

Γραμμική Άλγεβρα

Σημειώσεις Παραδόσεων

Νικόλαος Π. Τσιρίβας – Δημήτριος Α. Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Σχολή Μηχανικών



Ιανουάριος 2020

Περιεχόμενα

Πρόλογος	i
1 Εισαγωγή στα συστήματα γραμμικών εξισώσεων	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Μέθοδος απαλοιφής του Gauss	5
2 Πίνακες	9
2.1 Ορισμοί	9
2.2 Πράξεις μεταξύ πινάκων	13
2.2.1 Ιδιότητες των πράξεων πινάκων	17
2.3 Στοιχειώδεις πράξεις γραμμών πίνακα	18
2.4 Κλιμακωτός πίνακας	23
2.5 Τάξη πίνακα	28
3 Γραμμικά συστήματα	31
3.1 Γραμμικά συστήματα - Εισαγωγή	31
3.2 Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια πινάκων	36
3.3 Επίλυση κλιμακωτού συστήματος	40
3.4 Μεθοδολογία επίλυσης γραμμικών συστημάτων	41
4 Ορίζουσες	55
4.1 Υπολογισμός οριζουσών	56
4.2 Ιδιότητες των οριζουσών	60
4.3 Σχέση τάξης πίνακα και ορίζουσας	67
4.4 Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο του Cramer	70
4.5 Αντιστρέψιμοι πίνακες	76
4.6 Αντίστροφος πίνακας και γραμμικά συστήματα	88

5	Διανυσματικοί Χώροι	89
5.1	Εισαγωγή	89
5.2	Ορισμός διανυσματικού χώρου	91
5.3	Παραδείγματα διανυσματικών χώρων	95
5.4	Διανυσματικοί υπόχωροι	96
5.5	Γραμμικοί συνδυασμοί	103
5.6	Βάση και διάσταση ενός διανυσματικού χώρου	119
5.7	Εφαρμογές και παραδείγματα στους διανυσματικούς χώρους	122
5.8	Συμπληρωματικό υλικό	149

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για τις ανάγκες του προπτυχιακού μαθήματος «Γραμμική Άλγεβρα» που διδάσκονται οι φοιτητές του Α΄ εξαμήνου του Τμήματος Ναυπηγών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής.

Φιλοδοξούν να αποτυπώσουν ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος και σε καμία περίπτωση δεν αποτελούν ένα ολοκληρωμένο σύγγραμμα εισαγωγής στην Γραμμική Άλγεβρα. Επειδή πρόκειται για την πρώτη έκδοση των σημειώσεων αυτών και, αναπόφευκτα, υπάρχουν αρκετές ελλείψεις και αβλεψίες, οποιαδήποτε επισήμανση λαθών είναι εξαιρετικά ευπρόσδεκτη. Εξίσου ευπρόσδεκτα είναι σχόλια ή παρατηρήσεις που αφορούν το περιεχόμενό τους, καθώς και τον τρόπο παρουσίασης.

Το ύφος των σημειώσεων αυτών δεν είναι «αυστηρό» από μαθηματική σκοπιά και δεν δίνουμε έμφαση σε αποδείξεις. Από την άλλη μεριά, πιστεύουμε ότι η ύλη που περιέχουν είναι θεμελιώδους σημασίας για τους φοιτητές που σπουδάζουν θετικές επιστήμες, επιστήμες μηχανικού, οικονομικά, κλπ. Περιλαμβάνει γραμμικά συστήματα, πίνακες και ορίζουσες, καθώς και τη γνωριμία με την έννοια των γραμμικών χώρων και των γραμμικών απεικονίσεων, κυρίως ως μαθηματικές δομές που τις χρησιμοποιούμε για να μοντελοποιήσουμε ρεαλιστικά προβλήματα. Έχουμε τη γνώμη ότι οτιδήποτε μάθετε στο μάθημα αυτό θα σας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στη συνέχεια των σπουδών σας.

Νοέμβριος 2019

Νίκος Τσιρίβας – Δημήτρης Μητσούδης

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στα συστήματα γραμμικών εξισώσεων

1.1 Εισαγωγή

Ένα από τα πρώτα και ταυτόχρονα σημαντικότερα προβλήματα που ώθησαν στην ανάγκη της εισαγωγής της γραμμικής άλγεβρας είναι τα γραμμικά συστήματα. Ας δούμε μερικά απλά προβλήματα τα οποία για να λυθούν απαιτούν την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων.

Πρόβλημα 1. Ο Αντώνης πήγε στη λαϊκή την Παρασκευή για ψώνια και πήρε 5 κιλά μήλα και 3 κιλά πατάτες και πλήρωσε 7 ευρώ και 40 λεπτά. Την επόμενη εβδομάδα πήγε και πάλι στη λαϊκή και πήρε 4 κιλά μήλα και 7 κιλά πατάτες και πλήρωσε 9 ευρώ και 60 λεπτά. Αν και θυμάται πόσο πλήρωσε συνολικά κάθε φορά, δεν θυμάται πόσο έκαναν το κιλό τα μήλα και οι πατάτες. Τώρα θέλει να ξαναπάει στη λαϊκή και να πάρει 3 κιλά μήλα και 5 κιλά πατάτες, και έχει 7 ευρώ. Θα του φτάσουν τα χρήματα; Υποθέτουμε ότι οι τιμές ανά κιλό δεν μεταβάλλονται.

Λύση. Για να δει ο Αντώνης αν του φτάνουν τα χρήματα χρειάζεται να λύσει ένα γραμμικό σύστημα. Έστω ότι ένα κιλό μήλα κάνει x ευρώ και ένα κιλό πατάτες κάνει y ευρώ. Τότε με βάση τα δεδομένα έχουμε ότι ισχύει το ακόλουθο σύστημα:

$$5x + 3y = 7.4 \quad (1.1)$$

$$4x + 7y = 9.6 \quad (1.2)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1.1), (1.2), θα βρούμε πόσο κάνει το ένα κιλό μήλα και το ένα κιλό πατάτες.

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1.1) με 4 και την (1.2) με 5 και παίρνουμε:

$$20x + 12y = 29.6 \quad (1.3)$$

$$20x + 35y = 48 \quad (1.4)$$

Αφαιρούμε την (1.3) από την (1.4) και παίρνουμε

$$23y = 18.4 \Rightarrow y = \frac{18.4}{23} = 0.8 \text{ ευρώ.} \quad (1.5)$$

Τώρα, λύνουμε την (1.1) ως προς x και έχουμε

$$x = \frac{7.4 - 3y}{5}. \quad (1.6)$$

Αντικαθιστούμε την (1.5) στην (1.6) και παίρνουμε

$$x = \frac{7.4 - 3(0.8)}{5} = 1 \text{ ευρώ.}$$

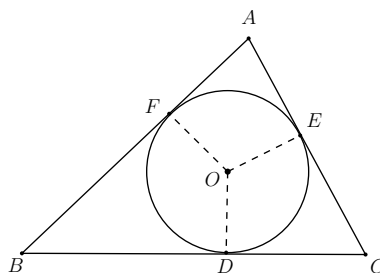
Άρα, ένα κιλό μήλα κάνει 1 ευρώ και ένα κιλό πατάτες κάνει 0.8 ευρώ. Επομένως, για να πάρει τρία κιλά μήλα και πέντε κιλά πατάτες ο Αντώνης θα πληρώσει:

$$3 \cdot 1 + 5 \cdot (0.8) = 7 \text{ ευρώ.}$$

Άρα τα χρήματά του του φτάνουν ακριβώς για να ψωνίσει.

Το επόμενο παράδειγμα αφορά ένα κλασσικό πρόβλημα Ευκλείδειας Γεωμετρίας που για να λυθεί απαιτείται η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος.

Πρόβλημα 2. Θεωρήστε το τρίγωνο ABC του Σχήματος 1.1.



Σχήμα 1.1:

Θεωρούμε τον εγγεγραμμένο κύκλο κέντρου O στο τρίγωνο ABC , ο οποίος εφάπτεται στις πλευρές BC , AC και AB του ABC στα σημεία D , E και F , αντίστοιχα. Θέτουμε $BC = a$, $AC = b$ και $AB = c$ και θεωρούμε γνωστές τις πλευρές του ABC . Θέλουμε να υπολογίσουμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων BD , DC , CE , EA , AF , FB , που αποκόπτει ο εγγεγραμμένος κύκλος πάνω στις πλευρές.

Θέτουμε $BD = x$, $CE = y$ και $AF = z$. Γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο στον κύκλο είναι ίσα, άρα

$$BD = BF = x, \quad CD = CE = y \quad \text{και} \quad AE = AF = z.$$

Έτσι από το τρίγωνο έχουμε:

$$BD + DC = a \Leftrightarrow x + y = a \quad (1.7)$$

$$CE + EA = b \Leftrightarrow y + z = b \quad (1.8)$$

$$AF + FB = c \Leftrightarrow z + x = c \quad (1.9)$$

Επομένως, για να βρούμε τα x, y, z αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (1.7)–(1.9). Προσθέτοντας κατά μέλη και τις τρεις ισότητες έχουμε:

$$2(x + y + z) = a + b + c \Leftrightarrow x + y + z = \frac{a + b + c}{2}. \quad (1.10)$$

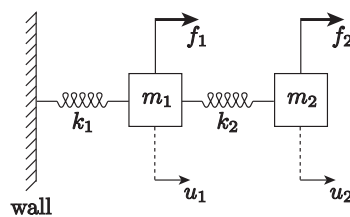
Προφανώς $a + b + c$ είναι η περίμετρος του τριγώνου. Ας συμβολίσουμε με τ την λεγόμενη ημιπερίμετρο:

$$\tau = \frac{a + b + c}{2}. \quad (1.11)$$

Αφαιρώντας την (1.7) από την (1.10) βρίσκουμε $z = \tau - a$. Παρόμοια, αφαιρώντας τις (1.8) και (1.9) από την (1.10) παίρνουμε $x = \tau - b$ και $y = \tau - c$. Άρα

$$x = \frac{a + c - b}{2}, \quad y = \frac{a + b - c}{2}, \quad \text{και} \quad z = \frac{b + c - a}{2}.$$

Πρόβλημα 3.* Ας θεωρήσουμε το σύστημα δύο σωμάτων και δύο ελατηρίων που είναι στερεωμένο σε έναν τοίχο, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Ένα σύστημα δύο σωμάτων και δύο ελατηρίων στερεωμένο σε έναν τοίχο.

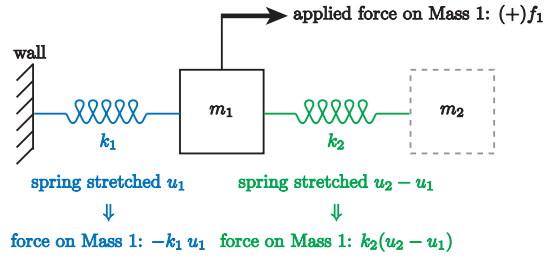
Υποθέτουμε ότι το Σώμα 1 έχει μάζα m_1 και το Σώμα 2 έχει μάζα m_2 και ότι τα δύο σώματα κινούνται πάνω σε οριζόντιο λείο επίπεδο χωρίς τριβές. Το Σώμα 1 συνδέεται με έναν τοίχο

*Από τις σημειώσεις: Linear Systems of Equations ... in a Nutshell, A.T. Patera, M. Yano, November 19, 2014

μέσω ενός ελατηρίου με σταθερά ακαμψίας k_1 , και με το Σώμα 2 με ένα ελατήριο με σταθερά ακαμψίας k_2 . (Το Σώμα 2 συνδέεται μόνο με το Σώμα 1 μέσω του ελατηρίου με σταθερά ακαμψίας k_2 .) Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι $k_1, k_2 > 0$. Θα συμβολίζουμε με u_1, u_2 τις μετατοπίσεις των Σωμάτων 1 και 2, αντίστοιχα. Θετικές τιμές των μετατοπίσεων θα αντιστοιχούν σε μετατόπιση προς τα δεξιά (μακριά από τον τοίχο), και επιλέγουμε το σημείο αναφοράς έτσι ώστε αν δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις (δηλαδή τα ελατήρια δεν έχουν εκταθεί ή συμπιεστεί) $u_1 = u_2 = 0$. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε (σταθερές) δυνάμεις f_1 και f_2 στα Σώματα 1 και 2, αντίστοιχα (με θετικές τιμές να αντιστοιχούν σε δυνάμεις με φορά από τον τοίχο προς τα δεξιά). Αναζητούμε να βρούμε τις μετατοπίσεις u_1, u_2 των δύο σωμάτων σε κατάσταση ισορροπίας, για δεδομένες δυνάμεις f_1, f_2 και σταθερές ελατηρίων k_1, k_2 .

