

Οι πραγματικοί αριθμοί – Μια σύντομη επανάληψη

Δημήτρης Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Σχολή Μηχανικών



Οκτώβριος 2018

1 Εισαγωγή

Όλοι έχουμε κάποια γνώση των πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων τους. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια θα αποκαλούμε τους πραγματικούς αριθμούς απλώς αριθμούς.

Οι απλούστεροι αριθμοί είναι οι λεγόμενοι *φυσικοί* $1, 2, \dots$, οι *ακέραιοι* $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, και οι *ρητοί*, δηλαδή οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{m}{n}$, όπου m, n είναι ακέραιοι και $n \neq 0$. Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων, και με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών. Οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί λέγονται *άρρητοι*, και τέτοιοι αριθμοί ήταν γνωστοί από την αρχαιότητα, π.χ., το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με κάθετη πλευρά μήκους 1.

2 Ανισότητες και απόλυτες τιμές

Θεωρούμε γνωστές τις ιδιότητες των ανισοτήτων και υπενθυμίζουμε τις βασικότερες:

1. Αν $x < y$, τότε $x + z < y + z$.
2. Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $x + z < y + w$.
3. Αν $x < y$ και $z > 0$, τότε $xz < yz$.
4. Αν $x < y$ και $z < 0$, τότε $xz > yz$.
5. Αν $0 < x < y$, τότε $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

Ορισμός 1. Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού x συμβολίζεται με $|x|$ και ορίζεται ως

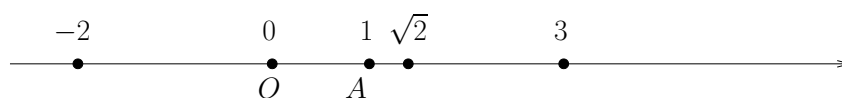
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι η απόλυτη τιμή κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός. Ακολουθούν οι βασικότερες ιδιότητες:

1. $|xy| = |x||y|$, και $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ αν $y \neq 0$.
2. $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ (τριγωνική ανισότητα).
3. Έστω $a > 0$. Τότε
 - $|x| = a$ αν και μόνον αν $x = \pm a$.
 - $|x| < a$ αν και μόνον αν $-a < x < a$.
 - $|x| > a$ αν και μόνον αν $x > a$ ή $x < -a$.

3 Η πραγματική ευθεία

Όπως έχουμε δει από το γυμνάσιο, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τους αριθμούς με σημεία μιας ευθείας. Υπενθυμίζουμε τη διαδικασία: Θεωρούμε μια ευθεία και ένα αυθαίρετο σημείο O το οποίο αναπαριστά τον αριθμό 0. Θεωρώ ένα άλλο αυθαίρετο σημείο A το οποίο αναπαριστά τον αριθμό 1, βλ. Σχήμα 2. Τότε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OA παίζει το ρόλο της μονάδας μέτρησης στην ευθεία. Τώρα πια μπορούμε να αναπαραστήσουμε οποιονδήποτε άλλον αριθμό x με ένα σημείο X πάνω στην ευθεία. Φυσικά, το X θα βρίσκεται στην ίδια μεριά του O που βρίσκεται και το A αν $x > 0$, ενώ θα βρίσκεται στην αντίθετη μεριά του O όταν $x < 0$.



Σχήμα 1: Η πραγματική ευθεία.

(Επειδή κάθε αριθμός x αναπαριστάται από ένα μόνο σημείο X της ευθείας, και κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε ένα μόνο αριθμό δεν θα κάνουμε, στη συνέχεια, διάκριση μεταξύ σημείων και αριθμών και θα αναφερόμαστε στο σημείο x ή στον αριθμό x .) Προφανώς, η απόσταση κάθε σημείου x από το 0 είναι ίση με $|x|$, ενώ η απόσταση μεταξύ δύο σημείων x και y της ευθείας είναι ίση με $|x - y|$.

Υπενθυμίζουμε ακόμη, ότι υπάρχουν συγκεκριμένα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών που λέγονται *διαστήματα* και αντιστοιχούν γεωμετρικά σε μέρη της ευθείας. Π.χ.

- Αν $a < b$, ορίζουμε $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ και το ονομάζουμε **ανοικτό διάστημα**,
- αν $a < b$, ορίζουμε $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ και το ονομάζουμε **κλειστό διάστημα**,
- $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$, $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$,
- $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$.



Σχήμα 2: Γεωμετρική απεικόνιση ανοικτού (αριστερά) και κλειστού (δεξιά) διαστήματος.

