια συναρτήσεων

Ορισμός 4.1. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο ξ του πεδίου ορισμού της, αν

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi).$$

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο ξ αν το $f(x)$ πλησιάζει το $f(\xi)$, καθώς το x πλησιάζει το ξ . Επομένως, μια συνεχής συνάρτηση f έχει την ιδιότητα «μικρές μεταβολές» του x να επιφέρουν «μικρές μεταβολές» στο $f(x)$. Απλούστερα: η συνάρτηση είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν το γράφημά της δεν «σπάει» στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Αν η f ορίζεται σε όλα τα σημεία ενός ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το ξ , εκτός ίσως από το ίδιο το ξ , τότε θα λέμε ότι είναι ασυνεχής στο ξ αν δεν είναι συνεχής στο ξ .

Παράδειγμα 1. Εντοπίστε τα σημεία ασυνέχειας των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{(b)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \\ \text{(c)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x) &= [x] \quad (\text{ακέραιο μέρος του } x). \end{aligned}$$

Λύση. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φαίνονται στο Σχήμα 35.

(a) Η f δεν ορίζεται στο $x = 2$, και άρα είναι ασυνεχής στο $x = 2$.

(b) Εδώ $f(0) = 1$ αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, άρα η f είναι ασυνεχής στο $x = 0$.

(c) Εδώ $f(2) = 1$, και

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3,$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ και η f είναι ασυνεχής στο $x = 2$.

(d) Η συνάρτηση ακέραιο μέρος είναι ασυνεχής σε κάθε ακέραιο, αφού το $\lim_{x \rightarrow k} [x]$ δεν υπάρχει αν ο k είναι ακέραιος (μιας και υπάρχουν τα πλευρικά όρια αλλά είναι διαφορετικά). Το είδος της ασυνέχειας που εμφανίζεται στις περιπτώσεις (a) και (c) χαρακτηρίζεται ως **άρσιμη ασυνέχεια** επειδή θα μπορούσαμε να την αποφύγουμε, απλά, ορίζοντας διαφορετικά την f στο σημείο $x = 2$. Οι ασυνέχειες των περιπτώσεων (b) και (d) χαρακτηρίζονται ως **ασυνέχειες πρώτου είδους**. Ειδικότερα, οι ασυνέχειες όπως αυτές της περίπτωσης (d) χαρακτηρίζονται ως **ασυνέχειες άλματος**, αφού οι τιμές της συνάρτησης «πηδάνε» από μια τιμή σε μια άλλη. Τέλος, όταν δεν υπάρχει ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$, λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **ασυνέχεια δεύτερου είδους** ή **ουσιώδη ασυνέχεια** στο ξ .

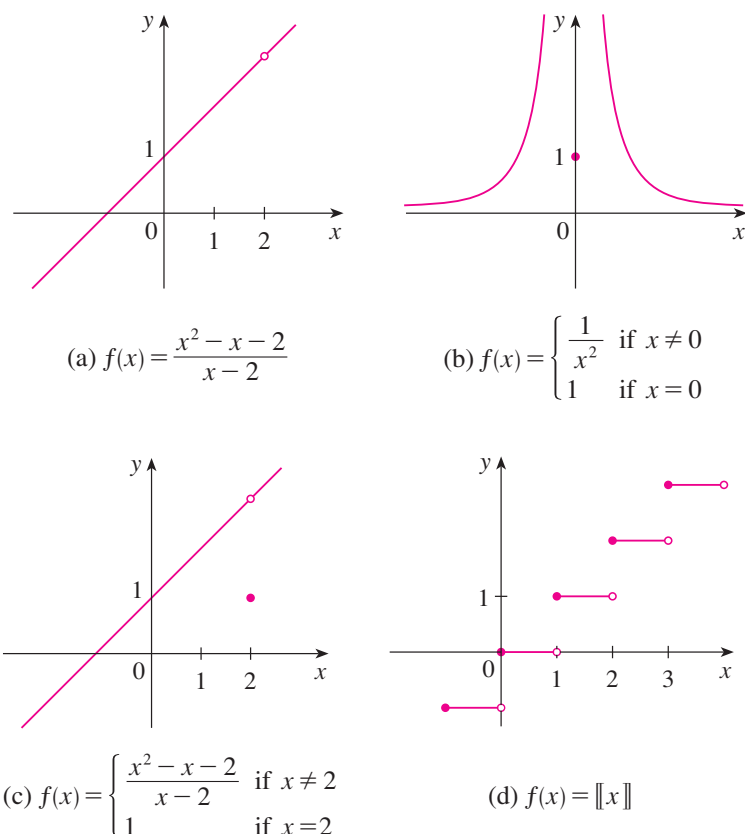
Π.χ. η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases},$$