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι αν και όλα τα ρεαλιστικά συστήματα εμπεριέχουν απόσβεση και, επομένως, το σύστημά μας θα έπρεπε κανονικά να συμπεριλαμβάνει και αποσβεστήρες, οι αποσβεστήρες δεν επηρεάζουν το σύστημα στην κατάσταση ισορροπίας και άρα μπορούμε να τους αγνοήσουμε. Φυσικά, το σύστημα μας θα φτάσει σε κατάσταση ισορροπίας ακριβώς λόγω της απόσβεσης.

Ας δούμε τώρα τις εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι μετατοπίσεις u_1, u_2 σε κατάσταση ισορροπίας. Θεωρούμε αρχικά το Σώμα 1, βλ. Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σώμα 1.

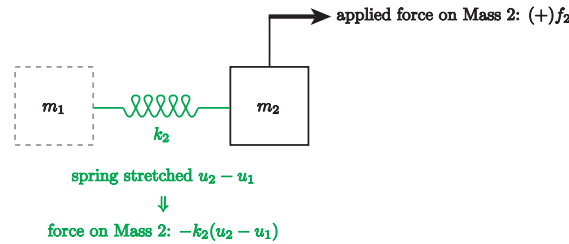
Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε το νόμο του Hooke (μια καταστατική εξίσωση) για να συνδέσουμε τη δύναμη στο ελατήριο με την έκταση ή συμπίεση του ελατηρίου. Σε κατάσταση ισορροπίας η συνισταμένη των δυνάμεων (δηλαδή το άθροισμα των ασκουμένων δυνάμεων και των δυνάμεων εξαιτίας του ελατηρίου) στο Σώμα 1 πρέπει να είναι ίση με 0. Αυτό μας οδηγεί στην αλγεβρική εξίσωση

$$f_1 - k_1 u_1 + k_2(u_2 - u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = f_1,$$

όπου άγνωστοι είναι οι μετατοπίσεις u_1, u_2 . (Σημειώστε ότι, γενικότερα, για ένα σύστημα που δεν βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα θα επέβαλλε το δεύτερο μέλος να είναι ίσο με $m_1 u_1''$ αντί μηδέν.)

Με ανάλογα επιχειρήματα για τις δυνάμεις που ασκούνται στο Σώμα 2, βλ. Σχήμα 1.4, καταλήγουμε ότι πρέπει να ισχύει η αλγεβρική εξίσωση:

$$f_2 - k_2(u_2 - u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -k_2 u_1 + k_2 u_2 = f_2.$$



Σχήμα 1.4: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σώμα 2.

Έτσι, καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα u_1, u_2 :

$$(k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = f_1 \quad (1.12)$$

$$-k_2 u_1 + k_2 u_2 = f_2 \quad (1.13)$$

Προσθέτουμε τις (1.12) και (1.13) κατά μέλη και έχουμε:

$$(k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_1 = f_1 + f_2 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{f_1 + f_2}{k_1}.$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε την τιμή της u_1 που μόλις βρήκαμε στην (1.13) και λύνουμε ως προς u_2 :

$$-k_2 \frac{f_1 + f_2}{k_1} + k_2 u_2 = f_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{k_2 f_1 + (k_1 + k_2) f_2}{k_1 k_2}.$$

1.2 Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για να λύνουμε γραμμικά συστήματα. Η κατ' εξοχήν καθιερωμένη μέθοδος είναι η *μέθοδος της απαλοιφής του Gauss*. Ας την δούμε με ένα παράδειγμα.

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13. \end{cases} \quad (1.14)$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος (1.14) με κατάλληλο συντελεστή κάθε φορά, έτσι ώστε αν την προσθέσουμε αρχικά στη δεύτερη και, στη συνέχεια, στην τρίτη, να πάρουμε δύο εξισώσεις στις οποίες δεν υπάρχει η μεταβλητή x . Συγκεκριμένα,

- πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -1 και την προσθέτουμε στη δεύτερη,
- πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -2 και την προσθέτουμε στην τρίτη.

Έτσι αντί για τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (1.14) παίρνουμε την

$$y + 4z = 7,$$

και αντί για την τρίτη έχουμε την

$$y + 2z = 5.$$

Τις γράφουμε πάλι όλες μαζί και έχουμε το ακόλουθο (ισοδύναμο) σύστημα:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ y + 2z = 5. \end{cases} \quad (1.15)$$

Παρατηρήστε ότι γράφουμε τους συντελεστές έτσι ώστε οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ο ένας κάτω από τον άλλον.

Στο επόμενο βήμα αγνοούμε την πρώτη εξίσωση και πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση του (1.15) με κατάλληλο συντελεστή έτσι ώστε αν την προσθέσουμε στην τρίτη να απαλείψουμε τον άγνωστο y από την τρίτη. Έτσι, πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη επί (-1) και την προσθέτουμε στην τρίτη, οπότε παίρνουμε την εξίσωση

$$-2z = -2.$$

Γράφουμε και πάλι τις εξισώσεις όλες μαζί προσέχοντας ώστε οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ο ένας κάτω από τον άλλον και έχουμε:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ -2z = -2. \end{cases} \quad (1.16)$$

Λέμε τώρα ότι το σύστημα (1.16) έχει φτάσει σε **κλιμακωτή μορφή**. Τώρα που έχει φτάσει στη μορφή αυτή το σύστημα λύνεται εύκολα ξεκινώντας να λύσουμε πρώτα την τελευταία εξίσωση. Από την τρίτη εξίσωση λοιπόν, έχουμε:

$$-2z = -2 \quad \Rightarrow \quad z = 1.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του z που βρήκαμε στην δεύτερη και παίρνουμε:

$$y + 4 \cdot 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad y = 3,$$

οπότε βρήκαμε και το y . Τέλος, αντικαθιστούμε τις γνωστές πλέον τιμές των y και z στην πρώτη εξίσωση και παίρνουμε:

$$x + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Έτσι η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(x, y, z) = (1, 3, 1)$.

Κεφάλαιο 2

Πίνακες

2.1 Ορισμοί

Οι πίνακες είναι ένα από τα δομικά θεμέλια της Γραμμικής Άλγεβρας. Εδώ θα κάνουμε μια μικρή εισαγωγή στους πίνακες κυρίως σε ότι αφορά τη σχέση τους με τα γραμμικά συστήματα. Αλλά τι είναι ένας πίνακας;

Έστω $m, n \in \mathbb{N}$, όπου με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών. Θέτουμε $T_n = \{1, 2, \dots, n\}$ και $T_m = \{1, 2, \dots, m\}$. Ένας πίνακας διάστασης $m \times n$ είναι μια συνάρτηση $f : T_m \times T_n \rightarrow \mathbb{R}$. Για κάθε $(i, j) \in T_m \times T_n$, θέτουμε $a_{ij} = f((i, j))$. Έτσι, το πεδίο τιμών $f(T_m \times T_n)$ της f περιέχει τους αριθμούς a_{ij} , για όλα τα $i \in T_m, j \in T_n$. Αυτοί οι αριθμοί θεωρούμε ότι έχουν μια ορισμένη θέση στο σύνολο τιμών $f(T_m \times T_n)$, η οποία καθορίζεται από τους δύο δείκτες $(i, j) \in T_m \times T_n$. Αυτή είναι η αυστηρή μαθηματική θεώρηση των πινάκων η οποία δεν θα μας απασχολήσει από εδώ και στο εξής. (Όμως και στα μαθηματικά γενικότερα, αυτή η θεώρηση των πινάκων εφαρμόζεται κυρίως σε θέματα θεωρητικής φύσεως.)

Για εμάς, ένας πίνακας θα είναι μια ορθογώνια διάταξη αριθμών σε γραμμές και στήλες. Αν τα στοιχεία του πίνακα A είναι πραγματικοί αριθμοί τότε ο πίνακας λέγεται πραγματικός, ενώ αν είναι μιγαδικοί τότε ο A λέγεται μιγαδικός πίνακας. Επειδή στη συνέχεια θα ασχοληθούμε κυρίως με πραγματικούς πίνακες, όταν θα αναφερόμαστε σε έναν πίνακα χωρίς άλλο προσδιορισμό θα εννοούμε πραγματικό.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα πινάκων:

$$(\alpha) \text{ Πίνακας } 2 \times 2: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(\beta) \text{ Πίνακας } 3 \times 3: \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

(γ) Πίνακας 1×3 : $(3 \ 1 \ 2)$.

(δ) Πίνακας 3×1 : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(ε) Πίνακας 1×1 : (2019) .

(στ) Πίνακας 2×3 : $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

(ζ) Πίνακας 3×2 : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

(η) Πίνακας $1 \times n$: $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

(θ) Πίνακας $n \times 1$: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, όπου $b_j \in \mathbb{R}$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$.

Γενικώς, τα στοιχεία μέσα στους πίνακες μπορούν να είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί χωρίς κανέναν περιορισμό.

Κάθε πίνακας έχει γραμμές και στήλες οι οποίες είναι πλήρως καθορισμένες. Έτσι για παράδειγμα ο πίνακας στο Παράδειγμα (β) έχει τρεις γραμμές και τρεις στήλες. Η πρώτη, δεύτερη και τρίτη γραμμή του είναι

$$(0 \ 2 \ 3), \quad (7 \ 5 \ 8), \quad (9 \ 0 \ -6),$$

αντίστοιχα, ενώ η πρώτη, δεύτερη και τρίτη στήλη του είναι

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix},$$

αντίστοιχα.

Τέλος, η γενική μορφή ενός πίνακα $m \times n$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Τα στοιχεία του πίνακα A είναι οι αριθμοί a_{ij} , για $i = 1, \dots, m$ και $j = 1, \dots, n$.

Ο A έχει m γραμμές και n στήλες. Οι m γραμμές του είναι οι εξής:

$$(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}), \quad (a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n}), \quad \dots \quad (a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn}).$$

Οι n στήλες του είναι:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Έτσι, γενικά, η i -οστή γραμμή του πίνακα A είναι η

$$(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, m,$$

και η j -οστή στήλη του είναι η

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, n.$$

Τον παραπάνω $m \times n$ πίνακα A τον συμβολίζουμε (για λόγους απλότητας και συντομίας) και ως $A = (a_{ij})$. Θα συμβολίζουμε τους πίνακες (συνήθως) με κεφαλαία γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου, π.χ. $A, B, C, \dots$. Υπάρχουν πολλά είδη πινάκων. Ας δούμε μερικούς από αυτούς που θα συναντήσουμε πολύ σύντομα στη συνέχεια.

- Ένας πίνακας $m \times n$ λέγεται **μηδενικός** αν όλα του τα στοιχεία είναι μηδέν. Θα συμβολίζουμε τον μηδενικό πίνακα $\mathbf{0}_{m \times n}$ (ή, απλώς, $\mathbf{0}$ όταν η διάστασή του προκύπτει από τα δεδομένα, και δεν πρέπει να τον συγχέουμε με τον αριθμό 0). Π.χ.

$$\mathbf{0}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Ένας πίνακας $m \times n$ λέγεται **τετραγωνικός** αν $m = n$, δηλαδή αν έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών. Π.χ.,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Η διαγώνιος ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα (a_{ij}) αποτελείται από τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ και λέγεται *κύρια διαγώνιος* του πίνακα. Επομένως, η κύρια διαγώνιος του πίνακα A στο παράδειγμά μας είναι: $-1, -1, -3$.

- Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας λέγεται **διαγώνιος**, αν όλα τα στοιχεία που δεν βρίσκονται πάνω στην κύρια διαγώνιό του είναι ίσα με μηδέν. Δηλαδή

$$a_{ij} = 0 \text{ για } i \neq j,$$

όπου $i, j = 1, 2, \dots, n$. Π.χ.,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Ο διαγώνιος $n \times n$ πίνακας που όλα τα στοιχεία της διαγώνιού του είναι μονάδες λέγεται **μοναδιαίος** ή **ταυτοτικός** και συμβολίζεται με I_n . Π.χ.,

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας λέγεται **άνω τριγωνικός** αν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιό του είναι 0. Δηλαδή, αν

$$a_{ij} = 0 \text{ για } i > j,$$

όπου $i, j = 1, 2, \dots, n$. Π.χ.,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας λέγεται **κάτω τριγωνικός** αν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιό του είναι 0. Δηλαδή, αν

$$a_{ij} = 0 \text{ για } i < j$$

όπου $i, j = 1, 2, \dots, n$. Π.χ.,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση. Όπως γνωρίζουμε από την Αναλυτική Γεωμετρία της Β' Λυκείου, τα σημεία ενός επιπέδου τα συμβολίζουμε με (a, b) , όπου $a, b \in \mathbb{R}$, και το (a, b) είναι το (διατεταγμένο) ζεύγος των πραγματικών αριθμών με πρώτο στοιχείο το a και δεύτερο το b (και όχι βέβαια το ανοικτό διάστημα (a, b)). Εμείς εδώ θα ταυτίζουμε το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) είτε με τον 1×2 πίνακα $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, ή με τον 2×1 πίνακα $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

Τέλος, ορίζουμε και τον ανάστροφο ενός πίνακα A .