Τέλος, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, και στο σημείο αυτό θα ήταν καλό να τονίσουμε ότι τα $\pm\infty$ είναι απλά και μόνο σύμβολα και **δεν** είναι αριθμοί. Μπορούμε, π.χ., να φανταζόμαστε το $+\infty$ ως μια «θετική ποσότητα» με μέγεθος μεγαλύτερο από οποιονδήποτε θετικό αριθμό.

4 Δυνάμεις και ρίζες.

4.1 Δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες.

Αν $n > 0$ ακέραιος, ορίζουμε

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n.$$

Το a λέγεται **βάση** και το n **εκθέτης**.

Αν, επιπλέον, $a \neq 0$, τότε ορίζουμε

$$a^0 = 1 \quad \text{και} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Από το γυμνάσιο γνωρίζουμε την ακόλουθη ταυτότητα:

Αν $n \geq 2$ είναι φυσικός, τότε

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Επίσης, ορίζουμε ως **παραγοντικό** ενός φυσικού αριθμού n , και συμβολίζουμε με $n!$ το γινόμενο

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \quad \text{και} \quad 0! = 1.$$

Στη συνέχεια για οποιουσδήποτε ακραίους m, n ορίζουμε τον λεγόμενο **διωνυμικό συντελεστή**

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Με τη βοήθεια του συμβολισμού αυτού μπορούμε να γράψουμε και το λεγόμενο **διωνυμικό τύπο του Νεύτωνα** (Newton):

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

Ειδικές περιπτώσεις του διωνυμικού τύπου του Νεύτωνα είναι οι πολύ γνωστές μας από το γυμνάσιο ταυτότητες

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\(x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

Τώρα, αν $n > 0$ ακέραιος, και $a \geq 0$, ονομάζουμε **n -οστή ρίζα του a** και συμβολίζουμε

$$\sqrt[n]{a}$$

τη μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = a$.

Π.χ., για $n = 2$: ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα του a , και συμβολίζουμε $\sqrt[2]{a}$ ή $\sqrt{a}$, τον $x \geq 0$ που ικανοποιεί $x^2 = a$ (δηλαδή $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$ και $x \geq 0$).

4.2 Δυνάμεις με ρητούς εκθέτες.

Έστω $a > 0$ και $p = \frac{m}{n}$ ένας ρητός αριθμός με m ακέραιο και n φυσικό. Τότε ορίζουμε

$$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Για κάθε θετικό ρητό $p > 0$ ορίζουμε $0^p = 0$. Επίσης, άμεσα βλέπουμε ότι για κάθε φυσικό n , και για κάθε $a \geq 0$, ισχύει

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Για κάθε θετικό ρητό $p > 0$ ορίζουμε $0^p = 0$.

Στο σημείο αυτό ας ανακεφαλαιώσουμε σε ποιές περιπτώσεις μέχρι τώρα ορίσαμε τον αριθμό a^x . Ο a^x **ορίζεται**

- αν $a > 0$ και ο x είναι ρητός,
- αν $a = 0$ και ο x είναι θετικός ρητός,
- αν $a < 0$ και ο x είναι ακέραιος.

Ο a^x **δεν ορίζεται**

- αν $a = 0$ και $x \leq 0$,
- αν $a < 0$ και ο x δεν είναι ακέραιος.

Παράδειγμα. Οι ακόλουθοι αριθμοί ορίζονται:

$$1.4^{-\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{1.4})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{1.4})^2}, \quad 0^{3/4} = 0, \quad (-2.5)^3 = (-2.5)(-2.5)(-2.5).$$

Δεν ορίζονται οι αριθμοί:

$$(-2)^{\frac{2}{3}}, \quad (-1.4)^{1.2}, \quad 0^{-3}, \quad 0^0.$$



Όπως γνωρίζουμε (από το γυμνάσιο) ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

Ιδιότητες των δυνάμεων: Αν $a, b > 0$ και x, y είναι ρητοί, τότε

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Αν $0 < a < b$ και $x > 0$, τότε $a^x < b^x$

Αν $0 < a < b$ και $x < 0$, τότε $a^x > b^x$

Αν $x < y$ και $a > 1$, τότε $a^x < a^y$

Αν $x < y$ και $0 < a < 1$, τότε $a^x > a^y$.

4.3 Δυνάμεις με άρρητους εκθέτες.

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε δυνάμεις με άρρητους εκθέτες. Για να γίνει αυτό με αυστηρά μαθηματικό τρόπο απαιτούνται βαθύτερες έννοιες της ανάλυσης που ξεφεύγουν από τους στόχους και το επίπεδο αυτών των σημειώσεων. Παρόλα αυτά, στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια διαισθητική προσέγγιση του πώς ορίζονται δυνάμεις της μορφής a^x , όταν ο x είναι άρρητος.

Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση $a > 1$. Για παράδειγμα, ας δούμε τι απάντηση θα πάρουμε αν χρησιμοποιήσουμε ένα κομπιουτεράκι χειρός για να υπολογίσουμε τον αριθμό $2^{\sqrt{2}}$. Στην περίπτωση αυτή διαπιστώνουμε ότι

$$2^{\sqrt{2}} \approx 2.665\,144\,143.$$

Ας χρησιμοποιήσουμε και πάλι το κομπιουτεράκι για να πάρουμε μια προσέγγιση του $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} \approx 1.414\,213\,562.$$

Στον πίνακα που ακολουθεί στην πρώτη γραμμή δίνονται μερικές ρητές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$, και στη δεύτερη γραμμή υπολογίζουμε τους αριθμούς 2^x παίρνοντας ως x τις προσεγγίσεις αυτές.

x	1	1.4	1.41	1.414	1.4142	...
2^x	2	2.639016	2.657372	2.664750	2.665119	...

Επομένως, διαισθητικά περιμένουμε ο $2^{\sqrt{2}}$ να είναι ο αριθμός εκείνος στον οποίο «θα πλησιάζουμε» όταν παίρνουμε όλο και ακριβέστερες ρητές προσεγγίσεις του άρρητου $\sqrt{2}$.

Δεδομένου λοιπόν ότι υπάρχει ένας αυστηρός μαθηματικός τρόπος ώστε να ορίσουμε τη δύναμη a^x , για $a > 1$ και x οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, έτσι ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες των δυνάμεων που είδαμε προηγουμένως για ρητούς εκθέτες, μπορούμε να ορίσουμε επίσης

$$1^x = 1,$$

και, αν $0 < a < 1$ και x άρρητος, τότε $\frac{1}{a} > 1$ και $-x$ άρρητος, οπότε ορίζουμε

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Τέλος, αν $x > 0$ ορίζουμε $0^x = 0$.

5 Λογάριθμοι.

Ένα βασικό αποτέλεσμα της ανάλυσης, του οποίου όμως η απόδειξη ξεφεύγει και πάλι από τους σκοπούς αυτής της παρουσίασης, μας διαβεβαιώνει ότι αν $a > 0$ και $a \neq 1$, τότε για κάθε $y > 0$ υπάρχει μοναδικός αριθμός x τέτοιος ώστε

$$a^x = y.$$

Αν $y > 0$ ορίζουμε ως **λογάριθμο του y με βάση a** τη μοναδική λύση της εξίσωσης $a^x = y$ και τη συμβολίζουμε

$$\log_a y.$$

Δηλαδή, αν $a > 0$, $a \neq 1$, και $y > 0$:

$$x = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad a^x = y.$$

Παρατήρηση: Από τον ορισμό συμπεραίνουμε άμεσα ότι

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{για κάθε } x > 0, \quad \text{και} \quad \log_a a^x = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ιδιότητες των λογαρίθμων. Έστω $a > 0$ και $a \neq 1$. Τότε

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ και $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, για κάθε $x, y > 0$.
2. $\log_a(x^y) = y \log_a x$ για κάθε $x > 0$ και οποιοδήποτε y .
3. $\log_a 1 = 0$ και $\log_a a = 1$.
4. Έστω $0 < x < y$ και $a > 1$. Τότε $\log_a x < \log_a y$.
5. Έστω $0 < x < y$ και $0 < a < 1$. Τότε $\log_a x > \log_a y$.

Απόδειξη.

1. Θέτουμε $z = \log_a x$ και $w = \log_a y$. Τότε από τον ορισμό έχουμε ότι $a^z = x$ και $a^w = y$ οπότε

$$xy = a^z a^w = a^{z+w}.$$

Αφού $xy = a^{z+w}$, από τον ορισμό και πάλι, έχουμε $\log_a(xy) = z + w = \log_a x + \log_a y$.

Η απόδειξη της $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ είναι εντελώς ανάλογη.

2. Θέτουμε $z = \log_a x$. Τότε

$$\begin{aligned} a^z = x &\Rightarrow (a^z)^y = x^y \Rightarrow a^{yz} = x^y \Rightarrow \log_a a^{yz} = \log_a(x^y) \Rightarrow \\ yz &= \log_a(x^y) \Rightarrow y \log_a x = \log_a(x^y). \end{aligned}$$

3. Προκύπτουν άμεσα από τις $a^0 = 1$ και $a^1 = a$.

4. και 5. Έστω $0 < x < y$ και θέτουμε $z = \log_a x$ και $w = \log_a y$. Τότε $a^z = x$, $a^w = y$, και επειδή $x < y$, έχουμε αμέσως ότι $a^z < a^w$.

Τώρα, αν $a > 1$ αυτό συνεπάγεται ότι $z < w \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y$.