παρουσιάζει ουσιώδη ασυνέχεια στο 0, επειδή δεν υπάρχει το δεξί πλευρικό όριο στο 0 (βλ. Παράδειγμα 6 στην προηγούμενη ενότητα).

Ορισμός 4.2. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής από δεξιά, σε ένα σημείο ξ του πεδίου ορισμού της, αν

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = f(\xi),$$



Σχήμα 35: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων του Παραδείγματος 1.

και λέμε ότι είναι συνεχής από αριστερά στο ξ , αν

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi).$$

Ορισμός 4.3. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα διάστημα αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος. (Αν η f ορίζεται μόνο από τη μία πλευρά ενός άκρου του διαστήματος, τότε με τον όρο συνεχής, εννοούμε συνεχής από δεξιά ή από αριστερά.)

4.1 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Στη συνέχεια διατυπώνουμε ορισμένες προτάσεις χωρίς απόδειξη. (Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει για τις αποδείξεις σε οποιοδήποτε από τα βιβλία που προτείνονται στη βιβλιογραφία. Οι αποδείξεις αυτές δεν είναι δύσκολες.)

Πρόταση 4.1. Έστω f και g συναρτήσεις συνεχείς στο ξ και λ μια πραγματική σταθερά. Τότε οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς στο ξ :

(1) $f \pm g$, (2) $|f|$, (3) λf , (4) fg , (5) $\frac{f}{g}$, αν $g(\xi) \neq 0$.

Πρόταση 4.2. (α) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

(β) Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

(γ) Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις ριζών είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.

(δ) Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Παράδειγμα 2. Σε ποιά διαστήματα είναι συνεχής καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις;

1. $f(x) = x^{50} - 3x^{17} + 6$.

2. $g(x) = \frac{x^3 - 5x + 6}{x^2 - 4}$.

3. $h(x) = \frac{x+1}{x-2} + \sqrt{x+2}$.

Λύση. 1. Η f είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ γιατί είναι πολυωνυμική.

2. Η g είναι ρητή συνάρτηση, άρα είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2\}$. Επομένως η g είναι συνεχής στο $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

3. Μπορούμε να γράψουμε την h ως άθροισμα δύο συναρτήσεων: $h(x) = F(x) + G(x)$, όπου $F(x) = \frac{x+1}{x-2}$ και $G(x) = \sqrt{x+2}$. Η $F(x)$ είναι συνεχής, ως ρητή, σε κάθε πραγματικό αριθμό εκτός από το 2, στο οποίο μηδενίζεται ο παρονομαστής της. Η $G(x)$ (ως τετραγωνική ρίζα) είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, δηλαδή στο σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$. Άρα η $h(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$. $\square$

Θεώρημα 4.1. Αν η f είναι συνεχής στο η και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \eta$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(g(x)) = f(\eta)$.
Με άλλα λόγια,