Ορισμός 2.1.1. Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας. Ο **ανάστροφος** του A συμβολίζεται με A^T και είναι ένας $n \times m$ πίνακας (b_{ij}) που έχει ως γραμμές τις στήλες του A (και ως στήλες τις γραμμές του A). Δηλαδή θα έχουμε $b_{ij} = a_{ji}$.

Παράδειγμα.

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{τότε } A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2 Πράξεις μεταξύ πινάκων

Θα αναφέρουμε τους ορισμούς των πράξεων μεταξύ πινάκων για πίνακες μικρών διαστάσεων αλλά το ίδιο θα ισχύει και για πίνακες οποιασδήποτε διάστασης.

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

- **Ισότητα πινάκων.** Λέμε ότι οι πίνακες είναι ίσοι, και συμβολίζουμε $A = B$, αν

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2.$$

Παρόμοια ορίζεται η ισότητα για οποιουσδήποτε πίνακες $m \times n$.

(Επομένως, δύο πίνακες που δεν έχουν ίδιες διαστάσεις θα είναι κατ' ανάγκην διαφορετικοί.)

- **Άθροισμα πινάκων.** Το άθροισμα των πινάκων A και B είναι ένας 2×2 πίνακας, ο οποίος συμβολίζεται $A + B$ και είναι ο πίνακας

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Το ίδιο ισχύει για το άθροισμα δύο πινάκων $m \times n$, για οποιουσδήποτε $m, n \in \mathbb{N}$.

- **Γινόμενο αριθμού επί πίνακα (βαθμωτό γινόμενο).** Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ορίζεται ο πίνακας λA , που είναι ο πίνακας

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ανάλογα ορίζεται το γινόμενο αριθμού με πίνακα $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

- **Γινόμενο πινάκων.** Το γινόμενο των πινάκων A και B δεν ορίζεται με τον ίδιο «φυσιολογικό» και αναμενόμενο τρόπο όπως το άθροισμα πινάκων.

Π.χ., το γινόμενο των 2×2 πινάκων A και B , $C = AB$ (και όχι BA) είναι ένας 2×2 πίνακας $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ που τα στοιχεία του ορίζονται ως εξής:

Για το c_{11} , παίρνουμε την πρώτη γραμμή $(a_{11} \ a_{12})$ του πίνακα A και την πολλαπλασιάζουμε με την πρώτη στήλη $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$ του πίνακα B ως εξής:

$$(a_{11} \ a_{12}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}.$$

Θα δούμε αργότερα ότι αυτού του είδους ο πολλαπλασιασμός είναι το γνωστό μας από την Αναλυτική Γεωμετρία της Β' Λυκείου εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων (a_{11}, a_{12}) και (b_{11}, b_{21}) . Επομένως,

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}.$$

Όμοια το c_{12} είναι ίσο με το (εσωτερικό) γινόμενο της πρώτης γραμμής $(a_{11} \ a_{12})$ του πίνακα A επί τη δεύτερη στήλη $\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$ του πίνακα B . Έτσι,

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}.$$

Εντελώς ανάλογα έχουμε

$$\begin{aligned} c_{21} &= (a_{21} \ a_{22}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, \\ c_{22} &= (a_{21} \ a_{22}) \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, γενικά, το c_{ij} στοιχείο του $C = AB$ προκύπτει ως το εσωτερικό γινόμενο της i -γραμμής του A επί την j -στήλη του B .

Παράδειγμα.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 5 & (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}.$$

Παρόμοια ορίζεται το γινόμενο δύο 3×3 πινάκων. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

όπου

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j},$$

για κάθε $i, j = 1, 2, 3$. Για παράδειγμα, παραπάνω έχουμε σχηματικά υπογραμμίσει πώς προκύπτει το c_{21} στοιχείο του πίνακα $C = AB$ (προσοχή! όχι του BA).

Παράδειγμα.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 7 & (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 7 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 5 \\ -5 & 12 & 10 \\ -9 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Εργαζόμενοι ανάλογα, μπορούμε πάντα να υπολογίσουμε το γινόμενο δύο $n \times n$ πινάκων για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$.

Γενικά, αν έχουμε έναν $k \times l$ πίνακα A και έναν $m \times n$ πίνακα B , όπου $k, l, m, n \in \mathbb{N}$, τότε το γινόμενο AB ορίζεται μόνον εάν $l = m$, δηλαδή, με άλλα λόγια, αν **ο αριθμός στηλών του A είναι ίσος με τον αριθμό γραμμών του B** .

Επομένως, για παράδειγμα, για δύο πίνακες A, B τα γινόμενα AB και BA ορίζονται και τα δύο μόνον αν ο A είναι διάστασης $m \times n$ και ο B είναι διάστασης $n \times m$, για κάποια $m, n \in \mathbb{N}$

(όχι απαραίτητα με $m = n$). Για να κατανοήσουμε καλύτερα τον πολλαπλασιασμό πινάκων ας δούμε δύο ακόμη παραδείγματα πολλαπλασιασμού μη τετραγωνικών πινάκων.

Παράδειγμα. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} AB &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}}_{2 \times 2}. \end{aligned}$$

Ακόμη έχουμε

$$\begin{aligned} BA &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot (-2) + 5 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 4 & (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) & (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 22 & -9 & 16 \\ 15 & -2 & 5 \\ 15 & -9 & 15 \end{pmatrix}}_{3 \times 3}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $AB \neq BA$.

Γενικά, αν έχουμε έναν $m \times k$ πίνακα A και έναν $k \times n$ πίνακα B , τότε το γινόμενο $C = AB$ είναι ο $m \times n$ πίνακας $C = (c_{ij})$, όπου το ij -στοιχείο του, c_{ij} , είναι ίσο με το εσωτερικό γινόμενο της i γραμμής $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ik})$ του A επί την j στήλη $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$ του B . Δηλαδή

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj},$$

όπου $i = 1, \dots, m$ και $j = 1, \dots, n$.

2.2.1 Ιδιότητες των πράξεων πινάκων

Από τους ορισμούς της προηγούμενης παραγράφου προκύπτουν πολύ εύκολα οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Έστω A, B δύο $m \times n$ πίνακες. Τότε $A + B = B + A$. (Μεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης.)
2. Έστω A, B, C τρεις $m \times n$ πίνακες. Τότε $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$. (Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης.)
3. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$. (Υπαρξη μηδενικού στοιχείου.)
4. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε $A + (-A) = \mathbf{0}$. (Υπαρξη αντιθέτου στοιχείου.)
5. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.
6. Έστω A ένας $k \times \ell$ πίνακας, B ένας $\ell \times m$ πίνακας, και C ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε $(AB)C = A(BC) = ABC$. (Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.)
7. Έστω A, B δύο $k \times m$ πίνακες και C ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε $(A + B)C = AC + BC$. (Επιμεριστική ιδιότητα.)
8. Αν D είναι ένας $k \times m$ πίνακας και E, F δύο $m \times n$ πίνακες, τότε $D(E + F) = DE + DF$. (Επιμεριστική ιδιότητα.)
9. Αν A είναι τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, τότε $AI_n = I_n A = A$. (Υπαρξη ουδετέρου στοιχείου στον πολλαπλασιασμό.)

Προσοχή, γενικά **δεν** ισχύει ότι $AB = BA$, ακόμη και αν οι πίνακες A και B είναι τετραγωνικοί. Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι εν γένει αντιμεταθετικός.

Π.χ., ελέγξτε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

τότε

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{αλλά} \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αν για δύο πίνακες A και B ισχύει ότι $AB = BA$, τότε θα λέμε ότι οι πίνακες A και B **μετατίθενται**.

Επιπλέον, αν για παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

τότε είναι εύκολο να ελέγξετε ότι

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, ακόμη και στην περίπτωση τετραγωνικών πινάκων, αν $AB = \mathbf{0}$, δεν ισχύει απαραίτητα ότι $BA = \mathbf{0}$, ούτε ότι $A = \mathbf{0}$ ή $B = \mathbf{0}$.

2.3 Στοιχειώδεις πράξεις γραμμών πίνακα.

Καταρχήν τονίζουμε και πάλι ότι οι πράξεις της πρόσθεσης πινάκων (ίδιας διάστασης) και του πολλαπλασιασμού αριθμού επί πίνακα δίνουν πάντα πίνακα ίδιας διάστασης με αυτή των αρχικών πινάκων. Αυτό δεν είναι απαραίτητο για τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Για να οριστεί το γινόμενο AB των πινάκων A και B πρέπει απαραίτητως το πλήθος των στηλών του A να είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του B .

Στους πίνακες όμως μπορούμε να εφαρμόσουμε και κάποιου άλλου είδους πράξεις, που λέγονται **στοιχειώδεις πράξεις γραμμών**. Ας τις δούμε μέσω μερικών παραδειγμάτων.

Παράδειγμα. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ο A είναι ένας πίνακας 3×3 . Οι τρεις γραμμές του είναι οι $(1 \ 5 \ 8)$, $(3 \ 1 \ 2)$ και $(7 \ 6 \ 4)$. Τις αριθμούμε με τη σειρά που εμφανίζονται στον πίνακα από πάνω προς τα κάτω και τις συμβολίζουμε ως εξής:

$$r_1 = (1 \ 5 \ 8), \quad r_2 = (3 \ 1 \ 2), \quad r_3 = (7 \ 6 \ 4).$$

Αν εναλλάξουμε αμοιβαία τη θέση των γραμμών r_1 και r_2 του A και διατηρήσουμε την r_3 όπως είναι, τότε παίρνουμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Για να συμβολίσουμε αυτή την εναλλαγή γραμμών και να καταλαβαίνουμε τι κάναμε γράφουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ανάλογα, για παράδειγμα, έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Με παρόμοιο τρόπο κάνουμε αμοιβαίες εναλλαγές γραμμών πάνω στις γραμμές οποιουδήποτε πίνακα και το συμβολίζουμε ανάλογα.

Η εναλλαγή γραμμών ενός πίνακα είναι η πρώτη στοιχειώδης πράξη γραμμών ενός πίνακα. Γενικά, αν έχουμε έναν $m \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

θα συμβολίζουμε τις γραμμές του ως εξής:

$$r_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

και θα σημειώνουμε την εναλλαγή των γραμμών i και j του A γράφοντας $r_i \leftrightarrow r_j$.

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή ενός πίνακα με έναν **μη μηδενικό αριθμό** παίρνουμε έναν νέο πίνακα, που είναι παρόμοιος με τον προηγούμενο, με μόνη διαφορά ότι η γραμμή που πολλαπλασιάσαμε έχει φύγει και στη θέση της έχει πάει μια γραμμή που τα στοιχεία της είναι τα πολλαπλάσια των αντίστοιχων στοιχείων της αρχικής γραμμής.

Παράδειγμα. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τη γραμμή $r_2 = (3 \ 5 \ 2)$ του A επί 2, τότε παίρνουμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 10 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Για να συμβολίσουμε αυτόν τον πολλαπλασιασμό της γραμμής r_2 του A επί 2, γράφουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 10 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Με παρόμοιο τρόπο θα παριστάνουμε τον πολλαπλασιασμό μιας γραμμής ενός πίνακα επί έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό.

Γενικά δηλαδή έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i \leftarrow \lambda r_i} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ο πολλαπλασιασμός γραμμής ενός πίνακα επί έναν **μη μηδενικό πραγματικό αριθμό** είναι η δεύτερη στοιχειώδης πράξη γραμμών ενός πίνακα.

Η τρίτη στοιχειώδης πράξη γραμμών ενός πίνακα είναι η πρόσθεση δύο γραμμών ενός πίνακα και η αντικατάσταση της μιας από τις δύο γραμμές με το άθροισμα των γραμμών αυτών.