Αν $0 < a < 1$ αυτό συνεπάγεται ότι $z > w \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$. □

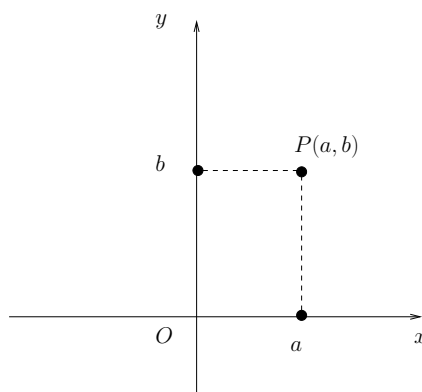
Τέλος, ισχύει και ο ακόλουθος **τύπος αλλαγής βάσης**:

Έστω $a, b > 0$ και $a, b \neq 1$. Τότε για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

6 Καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων

Όπως είδαμε μπορούμε να αναπαραστήσουμε οποιονδήποτε αριθμό με ένα σημείο της λεγόμενης πραγματικής ευθείας. Ανάλογα, μπορούμε να αναπαραστήσουμε διατεταγμένα ζεύγη αριθμών με σημεία του επιπέδου. Ξεκινάμε ζωγραφίζοντας δύο κάθετες ευθείες οι οποίες τέμνονται στο σημείο O . Συνήθως, η μία ευθεία είναι οριζόντια και την αποκαλούμε άξονα των x και η άλλη κατακόρυφη και την αποκαλούμε άξονα των y , βλ. Σχήμα 3. Τότε σε κάθε σημείο του επιπέδου P μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό διατεταγμένο ζεύγος αριθμών ως εξής: Από το σημείο P φέρνουμε κάθετες προς τους άξονες των x και y και έστω ότι τους τέμνουν στα σημεία a και b , αντίστοιχα. Ο αριθμός a λέγεται **τετμημένη** του σημείου P , και ο b λέγεται **τεταγμένη** του σημείου P . Λέμε επίσης ότι το σημείο P έχει **συντεταγμένες** (a, b) , και γράφουμε $P(a, b)$.



Σχήμα 3: Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

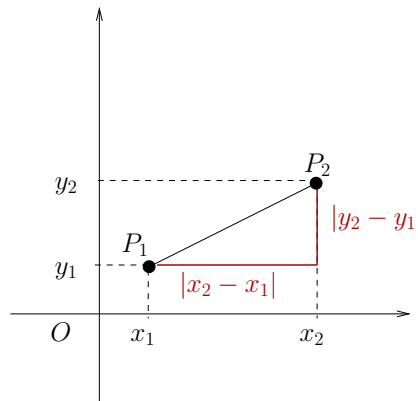
Εργαζόμενοι αντίστροφα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (a, b) ένα μοναδικό σημείο P του επιπέδου. Για το λόγο αυτό δεν θα κάνουμε στη συνέχεια διάκριση μεταξύ του σημείου P και του ζεύγους (a, b) και θα λέμε συχνά «το σημείο (a, b) ». Αν θεωρήσουμε τώρα δύο σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$, βλ. Σχήμα 4, η απόστασή τους συμβολίζεται $|P_1 P_2|$ και δίνεται από τον τύπο

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Ασκήσεις

1. Για τις ανισότητες:

$$\alpha) |x - 1| > 2, \quad \beta) |x - 2| \leq |x + 2|, \quad \gamma) (x - 3)^2 \geq 9,$$



Σχήμα 4: Απόσταση δύο σημείων.

γράψτε σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων το σύνολο των x για τις οποίες αληθεύουν.

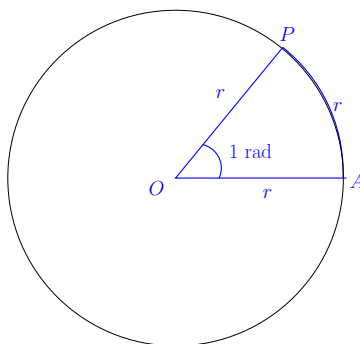
2. Λύστε την εξίσωση $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.
3. Λύστε την ανίσωση $|x - 1| - |x - 3| \geq 5$.
4. Μέσω της γεωμετρικής αναπαράστασης των αριθμών αιτιολογήστε την πρόταση:
αν $a \leq x \leq b$ και $a \leq y \leq b$, τότε $|x - y| \leq b - a$.
5. Αποδείξτε ότι $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ και $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.
6. Δείξτε ότι $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
7. Αν οι αριθμοί x, y δεν είναι και οι δυο 0, δείξτε ότι $x^2 + xy + y^2 > 0$.
8. Εκφράστε την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου με εμβαδόν 25 m^2 ως συνάρτηση της περιμέτρου p .
9. Αποδείξτε ότι $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ για κάθε $a, b \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;
10. Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των λογαρίθμων για να υπολογίσετε το $\log_2 80 - \log_2 5$.
11. Υπολογίστε τους $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$ και $10^{3(\log_{10} 2)}$.
12. Υπολογίστε τους $\log_3 9$, $\log_{1/3} 3$, $\log_{1/3} 9$.
13. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι για κάθε $y > 0$: $\log_{1/a} y = -\log_a y$.
14. Υπολογίστε την παράσταση: $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5) \dots (\log_{30} 31)(\log_{31} 32)$.