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)\right).$$

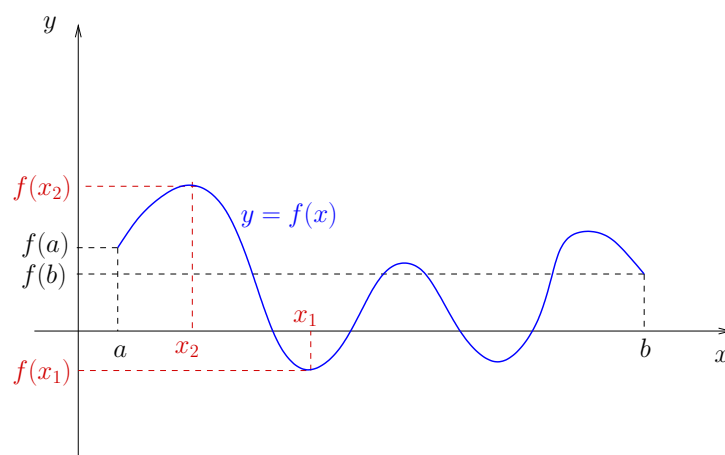
Η διαίσθησή μας λέει ότι το Θεώρημα 4.1 είναι ένα λογικό αποτέλεσμα. Αν το x είναι κοντά στο ξ , τότε το $g(x)$ είναι κοντά στο η , και επειδή η f είναι συνεχής στο η , αναμένουμε ότι το $f(g(x))$ θα είναι κοντά στο $f(\eta)$.

Θεώρημα 4.2. Αν η g είναι συνεχής στο ξ και η f είναι συνεχής στο $g(\xi)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ με $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ είναι συνεχής στο ξ .

Θεώρημα 4.3 (Θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής). Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$. Τότε υπάρχουν x_1, x_2 στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

για κάθε x στο $[a, b]$.



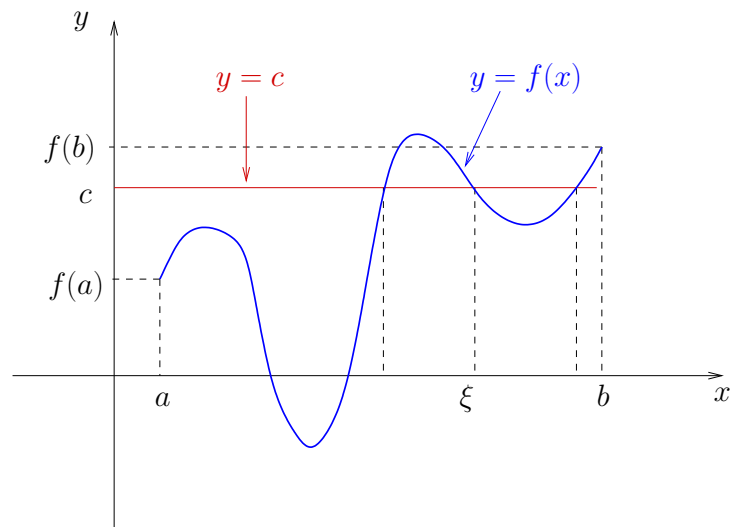
Σχήμα 36: Το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής.

Όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 36 το γράφημα της συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$ είναι μια καμπύλη που ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ του επιπέδου. Είναι, επίσης, φανερό από το σχήμα του γραφήματος – όποιο κι αν είναι αυτό – ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του, $(x_1, f(x_1))$, που βρίσκεται χαμηλότερα από όλα τα άλλα σημεία του γραφήματος, δηλαδή αποτελεί «πυθμένα», και τουλάχιστον ένα σημείο του, $(x_2, f(x_2))$, που βρίσκεται ψηλότερα από όλα τα άλλα σημεία του γραφήματος, δηλαδή αποτελεί «κορυφή». Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι υπάρχει κάποιος x_1 στον οποίο η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή και κάποιος x_2 στον οποίο η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή. Οι αριθμοί αυτοί μπορεί να μην είναι μοναδικοί. Δηλαδή μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας x_1 στους οποίους η συνάρτηση έχει την (ίδια) ελάχιστη τιμή της και περισσότεροι από ένας x_2 στους οποίους η συνάρτηση έχει την (ίδια) μέγιστη τιμή της.

Θεώρημα 4.4 (Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής). Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$. Τότε κάθε αριθμός c , ο οποίος είναι ανάμεσα στις τιμές $f(a)$ και $f(b)$, είναι τιμή της συνάρτησης. Δηλαδή για κάθε c με την ιδιότητα $f(a) \leq c \leq f(b)$ ή $f(b) \leq c \leq f(a)$ υπάρχει κάποιος ξ στο $[a, b]$ ώστε $f(\xi) = c$. Με άλλα λόγια, για κάθε τέτοιον c η εξίσωση $f(x) = c$ έχει (τουλάχιστον μια) λύση ξ στο $[a, b]$.