Παράδειγμα. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Αν προσθέσουμε τις γραμμές r_1 και r_2 του A και βάλουμε το άθροισμα $r_1 + r_2$ στη θέση της r_1 , ενώ διατηρήσουμε τις r_2 και r_3 στη θέση τους στον πίνακα A , τότε παίρνουμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Συμβολίζουμε τα παραπάνω γράφοντας

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Με παρόμοιο τρόπο συμβολίζουμε το άθροισμα δύο γραμμών ενός γενικού πίνακα και την αντικατάσταση της μιας από τις δύο γραμμές με το άθροισμα των γραμμών αυτών.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i \leftarrow r_i + r_j} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \dots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Οι παραπάνω τρεις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών είναι αρκετές για να κάνουμε οποιουδήποτε μετασχηματισμούς στις γραμμές ενός τυχαίου πίνακα. Τις δύο τελευταίες τις κάνουμε συνήθως ταυτόχρονα για εξοικονόμηση χώρου και χρόνου.

Παράδειγμα.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & -8 & 7 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow 3r_2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & -24 & 21 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & -24 & 21 \\ -1 & -27 & 30 \end{pmatrix}.$$

Το παραπάνω το γράφουμε και με μία πράξη ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & -8 & 7 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + 3r_2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & -24 & 21 \\ -1 & -27 & 30 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή προσθέσαμε σε μια γραμμή το πολλαπλάσιο με ένα μη μηδενικό αριθμό μιας άλλης γραμμής. □

Όταν εναλλάσσουμε δύο γραμμές ενός πίνακα η πράξη αυτή θα πρέπει να εκτελείται ξεχωριστά και να φαίνεται καθαρά. Όταν όμως σε έναν πίνακα προσθέτουμε σε μια γραμμή το πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής αυτό μπορούμε να το κάνουμε ταυτόχρονα και για πολλές γραμμές μαζί.

Παράδειγμα.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 7 & -8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_1 \leftarrow r_1 + 2r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 + 3r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + 4r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 + 5r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -8 & 3 & 11 \\ -2 & -5 & 10 \\ 13 & -6 & 8 \\ -3 & -13 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 13 & -6 & 8 \\ -2 & -5 & 10 \\ -8 & 3 & 11 \\ -3 & -13 & 20 \end{pmatrix}.$$

Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μπορούμε να δημιουργήσουμε πολλούς νέους πίνακες. Επειδή αυτοί συνδέονται μεταξύ τους ουσιαστικά και ο καθένας από αυτούς έχει μια ιδιαίτερη σχέση με όλους τους υπόλοιπους θα χρειαστούμε έναν ορισμό για να ξεκαθαρίσουμε τη σχέση αυτή.

Ορισμός 2.3.1. Ένας πίνακας A λέγεται **γραμμοϊσοδύναμος** ή και **ισοδύναμος** με τον πίνακα B , αν ο B έχει προκύψει από τον A μετά από ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών πράξεων γραμμών.

Αποδεικνύεται η εξής πρόταση:

Πρόταση 2.3.2. Έστω A και B να είναι δύο $m \times n$ πίνακες. Αν ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B , τότε και ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A .

Από αυτήν την πρόταση έπεται το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 2.3.3. Έστω A, B, C να είναι τρεις $m \times n$ πίνακες τέτοιοι ώστε ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B και ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον C . Τότε καθένας από τους A, B, C είναι γραμμοϊσοδύναμος με τους δύο άλλους.

Για να συμβολίσουμε ότι ο πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B γράφουμε $A \sim B$. Έτσι από τα παραπάνω έχουμε ότι αν $A \sim B$ τότε ισχύει και ότι $B \sim A$. Επίσης, αν A, B, C είναι τρεις πίνακες τέτοιοι ώστε $A \sim B$ και $B \sim C$, τότε από το Πόρισμα 2.3.3 ισχύουν επίσης τα εξής: $B \sim A$, $C \sim B$, $A \sim C$ και $C \sim A$.

Στη συνέχεια εισάγουμε μια βασική έννοια πίνακα.

2.4 Κλιμακωτός πίνακας

Για να εισαγάγουμε την έννοια του κλιμακωτού πίνακα θα μας χρειαστεί πρώτα κάποια ορολογία.

- Μια γραμμή ή στήλη ενός πίνακα λέγεται «μηδενική» εαν κάθε στοιχείο της είναι μηδέν.
- **Ηγετικό στοιχείο** μιας μη μηδενικής γραμμής r_i ενός πίνακα είναι το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της.

Παράδειγμα. Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

έχει

- ηγετικό στοιχείο της πρώτης γραμμής το 1,
- ηγετικό στοιχείο της τρίτης γραμμής το -5,
- ηγετικό στοιχείο της τέταρτης γραμμής το -1.

□

Έτσι, έστω ο $m \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

και $r_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ να είναι η i -οστή μη μηδενική γραμμή του πίνακα A , για κάποιο $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Ηγετικό στοιχείο της r_i είναι το a_{i1} , αν $a_{i1} \neq 0$, διαφορετικά ηγετικό στοιχείο της r_i είναι το a_{ij} , όπου $a_{ij} \neq 0$ και $a_{i1} = \dots = a_{i,j-1} = 0$ και $j > 1$.

Είναι προφανές από τον ορισμό ότι κάθε μη μηδενική γραμμή ενός πίνακα έχει μοναδικό ηγετικό στοιχείο.

Ορισμός 2.4.1. Ένας πίνακας λέγεται **κλιμακωτός** (row echelon form) όταν ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) Αν μια γραμμή του πίνακα είναι μηδενική τότε κάθε επόμενη γραμμή του είναι και αυτή μηδενική.
- (ii) Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού στοιχείου κάθε προηγούμενης γραμμής.

Ας δούμε πώς εκφράζονται και τυπικά οι απαιτήσεις του Ορισμού 2.4.1. Ας πάρουμε τον προηγούμενο $m \times n$ πίνακα A .

Για το (i): Έστω i να είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ για τον οποίο ισχύει $r_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{in} = 0$, με την υπόθεση ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο i . Τότε για κάθε $j > i$ ισχύει επίσης ότι $r_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_{j1} = a_{j2} = \dots = a_{jn} = 0$, αν ισχύει βέβαια ότι $i < m$. Φυσικά, αν δεν υπάρχει $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ τέτοιο ώστε $r_i = \mathbf{0}$, τότε δεν έχουμε να ικανοποιήσουμε την απαίτηση (i) του Ορισμού 2.4.1 για να είναι ο πίνακας A κλιμακωτός.

Για το (ii): Ας υποθέσουμε καταρχήν ότι ο A έχει μη μηδενικές γραμμές. Έστω r_i , $i > 1$, μια μη μηδενική γραμμή του A , δηλαδή $r_i \neq \mathbf{0}$. Τότε $r_{i-1} \neq \mathbf{0}$, γιατί αν ήταν $r_{i-1} = \mathbf{0}$, τότε σύμφωνα με την απαίτηση (i) του Ορισμού 2.4.1, θα έπρεπε να ισχύει και $r_i = \mathbf{0}$, που δεν ισχύει. Έστω

a_{ij} , $a_{i-1,k}$ να είναι τα ηγετικά στοιχεία των γραμμών r_i και r_{i-1} , αντίστοιχα. Τότε ισχύει: $k < j$.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η μορφή ενός πίνακα είναι τέτοια ώστε να μην έχει έννοια να ελεγχθεί το (i) ή το (ii). Τότε, αν ικανοποιείται η άλλη συνθήκη, και πάλι λέμε ότι ο πίνακας είναι κλιμακωτός.

Έτσι, αν ένας πίνακας έχει το πολύ μια μηδενική γραμμή εξετάζουμε μόνον αν ισχύει το (ii). Επίσης, αν ένας πίνακας έχει το πολύ μια μη μηδενική γραμμή (η οποία από το (i) οφείλει να είναι η πρώτη) εξετάζουμε μόνον αν ισχύει το (i).

Άρα, ένας πίνακας του οποίου μόνο η πρώτη γραμμή είναι μη μηδενική και όλες οι επόμενες (εφόσον υπάρχουν) είναι μηδενικές είναι κλιμακωτός. Επίσης, τον μηδενικό πίνακα τον θεωρούμε κλιμακωτό.

Παράδειγμα.

Οι ακόλουθοι πίνακες είναι κλιμακωτοί:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι παρακάτω πίνακες δεν είναι κλιμακωτοί.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση. Ελέγξτε με βάση τον ορισμό ότι οι πίνακες A_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, είναι κλιμακωτοί, και αιτιολογήστε γιατί οι πίνακες B_1 , B_2 και B_3 δεν είναι κλιμακωτοί.

Μια ειδική κατηγορία κλιμακωτών πινάκων περιγράφεται μέσω του ακόλουθου ορισμού:

Ορισμός 2.4.2. Ένας κλιμακωτός πίνακας λέγεται **ανηγμένος κλιμακωτός** (reduced row echelon form) αν, επιπλέον, το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1, και είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία βρίσκεται.

Παράδειγμα. Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι κλιμακωτός αλλά όχι ανηγμένος κλιμακωτός.

Ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

επίσης είναι κλιμακωτός αλλά όχι ανηγμένος κλιμακωτός.

Ο πίνακας

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ανηγμένος κλιμακωτός, ενώ ο πίνακας

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

δεν είναι κλιμακωτός. □

Οι κλιμακωτοί πίνακες έχουν μεγάλη σημασία και στη συνέχεια θα στηριχτούμε σε αυτούς για να λύσουμε γραμμικά συστήματα.

Παρατήρηση. Παραπάνω, για να ορίσουμε τον κλιμακωτό πίνακα στηριχθήκαμε στην αρχή του ελάχιστου φυσικού αριθμού η οποία αποδεικνύεται στη θεωρία συνόλων. Σύμφωνα με αυτή, αν μια ιδιότητα αληθεύει για πολλούς διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς, ακόμη και άπειρους, τότε ορίζεται ένας μοναδικός φυσικός αριθμός ο οποίος είναι ο ελάχιστος για τον οποίο ισχύει αυτή η ιδιότητα. Διαισθητικά βεβαίως η ιδιότητα αυτή είναι προφανής.

Η παρακάτω πρόταση συνδέει τις έννοιες των γραμμοϊσοδύναμων πινάκων και του κλιμακωτού πίνακα.

Πρόταση 2.4.3. Κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν κλιμακωτό πίνακα.

Μάλιστα, ισχύει κάτι περισσότερο από αυτό που μας λέει η Πρόταση 2.4.3. Συγκεκριμένα, ισχύει το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 2.4.4. *Καθε μη μηδενικός πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με άπειρους διαφορετικούς (μη μηδενικούς αναγκαστικά) κλιμακωτούς πίνακες.*

Είναι πολύ σημαντικό τόσο για τα γραμμικά συστήματα, αλλά και για τη Γραμμική Άλγεβρα γενικότερα, να μπορούμε να βρίσκουμε έναν κλιμακωτό πίνακα που να είναι γραμμοϊσοδύναμος με δοσμένο πίνακα. Αυτό επιτυγχάνεται με μια διαδικασία που λέγεται κλιμακοποίηση και την οποία περιγράφουμε στη συνέχεια με ένα παράδειγμα. Η κλιμακοποίηση βασίζεται στη χρήση πολλών στοιχειωδών πράξεων γραμμών.

Παράδειγμα. Μετατρέψτε τον ακόλουθο πίνακα σε κλιμακωτό.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε στον A τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών που περιγράφονται στα δεξιά του και παίρνουμε διαδοχικά τους ακόλουθους γραμμοϊσοδύναμους πίνακες μέχρι να καταλήξουμε στον πίνακα B που είναι κλιμακωτός.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 - r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_1 \\ r_5 \leftarrow r_5 - r_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_2 \\ r_5 \leftarrow r_5 - 4r_2 \end{array} \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4 \leftrightarrow r_5 \end{array} \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 + 2r_3 \end{array} \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.
\end{aligned}$$

Ο πίνακας B στον οποίο καταλήξαμε είναι κλιμακωτός. □

2.5 Τάξη πίνακα

Σε κάθε πίνακα επισυνάπτουμε μια χαρακτηριστική παράμετρο, την τάξη του, η οποία είναι ένας φυσικός αριθμός. Όπως έχουμε ήδη πει, κάθε μη μηδενικός πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με άπειρους κλιμακωτούς πίνακες. Η επόμενη πρόταση συνδέει έναν πίνακα με τους γραμμοϊσοδύναμους του κλιμακωτούς πίνακες.

Πρόταση 2.5.1. Έστω A ένας μη μηδενικός πίνακας. Τότε όλοι οι κλιμακωτοί πίνακες οι οποίοι είναι γραμμοϊσοδύναμοι με τον A έχουν το ίδιο πλήθος μη μηδενικών γραμμών.