15. Περιγράψτε και σχεδιάστε σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα χωρία που ορίζουν τα σύνολα: α) $\{(x, y) \mid x \geq 0\}$, β) $\{(x, y) \mid y = 1\}$, γ) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$.

Α' Παράρτημα: Σύντομη επανάληψη στην τριγωνομετρία

Α'.1 Γωνίες

Οι γωνίες μετριοούνται σε μοίρες ή σε ακτίνια (radians ή rad). Ένα ακτίνιο είναι το μέτρο της επίκεντρης γωνίας* ενός κύκλου που βαίνει σε ένα τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου, βλ. Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Γωνία 1 rad.

Μια πλήρης γωνία (δηλ., η γωνία που προκύπτει από μια πλήρη περιστροφή) είναι ίση με 360° ή 2π ακτίνια. Άρα

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ, \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ, \quad \text{και} \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.017 \text{ rad}.$$

Επομένως,

- για να μετατρέψω μοίρες σε ακτίνια, πολλαπλασιάζω με $\pi/180$,
- για να μετατρέψω ακτίνια σε μοίρες, πολλαπλασιάζω με $180/\pi$.

Παράδειγμα. α) Βρείτε τη γωνία 60° σε ακτίνια. β) Εκφράστε τη γωνία $7\pi/4$ σε μοίρες.

Λύση: α) $60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

β) $\frac{7\pi}{4} \text{ rad} = \frac{7\pi}{4} \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 315^\circ$. □

Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται η αντιστοιχία μεταξύ μοιρών και ακτινίων για κάποιες χαρακτηριστικές γωνίες.

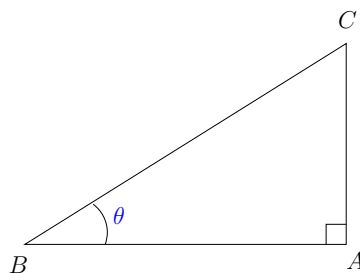
*Επίκεντρη λέγεται η γωνία που έχει κορυφή το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της είναι ακτίνες του κύκλου

Μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Ακτίνια	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π

Α'.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABC (βλ. Σχήμα 6) ορίζουμε

$$\begin{aligned}
 \text{Ημίτονο της γωνίας } \theta : \quad \sin \theta &= \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{(AC)}{(BC)}. \\
 \text{Συνημίτονο της γωνίας } \theta : \quad \cos \theta &= \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{(AB)}{(BC)}. \\
 \text{Εφαπτομένη της γωνίας } \theta : \quad \tan \theta &= \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \frac{(AC)}{(AB)}. \\
 \text{Συνεφαπτομένη της γωνίας } \theta : \quad \cot \theta &= \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}} = \frac{(AB)}{(AC)}.
 \end{aligned}$$

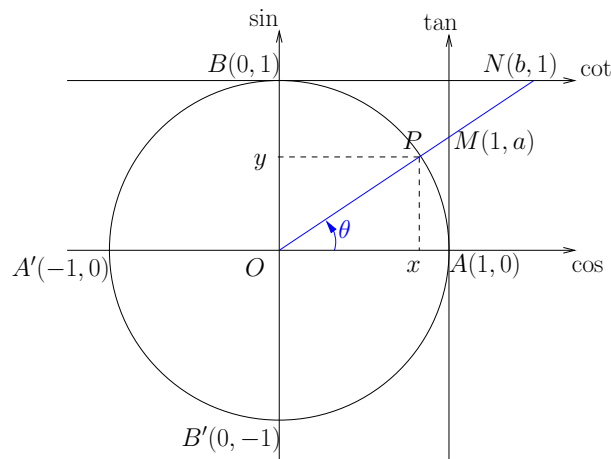


Σχήμα 6:

Οι ορισμοί αυτοί δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση αμβλειών ή αρνητικών γωνιών. Για να γενικεύσουμε τους ορισμούς μας χρησιμοποιούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο. Θεωρούμε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων με αρχή το $O(0, 0)$. Ως αρχή μέτρησης των γωνιών (ή των τόξων) παίρνουμε το σημείο $A(1, 0)$, και θετική φορά είναι η αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας των συνημιτόνων και ο κατακόρυφος άξονας είναι ο άξονας των ημιτόνων. Ως άξονα των εφαπτομένων ορίζουμε την ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο A , ενώ ως άξονα των συνεφαπτομένων την ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο $B(0, 1)$, βλ. Σχήμα 7. Αρχή του άξονα των εφαπτομένων είναι το σημείο A , ενώ αρχή του άξονα των συνεφαπτομένων είναι το σημείο B . Τότε ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\theta = \widehat{AOP}$ ως εξής:

$$\cos \theta = \text{η τετμημένη του σημείου } P = x.$$

$$\sin \theta = \text{η τεταγμένη του σημείου } P = y.$$



Σχήμα 7: Ο τριγωνομετρικός κύκλος.

Για να βρούμε την εφαπτομένη της γωνίας θ προεκτείνουμε το OP . Έστω $M(1, a)$ το σημείο τομής της προέκτασης με τον άξονα των εφαπτομένων και $N(b, 1)$ το σημείο τομής της προέκτασης με τον άξονα των συνεφαπτομένων. Τότε

$$\tan \theta = \text{η αλγεβρική τιμή του } AM = a.$$

$$\cot \theta = \text{η αλγεβρική τιμή του } AN = b.$$

Παρατηρήστε ότι η εφαπτομένη δεν ορίζεται για τόξα (γωνίες) που καταλήγουν στα σημεία B και B' , ενώ η συνεφαπτομένη δεν ορίζεται για τόξα (γωνίες) που καταλήγουν στα σημεία A και A' .

Επίσης, άμεσα βλέπουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι:

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \text{ και } -1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad (\text{ή, ισοδύναμα, } |\sin \theta| \leq 1 \text{ και } |\cos \theta| \leq 1).$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{για } \theta \neq k\pi + \pi/2) \text{ και } \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (\text{για } \theta \neq k\pi), \text{ όπου } k \text{ ακέραιος.}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι για κάθε ακέραιο k ισχύει:

$$\sin(2k\pi + \theta) = \sin \theta, \quad \cos(2k\pi + \theta) = \cos \theta, \quad \tan(k\pi + \theta) = \tan \theta, \quad \cot(k\pi + \theta) = \cot \theta.$$

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται οι τιμές των $\sin$, $\cos$, $\tan$ και $\cot$, για μερικές χαρακτηριστικές γωνίες του πρώτου τεταρτημορίου

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin \theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan \theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot \theta$	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Α'.3 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Σχέσεις αναγωγής στο πρώτο τεταρτημόριο.

Αντίθετες γωνίες	Συμπληρωματικές γωνίες	Παραπληρωματικές γωνίες
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$	$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$
$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$
$\cot(-\theta) = -\cot \theta$	$\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan \theta$	$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$

Γωνίες με διαφορά $\pi/2$	Γωνίες με διαφορά π
$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos \theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$
$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$
$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot \theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$
$\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan \theta$	$\cot(\pi + \theta) = \cot \theta$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς γωνιών.

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \quad , \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad , \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad , \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \end{aligned}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιων γωνιών.

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

Τύποι μετασχηματισμού αθροισμάτων τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενα.

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}\end{aligned}$$

Τύποι μετασχηματισμού γινομένων τριγωνομετρικών αριθμών σε αθροίσματα.

$$\begin{aligned}\sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))\end{aligned}$$

A'.4 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Έστω θ γνωστή γωνία. Τότε η εξίσωση

- $\sin x = \sin \theta$ έχει λύσεις $x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi + \pi - \theta$,
- $\cos x = \cos \theta$ έχει λύσεις $x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi - \theta$,
- $\tan x = \tan \theta$ έχει λύσεις $x = k\pi + \theta$,
- $\cot x = \cot \theta$ έχει λύσεις $x = k\pi + \theta$,

όπου $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

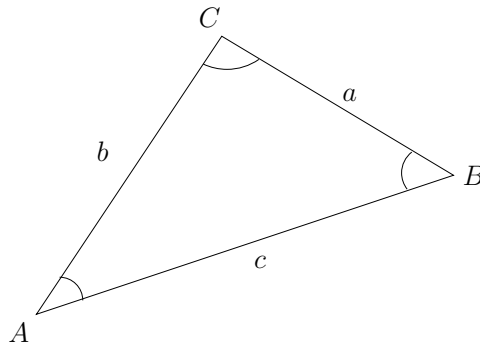
Για να λύσουμε πιο πολύπλοκες εξισώσεις προσπαθούμε με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και ιδιοτήτων να τις μετατρέψουμε σε κάποια από τις παραπάνω εξισώσεις.