Ας δούμε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος αυτού (Σχήμα 37). Η ευθεία $y = c$ είναι παράλληλη προς τον άξονα των x . Τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ έχουν ύψη $f(a)$ και $f(b)$, αντίστοιχα, και άρα θα βρίσκονται το ένα πάνω από την ευθεία $y = c$ και το άλλο κάτω από την ευθεία αυτή. Επομένως, το γράφημα της **συνεχούς** συνάρτησης $y = f(x)$, που είναι μια καμπύλη που ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, θα «κόβει» την ευθεία $y = c$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

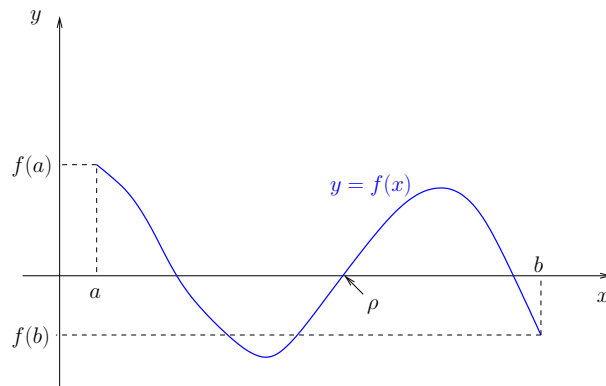
Τα επόμενα δύο θεωρήματα είναι άμεσες εφαρμογές του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.



Σχήμα 37: Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Θεώρημα 4.5 (Bolzano). Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αν $f(a)f(b) < 0$ (δηλαδή οι τιμές της f στα άκρα του διαστήματος είναι ετερόσημες), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα ρ στο (a, b) ώστε $f(\rho) = 0$.

Πράγματι, από την $f(a)f(b) < 0$ συνεπάγεται $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$ και το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής (βλ. Σχήμα 38).



Σχήμα 38: Το θεώρημα Bolzano.

Θεώρημα 4.6 (Ιδιότητα σταθερού προσήμου). Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I . Αν ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε x στο I , τότε είτε $f(x) > 0$ για κάθε x στο I , ή $f(x) < 0$ για κάθε x στο I .

4.2 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{αν } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

Για ποιά τιμή της σταθεράς c η $f(x)$ είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$;

Λύση: Για $x < 2$, $f(x) = cx^2 + 2x$, που είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Για $x > 2$, $f(x) = x^3 - cx$, που επίσης είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Επομένως, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η $f(x)$ θα είναι συνεχής και στο $x = 2$. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow c \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 2^3 - c \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 4c + 4 &= 8 - 2c \Leftrightarrow 6c = 4 \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα μεταξύ του 1 και του 2.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$, που είναι συνεχής ως πολυωνυμική σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, άρα και στο κλειστό διάστημα $[1, 2]$. Επίσης,

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0, \\ f(2) &= 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0. \end{aligned}$$

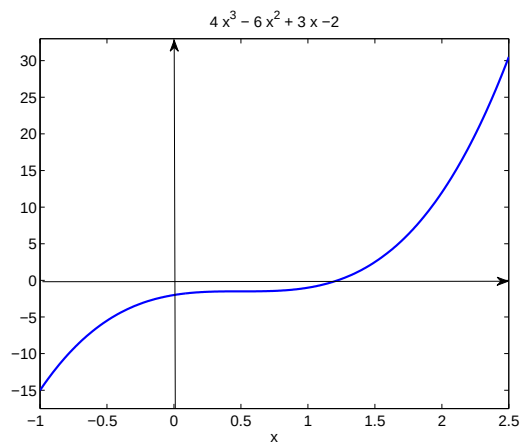
Άρα η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[1, 2]$ και οι τιμές στα άκρα του διαστήματος είναι ετερόσημες, επομένως από το Θεώρημα Bolzano 4.5 έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα ρ της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(1, 2)$. Το γράφημα της $f(x)$ δίνεται στο Σχήμα 39. □

Παράδειγμα 3. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 + x$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 10$.