Ο φυσικός αριθμός ο οποίος εκφράζει το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών ενός κλιμακωτού πίνακα, ο οποίος είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A ονομάζεται **τάξη (rank) του A** , και συμβολίζεται με $r(A)$ ή $\text{rank}(A)$.

Παρατηρήσεις

1. Ο ορισμός της τάξης ενός πίνακα δίνει ταυτόχρονα και μια μέθοδο για να υπολογίζουμε την τάξη ενός πίνακα A . Έτσι, για να βρούμε την τάξη ενός μη μηδενικού πίνακα A τον κλιμακοποιούμε, δηλαδή βρίσκουμε έναν γραμμοϊσοδύναμό του κλιμακωτό. Τότε, το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού πίνακα είναι η τάξη του A . Ο μηδενικός πίνακας θεωρούμε ότι έχει τάξη 0, και είναι ο μοναδικός $m \times n$ πίνακας που έχει τάξη 0. Η έννοια της τάξης ενός πίνακα θα μας χρειαστεί αμέσως παρακάτω για τη λύση των γραμμικών συστημάτων.
2. Έστω A ένας μη μηδενικός $m \times n$ πίνακας. Τότε ισχύει ότι:

$$1 \leq r(A) \leq \min\{m, n\},$$

όπου με $\min\{m, n\}$ συμβολίζουμε τον μικρότερο από τους αριθμούς m, n .

Μέχρι τώρα εισαγάγαμε όλες τις αναγκαίες έννοιες που θα μας χρειαστούν για την επίλυση των γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια των πινάκων, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

Γραμμικά συστήματα

3.1 Γραμμικά συστήματα - Εισαγωγή

Πριν αρχίσουμε τη μελέτη των γραμμικών συστημάτων θα πρέπει να πούμε λίγα λόγια για το σύνολο των λύσεων τους. Όπως γνωρίζουμε από τη Β' Λυκείου οι λύσεις ενός συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (όταν υπάρχουν) είναι ζεύγη πραγματικών αριθμών.

Κατ' αναλογία, θεωρούμε τώρα τη γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος $m \times n$, δηλαδή m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους, όπου $m, n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$ ώστε να μιλάμε για σύστημα. Η μορφή αυτού του συστήματος είναι η εξής:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3.1)$$

Βάζουμε ένα άγκιστρο στα αριστερά του συστήματος για να δηλώσουμε ότι οι εξισώσεις του συστήματος λαμβάνονται όλες μαζί ως ένα σύνολο. Τα a_{ij} , για $i = 1, 2, \dots, m$ και $j = 1, 2, \dots, n$, είναι πραγματικοί αριθμοί και λέγονται οι **συντελεστές του συστήματος**, ενώ τα b_i , $i = 1, \dots, m$, ονομάζονται **σταθεροί όροι του συστήματος**. Τα $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι **άγνωστοι του συστήματος**.

Λέμε ότι το σύστημα (3.1) έχει λύση την n -άδα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, όπου $\xi_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, αν θέτοντας όπου $x_i = \xi_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, στις εξισώσεις του συστήματος (3.1), αυτές επαληθεύονται (ταυτόχρονα). Η θέση των αριθμών ξ_i για $i = 1, 2, \dots, n$ στην n -άδα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, δηλώνει και το σε ποιόν άγνωστο x_i αντιστοιχεί η κάθε μία ώστε να επαληθεύονται όλες οι εξισώσεις του συστήματος.

Δεν θα μας απασχολήσει το πώς ορίζεται αυστηρά στα μαθηματικά μια n -άδα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, δηλαδή το τι πραγματικά είναι τα μαθηματικά αντικεί-

μενα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ή αλλιώς όπως λέμε το οντολογικό status των αντικειμένων $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Αυτό είναι κάτι που αναφέρεται στη θεωρία συνόλων. Εμείς κρατάμε εδώ ότι το αντικείμενο $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, δηλώνει το σύνολο των (διατεταγμένων) πραγματικών αριθμών $x_1, x_2, \dots, x_n$ στους οποίους η σειρά (διάταξη) με την οποία τους γράφουμε παίζει ουσιώδη ρόλο, και ότι κάποιος από αυτούς μπορεί να εμφανίζονται παραπάνω από μια φορά σε αυτή τη συλλογή $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Το σύνολο όλων των διατεταγμένων n -άδων $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, το συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^n$ και το ονομάζουμε ο **n -διάστατος Ευκλείδειος χώρος**. Σε αυτό το μάθημα θα αναφερθούμε πολλές φορές στο σύνολο $\mathbb{R}^n$.

Λέμε ότι το σύστημα (3.1) είναι **συμβιβαστό** αν έχει τουλάχιστον μία λύση $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Αν το σύστημα (3.1) δεν έχει καμμία λύση λέμε ότι **το σύστημα είναι αδύνατο**. Σε ένα γραμμικό σύστημα ορίζεται καλά το σύνολο των λύσεων του εάν αυτό βέβαια είναι συμβιβαστό. Δύο συστήματα λέγονται **ισοδύναμα** αν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Στο σύστημα (3.1) αντιστοιχούμε τρεις πίνακες:

(i) Τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

ο οποίος ονομάζεται **ο πίνακας (των συντελεστών) του συστήματος**.

(ii) τον πίνακα

$$C = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right), \quad (3.3)$$

ο οποίος λέγεται **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος (3.1), και

(iii) τον πίνακα στήλη

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

ο οποίος ονομάζεται **η στήλη των σταθερών όρων του συστήματος**.

Είναι προφανές ότι σε κάθε γραμμικό σύστημα $m \times n$, οι τρεις πίνακες, ο πίνακας του συστήματος, ο επαυξημένος πίνακας, και ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων είναι μοναδικά ορισμένοι. Επίσης είναι προφανές ότι ο επαυξημένος πίνακας έχει τουλάχιστον δύο στήλες. Αντίστροφα, σε κάθε πίνακα C , ο οποίος έχει τουλάχιστον δύο στήλες αντιστοιχεί ακριβώς ένα σύστημα το οποίο έχει επαυξημένο πίνακα τον C .

Τέλος, στο σύστημα (3.1) αντιστοιχούμε έναν ακόμα πίνακα, τον πίνακα στήλη:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

ο οποίος ονομάζεται **πίνακας στήλη των αγνώστων του συστήματος**.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 9x_4 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 7 \\ 8x_1 - 9x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 5x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Ο πίνακας του συστήματος (3.6) είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & -6 \\ 6 & -7 & 8 & -9 \\ -2 & 3 & 4 & -5 \\ 8 & -9 & 1 & 2 \\ 5 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (3.6) είναι ο

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 5 & -6 & 2 \\ 6 & -7 & 8 & -9 & 3 \\ -2 & 3 & 4 & -5 & 7 \\ 8 & -9 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Τον πίνακα C τον παίρνουμε από τον πίνακα A αν «επισυνάψουμε» τον πίνακα στήλη των

σταθερών όρων του συστήματος (3.6), που είναι ο

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ως μια επιπλέον στήλη στα δεξιά του πίνακα A .

Ο πίνακας στήλη των αγνώστων του συστήματος είναι ο

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Ας επιστρέψουμε στο αρχικό γενικό σύστημα (3.1). Υπολογίζουμε το γινόμενο του πίνακα του συστήματος A επί τον πίνακα στήλη X των αγνώστων του συστήματος και έχουμε:

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = B, \end{aligned}$$

όπου για να πάρουμε την ισότητα $(*)$ χρησιμοποιήσαμε το ότι αληθεύουν οι εξισώσεις του συστήματος (3.1).

Έτσι, για το τυχόν σύστημα (3.1) ισχύει η ισότητα πινάκων $AX = B$, μεταξύ των τριών χαρακτηριστικών πινάκων A , X και B , του συστήματος (3.1).

Αντίστροφα, ας πάρουμε έναν τυχαίο $m \times n$ πίνακα A , όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Επίσης, ας πάρουμε δύο πίνακες στήλη, τον $n \times 1$ πίνακα στήλη $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ και τον $m \times 1$

πίνακα στήλη $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Υποθέτουμε ότι οι a_{ij} και b_i είναι γνωστοί πραγματικοί αριθμοί για όλα τα $i = 1, 2, \dots, m$ και $j = 1, 2, \dots, n$.

Εφ' όσον ο A είναι πίνακας $m \times n$ και ο X είναι πίνακας $n \times 1$, έχει νόημα το γινόμενο πινάκων AX , ο οποίος είναι ένας πίνακας $m \times 1$. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η ισότητα πινάκων

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \end{aligned}$$

Δηλαδή, με την υπόθεση ότι ισχύει η ισότητα πινάκων $AX = B$ καταλήξαμε ότι το σύστημα (3.1) επαληθεύεται και έχει πίνακα του συστήματος τον A , πίνακα στήλη των σταθερών όρων τον B και πίνακα στήλη των αγνώστων τον X .

Επομένως, δείξαμε την ισοδυναμία:

Το σύστημα (3.1) επαληθεύεται αν και μόνον αν ισχύει $AX = B$ για τους πίνακες A , X και B , όπως ορίζονται στις (3.2), (3.5) και (3.4), αντίστοιχα.

Επιμείναμε σε αυτή την ισότητα για να δείξουμε ότι σε κάθε γραμμικό σύστημα αντιστοιχίζεται μια ορισμένη εξίσωση πινάκων που συνδέονται με το σύστημά μας. Μέσω αυτής της διασύνδεσης (αναδιατύπωσης) των γραμμικών συστημάτων, μέσω πινάκων, η θεωρία πινάκων «εισβάλλει» στα γραμμικά συστήματα και μας βοηθά να τα λύσουμε.

Είπαμε προηγουμένως, όπως π.χ. στο Παράδειγμα της σελίδας 33, ότι σε τυχόν γραμμικό σύστημα αντιστοιχεί ένας μοναδικός επαυξημένος πίνακας που έχει τουλάχιστον δύο στήλες.

Αλλά και αντίστροφα, σε οποιονδήποτε πίνακα που έχει τουλάχιστον δύο στήλες αντιστοιχεί ένα μοναδικό γραμμικό σύστημα το οποίο έχει τον πίνακα αυτόν ως επαυξημένο.

Παράδειγμα. Έστω ο 3×5 πίνακας

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ -5 & -8 & 7 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Στον πίνακα C αντιστοιχεί το ακόλουθο γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 4 αγνώστους:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ -5x_1 - 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 11 \end{cases} \quad (3.7)$$

Το σύστημα (3.7) έχει επαυξημένο πίνακα τον C από τον οποίον ξεκινήσαμε και είναι το μοναδικό σύστημα το οποίο έχει ως επαυξημένο πίνακα τον C .

Άρα, γενικά, υπάρχει μια πλήρης αντιστοίχιση των γραμμικών συστημάτων με m εξισώσεις και n αγνώστους με τους πίνακες $m \times (n + 1)$. Έχουμε διατυπώσει, μέχρι εδώ, όλες τις έννοιες που μας είναι απαραίτητες για να λύσουμε τα γραμμικά συστήματα με τη βοήθεια των πινάκων.

3.2 Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια πινάκων

Αρχικά, ας αναφέρουμε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την τάξη ενός πίνακα.

Παρατηρήσεις.

1. Για κάθε πίνακα A ισχύει $A \sim A$, δηλαδή ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον εαυτό του.
2. Αν A, B είναι δύο πίνακες τέτοιοι ώστε $A \sim B$, τότε ισχύει $r(A) = r(B)$, δηλαδή δύο γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες έχουν την ίδια τάξη.
3. Η τάξη ενός κλιμακωτού πίνακα είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του.
4. Έστω A ένας κλιμακωτός πίνακας με τάξη $r(A)$. Τότε οι μη μηδενικές γραμμές του A είναι ακριβώς οι πρώτες $r(A)$ γραμμές του. Αν ο κλιμακωτός πίνακας A με τάξη $r(A)$ έχει m γραμμές με $m > r(A)$, τότε οι επιπλέον $m - r(A)$ μετά τις πρώτες $r(A)$ μη μηδενικές γραμμές του είναι όλες μηδενικές.

Παράδειγμα. Οι κλιμακωτοί πίνακες $A_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$, του Παραδείγματος της σελίδας 25 έχουν αντίστοιχα τάξεις:

$$r(A_1) = 4, \quad r(A_2) = 3, \quad r(A_3) = 3, \quad r(A_4) = 5, \quad r(A_5) = 5.$$

Ορισμός 3.2.1. Για τις ανάγκες των σημειώσεων αυτών, θα ονομάζουμε ένα γραμμικό σύστημα κλιμακωτό αν ο αντίστοιχος επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι κλιμακωτός.