A'.5 Νόμος ημιτόνων και συνημιτόνων σε τυχαίο τρίγωνο

Αν θεωρήσουμε ένα τυχαίο τρίγωνο ABC , βλ. Σχήμα 8, και a, b, c είναι τα μήκη των πλευρών του, τότε ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

$$\text{Νόμος ημιτόνων: } \frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}.$$

$$\text{Νόμος συνημιτόνων: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A).$$



Σχήμα 8:

Α'.6 Αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τους λεγόμενους *αντίστροφους τριγωνομετρικούς αριθμούς*. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον τριγωνομετρικό κύκλο του Σχήματος 7.

- Έστω $x \in [-1, 1]$. Εντοπίζουμε στη διάμετρο $A'A$ το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό x και φέρνω την κάθετη στην $A'A$ μέχρι να συναντήσει το ημικύκλιο ABA' στο σημείο P . Τότε ορίζουμε ως **τόξο συνημιτόνου του x** , και συμβολίζουμε

$$\arccos x,$$

τον μοναδικό αριθμό στο διάστημα $[0, \pi]$ που αντιστοιχεί στο σημείο P (δηλαδή το μέτρο της γωνίας $\widehat{AOP}$).

Προφανώς, για κάθε $x \in [-1, 1]$ ο αριθμός $\arccos x$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\cos \theta = x$ στο διάστημα $[0, \pi]$. Δηλαδή

$$\theta = \arccos x \Leftrightarrow \cos \theta = x \text{ και } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

- Έστω $y \in [-1, 1]$. Εντοπίζουμε στη διάμετρο $B'B$ το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό y και φέρνω την κάθετη στην $B'B$ μέχρι να συναντήσει το ημικύκλιο $B'AB$ στο σημείο P . Τότε ορίζουμε ως **τόξο ημιτόνου του y** , και συμβολίζουμε

$$\arcsin y,$$

τον μοναδικό αριθμό στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ που αντιστοιχεί στο σημείο P .

Προφανώς, για κάθε $y \in [-1, 1]$ ο αριθμός $\arcsin x$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\sin \theta = y$ στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Δηλαδή

$$\theta = \arcsin y \Leftrightarrow \sin \theta = y \text{ και } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

- Έστω $a \in \mathbb{R}$. Εντοπίζουμε στην ευθεία των εφαπτομένων το σημείο M που αντιστοιχεί στον αριθμό a . Έστω P το σημείο τομής της OM με το ημικύκλιο $B'AB$. Τότε ορίζουμε ως **τόξο εφαπτομένης του a** , και συμβολίζουμε

$$\arctan a,$$

τον μοναδικό αριθμό στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ που αντιστοιχεί στο σημείο P .

Προφανώς, για κάθε αριθμό a ο αριθμός $\arctan a$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\tan \theta = a$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Δηλαδή

$$\theta = \arctan a \Leftrightarrow \tan \theta = a \text{ και } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

- Έστω $b \in \mathbb{R}$. Εντοπίζουμε στην ευθεία των συνεφαπτομένων το σημείο N που αντιστοιχεί στον αριθμό b . Έστω P το σημείο τομής της ON με το ημικύκλιο ABA' . Τότε ορίζουμε ως **τόξο συνεφαπτομένης του b** , και συμβολίζουμε

$$\operatorname{arccot} b,$$

τον μοναδικό αριθμό στο διάστημα $(0, \pi)$ που αντιστοιχεί στο σημείο P .

Προφανώς, για κάθε αριθμό b ο αριθμός $\operatorname{arccot} b$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\cot \theta = b$ στο διάστημα $(0, \pi)$. Δηλαδή

$$\theta = \operatorname{arccot} b \Leftrightarrow \cot \theta = b \text{ και } 0 < \theta < \pi.$$

Α'.7 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Να λύσετε την εξίσωση $\sin 2x = \cos x$, στο $[0, 2\pi]$.

Λύση:

$$\begin{aligned} \sin 2x = \cos x &\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ή } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \text{ ή } \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \quad \text{όπου } k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Επειδή το $x \in [0, 2\pi]$ καταλήγουμε ότι

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \frac{3\pi}{2} \text{ ή } x = \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{6}.$$

□

Παράδειγμα 2. Αποδείξτε ότι $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$.