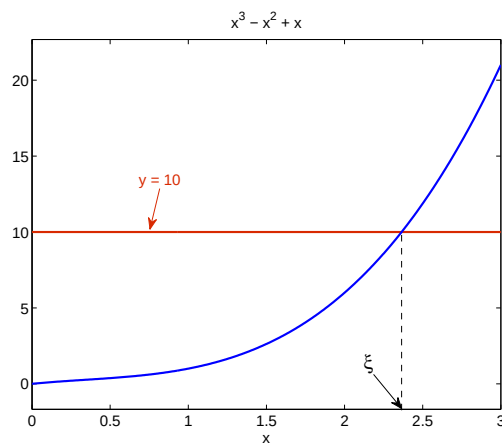
Λύση: Η $f(x) = x^3 - x^2 + x$, είναι συνεχής ως πολυωνυμική σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Επίσης,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(3) &= 3^3 - 3^2 + 3 = 27 - 9 + 3 = 21. \end{aligned}$$

Άρα το 10 είναι μεταξύ των $f(0)$ και $f(3)$, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 3]$, και επομένως από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής 4.4 έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 10$. (Δείτε και το Σχήμα 40.) □



Σχήμα 39: Το γράφημα της $y = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$.



Σχήμα 40: Το γράφημα της $y = x^3 - x^2 + x$.

Ασκήσεις

1. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

(i) $f(x) = \sqrt{4 - 3x^2}$,

(ii) $g(x) = 1/(x + 1)$,

(iii) $h(x) = 1 + \sin x$,

(iv) $s(x) = \ln(\ln x)$.

2. Ελέγξτε αν οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι άρτιες, περιττές, ή ούτε άρτιες ούτε περιττές.

(i) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$.

(ii) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$.

(iii) $f(x) = e^{-x^2}$.

(iv) $f(x) = 1 + \sin x$.

3. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x^2 - 9$, βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ και $g \circ g$, καθώς και τα πεδία ορισμού τους.

4. Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια, αν υπάρχουν.

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + x} \right)$.

(iv) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7}$.

(v) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$.

(vi) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$.

5. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos \frac{2}{x} = 0$.

6. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + x^2} \sin \frac{\pi}{x} = 0$.

7. Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια, αν υπάρχουν. Αν δεν υπάρχουν, αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(i) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + |x - 3|)$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x + 12}{|x + 6|}$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$.

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$.

8. Βρείτε τις οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες της καμπύλης

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}.$$

9. Αιτιολογήστε γιατί οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι ασυνεχείς στα δεδομένα σημεία ξ . Σχεδιάστε τις γραφικές τους παραστάσεις.

(i) $f(x) = \ln |x - 2|$ στο $\xi = 2$.

$$(ii) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad \text{στο } \xi = 1.$$

$$(iii) f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{στο } \xi = 0.$$

10. Δείξτε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

$$(i) f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < \pi/4 \\ \cos x, & x \geq \pi/4 \end{cases}.$$

11. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Bolzano για να δείξετε ότι οι ακόλουθες εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια ρίζα στα δοσμένα διαστήματα.

$$(i) x^4 + x - 3 = 0, \quad \text{στο } (1, 2) \quad (ii) x^2 = \sqrt{x+1}, \quad \text{στο } (1, 2)$$

$$(iii) \cos x = x, \quad \text{στο } (0, 1) \quad (iv) \ln x = e^{-x}, \quad \text{στο } (1, 2).$$

12. Εντοπίστε ένα διάστημα μέσα στο οποίο η εξίσωση $\ln x = 3 - 2x$ να έχει ρίζα.

Σημείωση: Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό. Κάποια από τα σχήματα του κεφαλαίου αυτού έχουν παρθεί από τα βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- Μιχ. Παπαδημητράκης, Απειροστικός Λογισμός: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής, Σημειώσεις Παραδόσεων, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.
- J. Stewart, Calculus, 6th ed., Thomson Brooks/Cole, 2008.
- E. Swokowski, J. Cole, Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, Classic 12th Edition, Brooks/Cole, 2010.
- M.D. Weir, J., G.B. Thomas, Thomas' Calculus, Addison-Wesley, 2010.