Παρατήρηση. Έστω (Σ) να είναι ένα κλιμακωτό σύστημα. Τότε ο πίνακας του συστήματος είναι κλιμακωτός. Στο Παράδειγμα της σελίδας 27 κλιμακοποιήσαμε τον πίνακα A . Η ίδια διαδικασία της κλιμακοποίησης του A μας δίνει, όπως έχουμε πει, και την τάξη του A . Συγκεκριμένα, στο παράδειγμα αυτό δείξαμε ότι $A \sim B$, όπου ο B είναι κλιμακωτός, για τον οποίον φαίνεται από τη μορφή του ότι έχει 4 μη μηδενικές γραμμές. Άρα $r(A) = r(B) = 4$. Επομένως, το παράδειγμα αυτό αποτελεί ταυτόχρονα και παράδειγμα υπολογισμού της τάξης ενός πίνακα.

Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί το κλειδί για τη λύση των γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια των πινάκων.

Πρόταση 3.2.2. Αν δύο συστήματα (Σ) και (Σ') έχουν επαυξημένους πίνακες τους πίνακες C και C' , αντίστοιχα, και ισχύει $C \sim C'$, τότε τα συστήματα (Σ) και (Σ') είναι ισοδύναμα, δηλαδή έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Συμβολισμός. Ένα γραμμικό σύστημα που έχει πίνακα του συστήματος τον πίνακα A και στήλη των σταθερών όρων τη στήλη b , θα το συμβολίζουμε ως

$$Ax = b,$$

εννοώντας ότι x είναι ο πίνακας στήλη των αγνώστων του και ότι η εξίσωση $Ax = b$ είναι η μοναδική εξίσωση πινάκων που αντιστοιχεί στο σύστημα.

Η Πρόταση «κλειδί» 3.2.2 μας παρέχει ταυτόχρονα και μια μέθοδο για να λύνουμε γραμμικά συστήματα. Ας περιγράψουμε τη μέθοδο σε γενικές γραμμές.

Έστω ότι έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα (Σ) που εκφράζεται μοναδικά με την εξίσωση πινάκων $Ax = b$, όπου A είναι ο πίνακας του συστήματος, b είναι ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων και x είναι ο πίνακας στήλη των αγνώστων του. Θα συμβολίζουμε πιο παραστατικά με $(A|b)$ τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος (Σ) , μιας και αυτός προκύπτει από τον A αν επισυνάψουμε στο τέλος του A μια επιπλέον στήλη, την b .

Κλιμακοποιούμε τον πίνακα $(A|b)$. Έστω C' να είναι ένας κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $(A|b)$. Έστω (Σ') να είναι το γραμμικό κλιμακωτό σύστημα που

ορίζει ο C' . Λύνουμε το (Σ') και τότε το σύνολο λύσεων του (Σ') (εφ' όσον υπάρχει) είναι ταυτόχρονα και σύνολο λύσεων του (Σ) . Αν το (Σ') είναι αδύνατο, τότε και το (Σ) είναι αδύνατο. Η διαδικασία της κλιμακοποίησης με την οποία λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα με τη βοήθεια πινάκων είναι στην ουσία η γνωστή μας μέθοδος απαλοιφής του Gauss.

Γενικά, οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα έχει τρεις δυνατότητες ως προς το σύνολο των λύσεών του:

- (i) Να είναι αδύνατο, δηλαδή να μην έχει καμία λύση.
- (ii) Να έχει ακριβώς μία λύση.
- (iii) Να έχει άπειρες λύσεις.

Έτσι, ένα γραμμικό σύστημα δεν μπορεί να έχει ακριβώς δύο λύσεις όπως, π.χ., συμβαίνει με τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

Στη συνέχεια δίνουμε τρία παραδείγματα, ένα για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

Παράδειγμα (σύστημα με μοναδική λύση).

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Ο επανξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

Αναζητούμε μια σειρά στοιχειωδών πράξεων γραμμών, που να μετατρέπουν τον $(A|b)$ σε έναν κλιμακωτό πίνακα. Εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - \frac{3}{2}r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Επομένως, καταλήξαμε σ' έναν κλιμακωτό πίνακα που αντιστοιχεί στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_3 = -2. \end{cases}$$

Λύνουμε την τελευταία και βρίσκουμε $x_3 = -1/4$. Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στη δεύτερη και βρίσκουμε $x_2 = -1/2$. Τέλος, αντικαθιστούμε τις γνωστές πλέον τιμές των x_2 και x_3 στην πρώτη και βρίσκουμε $x_1 = 1$.

Παράδειγμα (σύστημα με άπειρες λύσεις).

Θεωρήστε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = -1 \end{cases}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

και βλέπουμε άμεσα ότι είναι (ανηγμένος) κλιμακωτός. Οπότε, λύνοντας από το τέλος προς την αρχή έχουμε

$$\begin{aligned} x_4 &= -1, \\ x_2 &= x_3, \\ x_1 &= -2x_3. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $x_3 = s$, όπου s είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός καταλήγουμε ότι

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_3, x_3, x_3, -1) = (-2s, s, s, -1).$$

Δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της παραπάνω μορφής.

Παράδειγμα (αδύνατο σύστημα).

Θεωρήστε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

Εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right) & \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 - \frac{2}{3}r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ r_3 \leftarrow r_3 - 6r_2 \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Καταλήξαμε σ' έναν κλιμακωτό πίνακα όπου το ηγετικό στοιχείο της τελευταίας γραμμής είναι στην τελευταία στήλη. Επομένως, η τελευταία εξίσωση του ισοδύναμου γραμμικού συστήματος είναι $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 12$, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο.

Άρα, όπως είδαμε παραπάνω, για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα το αναγάγουμε σε ένα ισοδύναμό του κλιμακωτό. **Θα δούμε παρακάτω ότι ένα κλιμακωτό $n \times n$ σύστημα του οποίου η διαγώνιος του επαυξημένου πίνακά του έχει όλα τα στοιχεία της μη μηδενικά είναι η απλούστερη και βασικότερη περίπτωση γραμμικού συστήματος, στην οποία βασίζεται γενικά η λύση των γραμμικών συστημάτων.**

3.3 Επίλυση κλιμακωτού συστήματος

Ας δούμε τώρα πώς επιλύονται τα απλούστερα κλιμακωτά γραμμικά συστήματα n εξισώσεων με n αγνώστους των οποίων τα διαγώνια στοιχεία είναι όλα μη μηδενικά. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε το ακόλουθο κλιμακωτό $n \times n$ σύστημα στη γενική του μορφή, για $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

όπου υποθέτουμε ότι $a_{ii} \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Για να λύσουμε το σύστημα αυτό ακολουθούμε μια διαδικασία η οποία λέγεται **οπισθοδρομηση ή ανάδρομη αντικατάσταση**.

Συγκεκριμένα, βρίσκουμε τους αγνώστους έναν-έναν από το τέλος προς την αρχή. Αρχικά, βρίσκουμε το x_n από την τελευταία εξίσωση: $x_n = b_n/a_{nn}$, όπου $a_{nn} \neq 0$ από την υπόθεση. Μετά αντικαθιστούμε την τιμή του x_n στην αμέσως προηγούμενη εξίσωση του συστήματος, δηλαδή την $a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$. Αυτή τώρα είναι μια πρωτοβάθμια εξίσωση με μόνο άγνωστο το x_{n-1} . Την λύνουμε και βρίσκουμε τον άγνωστο x_{n-1} .

Αφού έχουμε βρει τώρα τους αγνώστους x_n και x_{n-1} , τους αντικαθιστούμε στην αμέσως προηγούμενη εξίσωση του συστήματος που περιέχει τα x_{n-2} , x_{n-1} και x_n . Αυτή είναι μια πρωτοβάθμια εξίσωση με μόνο άγνωστο πλέον το x_{n-2} . Την λύνουμε και βρίσκουμε τον άγνωστο x_{n-2} , κ.ο.κ. Έτσι συνεχίζουμε τη διαδικασία επαγωγικά προς τα πίσω, βρίσκοντας από κάθε μία από τις εξισώσεις και έναν άγνωστο, μέχρι στο τέλος να φτάσουμε στην πρώτη εξίσωση του συστήματος από την οποία υπολογίζουμε και τον x_1 . Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση, αυτήν που βρίσκουμε με αυτήν τη διαδικασία. Σε αυτήν τη διαδικασία έχουμε χρησιμοποιήσει ουσιαστικά την υπόθεση ότι $a_{ii} \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, αφού σε κάθε βήμα για να υπολογίσουμε τον συγκεκριμένο άγνωστο θα χρειαστεί να λύσουμε μια πρωτοβάθμια εξίσωση, η οποία έχει μοναδική λύση ακριβώς επειδή ο αντίστοιχος αριθμός a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$, είναι διάφορος του μηδενός.

3.4 Μεθοδολογία επίλυσης των γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια πινάκων

Τώρα είμαστε σε θέση να αναπτύξουμε με λεπτομέρειες τη μεθοδολογία επίλυσης των γραμμικών συστημάτων. Θεωρούμε πάλι ένα γραμμικό σύστημα στη γενική του μορφή:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3.8)$$

Το σύστημα (3.8) έχει m εξισώσεις και n αγνώστους, όπου $m, n \in \mathbb{N}$. Θα συμβολίζουμε με $Ax = b$ την αντίστοιχη εξίσωση πινάκων του συστήματος (3.8), όπου A είναι ο $m \times n$ πίνακας του συστήματος, x είναι ο $n \times 1$ πίνακας στήλη των αγνώστων του, και b είναι ο $m \times 1$ πίνακας στήλη των σταθερών όρων του συστήματος. Θα συμβολίζουμε, ως συνήθως, με $(A|b)$ τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

Το πρώτο πράγμα που εξετάζουμε σε ένα γραμμικό σύστημα είναι το αν έχει ή δεν έχει λύσεις. Για να το ελέγξουμε αυτό εκτελούμε την ακόλουθη διαδικασία:

- (1) Από το αρχικό σύστημα (3.8) κατασκευάζουμε τον επαυξημένο πίνακα $C = (A|b)$ του συστήματος.
- (2) Κλιμακοποιούμε τον πίνακα C και παίρνουμε έναν ισοδύναμο του κλιμακωτό πίνακα C' .
- (3) Αν, κατά τη διαδικασία της κλιμακοποίησης, και πριν φτάσουμε στον κλιμακωτό πίνακα C' προκύψει (σε κάποιον ενδιάμεσο γραμμοϊσοδύναμο πίνακα του C) *ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη*, τότε το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο και η διαδικασία σταματά.
- (4) Αν δεν προκύψει η περίπτωση στο (3), και το ηγετικό στοιχείο της τελευταίας μη μηδενικής γραμμής του πίνακα C' βρίσκεται στην τελευταία στήλη, τότε το σύστημα (3.8) είναι αδύνατο.
- (5) Αν δεν προκύψουν τα (3) και (4), τότε το σύστημα (3.8) είναι συμβιβαστό, δηλαδή έχει τουλάχιστον μία λύση.

Παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι ο κλιμακωτός πίνακας C' στον οποίο καταλήξαμε είναι ο εξής:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 & 7 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 7 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Εφ' όσον η τελευταία γραμμή του πίνακα C' είναι μη μηδενική και το ηγετικό της στοιχείο βρίσκεται στην τελευταία στήλη, έπεται ότι το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

Ας θεωρήσουμε και τον πίνακα C' , ο οποίος υποθέτουμε ότι είναι ο αντίστοιχος κλιμακωτός πίνακας κάποιου άλλου συστήματος

$$C' = \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Εδώ η τελευταία μη μηδενική γραμμή του C' είναι η $(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2)$ και δεν είναι της μορφής που περιγράφεται στο βήμα (4) παραπάνω. (Δηλαδή, το ηγετικό της στοιχείο είναι το 1 και δεν βρίσκεται στην τελευταία στηλη.) Επομένως το αρχικό σύστημα είναι συμβιβαστό.

Παρατήρηση. Υπάρχουν γραμμικά συστήματα $m \times n$ που είναι αδύνατα σε κάθε μία από τις περιπτώσεις: $m = n$, $m > n$, $m < n$.

Παραδείγματα.

(i) Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}.$$

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα 2×2 και είναι αδύνατο γιατί αν υπήρχαν x και y τα οποία επαλήθευαν τις εξισώσεις του, τότε επειδή $1 = x - y = -1$, θα ίσχυε $1 = -1$, άτοπο.