Λύση:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \quad (1)$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ και $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Αντικαθιστούμε στην (1) και βλέπουμε ότι $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$. $\square$

Παράδειγμα 3. Αποδείξτε ότι $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Λύση:

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x \sin^2 x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \end{aligned}$$

$\square$

Παράδειγμα 4. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC με αντίστοιχες πλευρές a, b, c , ισχύει ότι

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tau(\tau - a)}{bc}},$$

όπου $\tau = \frac{a+b+c}{2}$ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Λύση: Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε ότι

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A) \Leftrightarrow \cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Από τους τριγωνομετρικούς τύπους των διπλάσιων γωνιών έχουμε ότι: $\cos(A) = 2 \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1$

1. Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη εξίσωση έχουμε ότι:

$$2 \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 \right).$$

Άρα

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}$$

Παρατηρήστε τώρα ότι $2\tau = a + b + c$, και επομένως $2\tau - 2a = b + c - a$. Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2(\tau - a) 2\tau}{4bc} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\tau(\tau - a)}{bc}. \quad (2)$$

Επειδή το A είναι γωνία τριγώνου έχουμε ότι $0 < A/2 < \pi/2$ και άρα το $\cos(\frac{A}{2}) > 0$.
Επομένως, παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες στην (2) έχουμε ότι

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tau(\tau-a)}{bc}}.$$

□

Παράδειγμα 5. Υπολογίστε το $\sin(\frac{11\pi}{12})$ και το $\cos(\frac{11\pi}{12})$.

Λύση:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{8\pi+3\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.2588\end{aligned}$$

Εντελώς ανάλογα

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{8\pi+3\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \approx -0.9659\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 6. Λύστε την εξίσωση $2 \sin x + 2 \cos x = \sqrt{2}$.

Λύση:

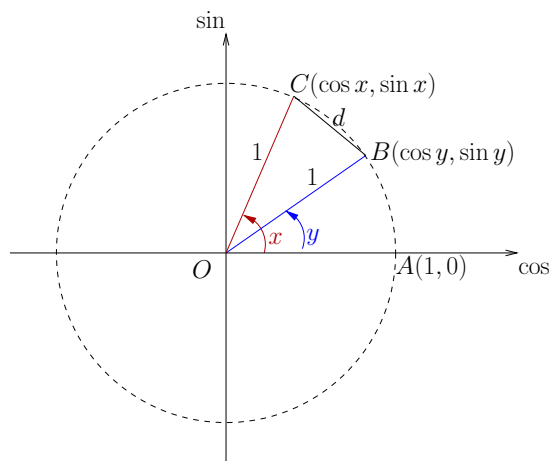
$$\begin{aligned}2 \sin x + 2 \cos x &= \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x + 1 \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin x + \tan \frac{\pi}{4} \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x + \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} &= 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow x &= 2k\pi - \frac{\pi}{12} \text{ ή } x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12}.\end{aligned}$$

□

Ασκήσεις

- Υπολογίστε το $\sin(\frac{7\pi}{12})$, $\cos(\frac{7\pi}{12})$ και $\tan(\frac{7\pi}{12})$.
- Αποδείξτε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\sin(x+y) \sin(x-y) = \sin^2(x) - \sin^2(y)$.
- Υπολογίστε το $\cos(x+y)$ αν είναι γνωστό ότι $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos y = -\frac{5}{13}$, και ότι $0 < x < \pi/2$ και $\pi < y < 3\pi/2$.
- Λύστε την εξίσωση $3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 3$.
- Αποδείξτε ότι $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.
- Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + y &= \pi \\ \cos x - \cos y &= -\sqrt{3} \end{cases}.$$
- Αποδείξτε τις ταυτότητες $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$ και $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$ χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς τύπους της διαφοράς γωνιών.
- Δείξτε ότι αν γνωρίζουμε τα μήκη a και b δυο πλευρών ενός τριγώνου και την περιεχόμενη σε αυτές τις πλευρές γωνία θ , τότε το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2}ab \sin \theta$.
- Λύστε στο $[0, 2\pi]$ την εξίσωση $|\tan x| = 1$.

10. Χρησιμοποιήστε το Σχήμα 9 για να αποδείξετε την ταυτότητα: $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. [Υπόδειξη: Υπολογίστε το d^2 με δύο τρόπους: α) με το νόμο των συνημιτόνων, β) ως την απόσταση[†] των σημείων B και C , και συγκρίνετε τις δύο εκφράσεις.]



Σχήμα 9:

Σημείωση: Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος, και αποτελεί ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Ειδικότερα, αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί, αναπαραχθεί, και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.

Βιβλιογραφία

- T. Apostol, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός λογισμός, Εκδ. Ατλαντίς, 1990.
- Μιχ. Παπαδημητράκης, Απειροστικός Λογισμός: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής, Σημειώσεις Παραδόσεων, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.
- J. Stewart, Calculus, 6th ed., Thomson Brooks/Cole, 2008.

[†]Η απόσταση $|AB|$ μεταξύ των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ορίζεται από τη σχέση:
 $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.