(ii) Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}.$$

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα 3×2 , το οποίο είναι αδύνατο γιατί δεν μπορεί να αληθεύουν οι πρώτες δύο εξισώσεις του (όπως στο (i)).

(iii) Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα 2×3 , το οποίο είναι αδύνατο γιατί διαφορετικά θα υπήρχαν αριθμοί $x, y, z \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $0 = x + y + z = 1 \Rightarrow 0 = 1$, άτοπο.

Ας έρθουμε τώρα στην περίπτωση όπου το αρχικό σύστημα (3.8) είναι συμβιβαστό. Ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.4.1. Το σύστημα (3.8) είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν ισχύει $r(A) = r(A|b) = r(C)$, δηλαδή μόνον στην περίπτωση που η τάξη του πίνακα του συστήματος είναι ίση με την τάξη του επαυξημένου πίνακα του συστήματος.

Ο πίνακας A είναι πίνακας $m \times n$ και για την τάξη του, όπως έχουμε ήδη πει, ισχύει ότι $r(A) \leq \min\{m, n\}$, όπου με $\min\{m, n\}$ συμβολίζουμε τον μικρότερο από τους φυσικούς αριθμούς m και n .*

*Γενικά, αν έχουμε n πραγματικούς αριθμούς, έστω $a_1, a_2, \dots, a_n$, συμβολίζουμε με $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ και $\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο, αντίστοιχα, από τους αριθμούς αυτούς.

Αφού λοιπόν, από τα προηγούμενα, για το συμβιβαστό σύστημα (3.8) ισχύει ότι:

$$r(A) = r(C) \leq n,$$

τότε υπάρχουν ακριβώς δύο δυνατότητες:

- (i) **Να ισχύει $r(A) = r(C) = n$.** Στην περίπτωση αυτή το σύστημα (3.8) έχει ακριβώς μία λύση.
- (ii) **Να ισχύει $r(A) = r(C) < n$.** Τότε το σύστημα (3.8) έχει άπειρες λύσεις.

Ας περιγράψουμε τώρα τη διαδικασία της λύσης του συστήματος (3.8). Αρχικά, ελέγχουμε αν το σύστημα (3.8) είναι συμβιβαστό. Για να το πετύχουμε αυτό στο πρώτο στάδιο κλιμακοποιούμε τον πίνακα $C = (A|b)$ και βρίσκουμε έναν γραμμοϊσοδύναμο του κλιμακωτό πίνακα $C' = (A'|b')$, όπου A' είναι ο πίνακας του συστήματος το οποίο έχει ως επαυξημένο πίνακα τον C' . Προφανώς, ο A' είναι και αυτός κλιμακωτός. Στη συνέχεια,

- (1) Βρίσκουμε την τάξη $r(C')$ του $C' = (A'|b')$ και την τάξη $r(A')$ του A' . Η τάξη του C' και η τάξη του A' είναι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών τους και, φυσικά, τις προσδιορίζουμε απλώς κοιτώντας τους πίνακες C' και A' , αντίστοιχα. Τότε το (3.8) είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν $r(A') = r(C') \leq n$.*

Στην πράξη αυτό σημαίνει: α) ότι το ηγετικό στοιχείο της τελευταίας μη μηδενικής γραμμής του πίνακα C' δεν βρίσκεται στην τελευταία στήλη, οπότε $r(A') = r(C')$, και β) ότι $r(C') \leq n$.

- (2) Έστω λοιπόν ότι από τον έλεγχο που κάναμε στο προηγούμενο βήμα βρήκαμε ότι το (3.8) είναι συμβιβαστό. Μετά ελέγχουμε αν ισχύει $r(C') = n$ ή $r(C') < n$. Αν ισχύει $r(C') = n$, τότε το αρχικό σύστημα έχει ακριβώς μία λύση, ενώ αν $r(C') < n$, τότε το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη μεθοδολογία για την επίλυση του συστήματος σε κάθε μία από τις δύο αυτές περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $r(A') = r(C') = n$.

Όπως έχουμε δει, ισχύει ότι $r(A') = r(A) \leq \min\{m, n\} \Rightarrow r(A) \leq m$. Επομένως, έπεται ότι $n \leq m$. Έτσι εδώ έχουμε δύο περιπτώσεις:

$$(\alpha) \quad m = n \quad \text{και} \quad (\beta) \quad m > n.$$

*Προφανώς, έχουμε ότι $A \sim A'$ και $C \sim C'$, άρα λόγω της Παρατήρησης 2 στη σελίδα 36 έχουμε ότι $r(A) = r(A')$ και $r(C) = r(C')$. Συνεπώς το σύστημα είναι συμβιβαστό $\Leftrightarrow r(A) = r(C) \Leftrightarrow r(A') = r(C')$.

Η διαδικασία της λύσης του συστήματος είναι παρόμοια και για τις δύο αυτές περιπτώσεις (α) και (β).

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση (α), όπου $m = n = r(C')$.

Σε αυτήν την περίπτωση τα διαγώνια στοιχεία του C' είναι όλα διάφορα του 0. Δηλαδή, $c'_{ii} \neq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, r(C') = m = n$. Τότε το μοναδικό γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα C' , έστω (Σ') , είναι ένα κλιμακωτό σύστημα της μορφής που έχουμε ήδη εξετάσει στην Παράγραφο 3.3. Λύνουμε αυτό το σύστημα (Σ') με οπισθοδρόμηση, όπως περιγράψαμε στην Παράγραφο 3.3, και προσδιορίζουμε τη μοναδική του λύση. Αυτή είναι και η μοναδική λύση του αρχικού συστήματος (3.8).

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση (β), όπου $m > n = r(C')$.

Εδώ οι $m - n$ τελευταίες γραμμές του πίνακα C' είναι μηδενικές. Αυτό σημαίνει ότι οι τελευταίες $m - n$ εξισώσεις του (μοναδικού) γραμμικού συστήματος που αντιστοιχεί στον πίνακα C' είναι μηδενικές, δηλαδή είναι της μορφής:

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0.$$

Αυτές τις μηδενικές εξισώσεις δεν τις λαμβάνουμε υπ' όψιν και έτσι προκύπτει ένα κλιμακωτό σύστημα όπως αυτό της προηγούμενης περίπτωσης (α). Το λύνουμε όπως πριν, και η μοναδική του λύση είναι και η μοναδική λύση του αρχικού συστήματος (3.8).

Έχουμε ήδη δει, στη σελίδα 38, ένα παράδειγμα συστήματος με μοναδική λύση στην περίπτωση που $m = n = 3$. Ας δούμε και ένα παράδειγμα στην περίπτωση που $m > n$.

Παράδειγμα. Να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 - 9x_3 = -5 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 13 \end{cases} \quad (3.9)$$

Εδώ έχουμε ένα σύστημα 5×3 ($m = 5, n = 3$). Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

ο 5×4 πίνακας C που τον κλιμακοποιούμε ως εξής:

$$\begin{aligned}
 C &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & -9 & -5 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 - r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_1 \\ r_5 \leftarrow r_5 - 2r_1 \end{array} \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_3 \leftarrow r_3 + r_2 \\ r_5 \leftarrow r_5 - r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_3 \leftrightarrow r_4 \end{array} \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_4 \leftarrow r_4 - 2r_3 \\ r_5 \leftarrow r_5 - 2r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = C'.
 \end{aligned}$$

Έτσι, κλιμακοποιήσαμε τον επαυξημένο πίνακα C του αρχικού γραμμικού συστήματος (3.9) και πήραμε τον κλιμακωτό πίνακα C' . Η τελευταία μη μηδενική γραμμή του C' είναι η

$$(0 \ 0 \ -1 \ -1),$$

της οποίας το ηγετικό στοιχείο δεν βρίσκεται στην τελευταία στήλη. Άρα το αρχικό σύστημα είναι συμβιβαστό. Επίσης, το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του C' (και του A') είναι ίσο με 3. Άρα $r(C') = r(A') = 3 = n$. Άρα το αρχικό σύστημα έχει ακριβώς μία λύση. Παρατηρούμε επίσης, ότι τα διαγώνια στοιχεία (των μη μηδενικών γραμμών) του C' είναι όλα διάφορα του μηδενός.

Για να βρούμε τώρα τη μοναδική λύση του αρχικού συστήματος γράφουμε ένα νέο γραμμικό σύστημα για το οποίο ο C' είναι ο επαυξημένος πίνακός του. Δηλαδή έχουμε να λύσουμε το κλιμακωτό σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_2 + 4x_3 = 7 \\ -x_3 = -1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 3.3, λύνουμε το σύστημα αυτό με οπισθοδρόμηση. Έτσι, από την τρίτη εξίσωση του συστήματος (3.10) παίρνουμε $x_3 = 1$.

Αντικαθιστούμε την τιμή του x_3 στη δεύτερη εξίσωση του (3.10) και έχουμε:

$$x_2 = 7 - 4x_3 = 7 - 4 \cdot 1 = 3.$$

Τέλος, αντικαθιστούμε τις τιμές των x_2 και x_3 που βρήκαμε στην πρώτη εξίσωση του (3.10) και παίρνουμε:

$$x_1 = 4 - 2x_2 + 3x_3 = 4 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 1.$$

Άρα η μοναδική λύση του αρχικού μας συστήματος (3.9) είναι η $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 1)$. $\square$

Παρατήρηση. Για να είμαστε ακριβέστεροι το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα C' είναι το εξής:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_2 + 4x_3 = 7 \\ -x_3 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Προφανώς όμως, μπορούμε να αγνοήσουμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις μιας και είναι μηδενικές (δηλαδή έχουν όλους τους συντελεστές μηδέν), και επομένως δεν επηρεάζουν τη λύση του αρχικού συστήματος. Φυσικά το σύστημα (3.11) είναι ισοδύναμο με το (3.10) (είναι προφανές ότι κάθε λύση του ενός συστήματος είναι λύση και του άλλου).

Μας έχει απομείνει να εξετάσουμε την ακόλουθη:

Περίπτωση 2: $r(A') = r(C') < n$. Στην περίπτωση αυτή το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Για να φτάσουμε να αποφασίσουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, ξεκινάμε όπως πριν. Πρώτα ελέγχουμε αν το σύστημα είναι συμβιβαστό, κλιμακοποιώντας τον αρχικό επαυξημένο πίνακα C του συστήματος (3.8) και παίρνοντας τον ισοδύναμό του κλιμακωτό πίνακα C' . Υπολογίζουμε την τάξη $r(C')$, και ελέγχουμε ότι $r(A') = r(C') < n$, οπότε καταλήγουμε ότι το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Εδώ, βεβαίως, μπορεί να έχουμε και τις τρεις δυνατότητες για τους αριθμούς m και n :

$$m < n \quad \text{ή} \quad m = n \quad \text{ή} \quad m > n.$$

Φυσικά, ισχύει πάντα ότι $r(C') \leq m$. **Στη συνέχεια θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις συστημάτων με άπειρες λύσεις:**

(α) Έστω $c'_{ii} \neq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, r(C')$, όπου με c'_{ii} συμβολίζουμε τα διαγώνια στοιχεία του C' .

(β) Έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in \{1, 2, \dots, r(C')\}$, ώστε να ισχύει $c'_{ii} = 0$.

Θα εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση (α) που είναι η πιο «εύκολη». Σε αυτή την περίπτωση ο πίνακας C' έχει την ακόλουθη μορφή:

$$C' = \left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right),$$

όπου, για απλότητα, έχουμε συμβολίσει $r = r(C')$. Δηλαδή, αν ισχύει ότι $r < m$, τότε ο C' έχει τις πρώτες r γραμμές του μη μηδενικές και τις υπόλοιπες $m - r$ γραμμές του μηδενικές, ενώ αν $r = m$, τότε ο C' δεν θα έχει καμμία μηδενική γραμμή. Τα πρώτα r διαγώνια στοιχεία $a'_{11}, a'_{22}, \dots, a'_{rr}$ του C' , σύμφωνα με την υπόθεσή μας, είναι μη μηδενικά. Τότε το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα του πίνακα C' είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1r}x_r + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2r}x_r + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{rr}x_r + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r \\ 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_r + \dots + 0x_n = 0 \\ \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_r + \dots + 0x_n = 0 \end{array} \right.$$

Τις τελευταίες $m - r$ γραμμές αυτού του συστήματος μπορούμε να τις αγνοήσουμε μιας και δεν επηρεάζουν το σύνολο λύσεων του αρχικού συστήματος (3.8). Επομένως, έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1r}x_r + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2r}x_r + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{rr}x_r + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Σε κάθε εξίσωση του συστήματος (3.12) μεταφέρουμε τους $n - r$ τελευταίους αγνώστους $x_{r+1}, \dots, x_n$ μαζί με τους αντίστοιχους συντελεστές τους στο δεύτερο μέλος, οπότε το (3.12) γράφε-

ται και ως εξής:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1r}x_r = b'_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{1n}x_n \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2r}x_r = b'_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{2n}x_n \\ \vdots \\ a'_{rr}x_r = b'_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{rn}x_n \end{cases} \quad (3.13)$$

Τώρα θεωρούμε τους $n - r$ τελευταίους αγνώστους $x_{r+1}, \dots, x_n$, ως *ελεύθερους αγνώστους*. Αυτό σημαίνει το εξής: Ας δώσουμε στους αγνώστους $x_{r+1}, \dots, x_n$ αυθαίρετες αλλά σταθεροποιημένες τιμές. Δηλαδή, επιλέγουμε $n - r$ αυθαίρετες τιμές, έστω $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$, και τις σταθεροποιούμε. Μετά θέτουμε $x_{r+1} = \xi_1, \dots, x_n = \xi_{n-r}$. Τότε για τη συγκεκριμένη αυτή $(n-r)$ -άδα τιμών $(\xi_1, \dots, \xi_{n-r})$, το σύστημα (3.13) είναι κλιμακωτό και τα διαγώνια στοιχεία του είναι μη μηδενικά. Άρα έχει μοναδική λύση για τους αγνώστους $x_1, x_2, \dots, x_r$, οι οποίοι εκφράζονται μέσω της $(n-r)$ -άδας $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r})$, που είναι η περίπτωση της Παραγράφου 3.3.

Ανάλογα, για οποιαδήποτε σταθεροποιημένη κάθε φορά επιλογή τιμών των μεταβλητών $x_{r+1}, \dots, x_n$, το σύστημα (3.13) έχει μοναδική λύση για τους αγνώστους $x_1, x_2, \dots, x_r$, η οποία εκφράζεται μέσω των ελεύθερων αγνώστων $x_{r+1}, \dots, x_n$. Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζεται το άπειρο σύνολο λύσεων του αρχικού συστήματος. Ας περιγράψουμε την περίπτωση αυτή με ένα απλό παράδειγμα για να γίνει πιο κατανοητή.

Παράδειγμα. Να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \quad (3.14)$$

Κλιμακοποιούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} C &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 + r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_2 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{array} \right) = C'. \end{aligned}$$

Άμεσα διαπιστώνουμε ότι $r(A') = r(C') = 3$. Εδώ $n = 4$, άρα $r(A') = r(C') = 3 < 4 = n$. Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $n - r(C') = 4 - 3 = 1$ ελεύθερο άγνωστο. Τα διαγώνια στοιχεία του C' είναι τα 1, 3, 2, και είναι όλα μη μηδενικά. Άρα επιλέγουμε ως ελεύθερο άγνωστο τον x_4 .

Γράφουμε τώρα το κλιμακωτό σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα C' :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_3 = 5 \end{cases} \quad (3.15)$$

Το σύστημα (3.15) γράφεται και ως εξής:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 - x_4 \\ 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_3 = 5 \end{cases} \quad (3.16)$$

Λύνουμε τώρα το (3.16) με οπισθοδρόμηση, σαν ο ελεύθερος άγνωστος x_4 να είναι μια γνωστή σταθερά. Από την τρίτη εξίσωση του (3.16) παίρνουμε $x_3 = 5/2$. Αντικαθιστούμε την τιμή του x_3 στη δεύτερη εξίσωση και παίρνουμε

$$3x_2 + 4 \cdot \frac{5}{2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{7}{3}.$$

Τέλος, αντικαθιστούμε τις τιμές των x_2 και x_3 που βρήκαμε στην πρώτη εξίσωση του (3.16) και υπολογίζουμε το x_1 . Έχουμε:

$$x_1 + 2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + 3 \cdot \frac{5}{2} = 1 - x_4 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{11}{6} - x_4.$$

Άρα το σύνολο των λύσεων του συστήματος (3.14) είναι όλες οι τετράδες αριθμών της μορφής $(-\frac{11}{6} - x_4, -\frac{7}{3}, \frac{5}{2}, x_4)$, για όλα τα $x_4 \in \mathbb{R}$.

Έτσι, μας έμεινε πλέον η τελευταία περίπτωση όπου $r(A') = r(C') < n$, οπότε έχουμε ένα σύστημα με άπειρες λύσεις, και υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in \{1, 2, \dots, r(C')\}$, ώστε να ισχύει $c'_{ii} = 0$ (βλ. περίπτωση (β) στη σελίδα 47). Στην περίπτωση αυτή δουλεύουμε ανάλογα με την περίπτωση (α). Δηλαδή αφού βρούμε τον $r(C')$ και εξασφαλίσουμε με τη συνθήκη $r(A') = r(C') < n$, ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό και έχει άπειρες λύσεις, επιλέγουμε στη συνέχεια $n - r(C')$ ελεύθερους αγνώστους από τους αγνώστους $x_1, x_2, \dots, x_n$ του συστήματος και «λύνουμε» το σύστημα ως προς τους υπόλοιπους.

Παρατήρηση. Η τελευταία αυτή περίπτωση (β) έχει μια ιδιαιτερότητα. Σε κάποιες περιπτώσεις είναι δυνατόν να κλιμακοποιήσουμε τον αρχικό πίνακα C με τέτοιο τρόπο ώστε να μην εμφανίζεται αυτή η περίπτωση (β), αλλά η προηγούμενη (α) που εξετάσαμε. Υπάρχουν όμως

και περιπτώσεις πινάκων που αυτό μπορεί να μην είναι δυνατό. Οπότε αναγκαστικά πρέπει να εξετάσουμε αυτήν τη δεύτερη περίπτωση. Για τις απλές περιπτώσεις συστημάτων που εξετάζουμε εμείς εδώ, δηλαδή με πολύ μικρό αριθμό εξισώσεων και αγνώστων, είναι πολύ απλό να λύσουμε το κλιμακωτό σύστημα που θα προκύψει ως προς τους ελεύθερους αγνώστους, και έτσι δεν προκύπτει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία. Στη γενική περίπτωση όμως που έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα σύστημα με ενδεχομένως μεγάλο αριθμό αγνώστων, αυτή η περίπτωση απαιτεί ειδικό χειρισμό.

Ας δούμε τώρα και ένα παράδειγμα για αυτή την περίπτωση.

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 5 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 + 5x_5 = 11 \\ 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases} \quad (3.17)$$

Έστω C να είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος. Τον κλιμακοποιούμε και έχουμε:

$$\begin{aligned} C &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 5 & 11 \\ 3 & 6 & -5 & 7 & 0 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 + (-2)r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + (-5)r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + (-3)r_1 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_3 \leftarrow r_3 + (-2)r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 + (-1)r_2 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = C'. \end{aligned}$$

Προφανώς το σύστημα είναι συμβιβαστό, αφού το ηγετικό στοιχείο της τελευταίας μη μηδενικής γραμμής του C' είναι το 4 και δεν βρίσκεται στην τελευταία στήλη. Έχουμε $r(A') = r(C') = 3 < 5 = n$, όπου n είναι το πλήθος των αγνώστων του συστήματος. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $n - r(C') = 5 - 3 = 2$ ελεύθερους αγνώστους.

Για να το λύσουμε σχηματίζουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στον επαυ-

ξημένο πίνακα C' .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 4x_5 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \end{cases}$$

Προφανώς μπορούμε να παραλείψουμε την τελευταία μηδενική γραμμή του συστήματος αυτού, γιατί το νέο σύστημα που είναι κλιμακωτό έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με το αρχικό. Έτσι παίρνουμε το κλιμακωτό σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 4x_5 = -1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε $x_5 = -\frac{1}{4}$. Αντικαθιστούμε την τιμή του x_5 στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε:

$$x_3 - 2x_4 + 3\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x_3 - 2x_4 = \frac{7}{4}. \quad (3.19)$$

Τώρα πρέπει να επιλέξουμε δύο ελεύθερους αγνώστους από τους x_1, x_2, x_3, x_4 έτσι ώστε οι δύο άλλοι να προσδιορίζονται μοναδικά από αυτούς για κάθε αυθαίρετα επιλεγμένο σύνολο τιμών των δύο αυτών ελεύθερων μεταβλητών.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση αυτό γίνεται εύκολα. Αν διαλέξουμε ως ελεύθερους αγνώστους τους x_2, x_4 , τότε η πρώτη εξίσωση του (3.18) και η (3.19) γραφονται ως εξής:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 2 - 2x_2 - 3x_4 + x_5, \\ x_3 &= \frac{7}{4} + 2x_4, \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του $x_5 = -\frac{1}{4}$ στην πρώτη εξίσωση και παίρνουμε:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = \frac{7}{4} - 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = \frac{7}{4} + 2x_4 \end{cases} \quad (3.20)$$

Το σύστημα (3.20) τώρα είναι κλιμακωτό και για κάθε δεδομένο ζεύγος τιμών των x_2, x_4 , δέχεται μοναδική λύση ως προς τους αγνώστους x_1, x_3 . Αντικαθιστούμε τη δεύτερη εξίσωση του (3.20) στην πρώτη, και παίρνουμε:

$$x_1 - 2\left(\frac{7}{4} + 2x_4\right) = \frac{7}{4} - 2x_2 - 3x_4 \Leftrightarrow x_1 = \frac{21}{4} - 2x_2 + x_4.$$

Έτσι το σύνολο λύσεων του αρχικού συστήματος (3.17) αποτελείται από όλες τις 5-άδες:

$$\left(\frac{21}{4} - 2x_2 + x_4, x_2, \frac{7}{4} + 2x_4, x_4, -\frac{1}{4}\right),$$

για κάθε $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$. □

Παρατήρηση: Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ήταν εύκολο να προσδιορίσουμε τους δύο ελεύθερους αγνώστους x_2 και x_4 ως προς τους οποίους προσδιορίζουμε τους υπόλοιπους. Στη γενική περίπτωση, με μεγάλο πλήθος αγνώστων, μπορεί να είναι αρκετά δύσκολο να προσδιορίσουμε τους ελεύθερους αγνώστους.

Κεφάλαιο 4

Ορίζουσες

Οι ορίζουσες είναι η δεύτερη σημαντική έννοια της γραμμικής άλγεβρας που θα εξετάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, και θα δούμε πώς λύνουμε γραμμικά συστήματα με τη βοήθεια των οριζουσών. Προς το παρόν δεν θα δώσουμε τον αυστηρό ορισμό των οριζουσών, μας είναι αρκετό να γνωρίζουμε το εξής: Σε κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα, όπου $n \in \mathbb{N}$ αντιστοιχούμε, με κάποιον τρόπο που θα δούμε παρακάτω, έναν πραγματικό αριθμό που τον ονομάζουμε ορίζουσα του πίνακα. Έτσι, κάθε τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας έχει μια μοναδική ορίζουσα. Αν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας θα συμβολίζουμε με $|A|$ ή με $\det(A)$ την ορίζουσα του A .

Επίσης, αν A είναι ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και οι $a_{ij} \in \mathbb{R}$ για κάθε $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε θα συμβολίζουμε επίσης με

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

την ορίζουσα του A .

4.1 Υπολογισμός οριζουσών

Αν $a_{11} \in \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε ως ορίζουσα του 1×1 πίνακα (a_{11}) τον αριθμό a_{11} . Δηλαδή,

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

Αν ο A είναι ένας 2×2 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R},$$

τότε ορίζουμε την ορίζουσα του A να είναι ο αριθμός:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Η ορίζουσα ενός πίνακα 3×3 υπολογίζεται με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι ο **κανόνας του Sarrus**. Έστω ο 3×3 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Με τον κανόνα αυτό γράφουμε τα στοιχεία του πίνακα χωρίς τις δύο παρενθέσεις και μετά την τρίτη στήλη του A ξαναγράφουμε τις δύο πρώτες στήλες του A , όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

$$\begin{array}{ccccccc} & + & & + & & + & \\ a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & a_{12} \\ & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & a_{22} \\ & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & a_{32} \\ & - & & - & & - & & \end{array}$$

Παίρνουμε τώρα τα γινόμενα της κυρίας διαγωνίου και των δύο παραλλήλων με αυτήν με θετικό πρόσημο, και μετά τα γινόμενα των διαγωνίων, που σημειώνονται με διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα, με αρνητικό πρόσημο. Έτσι,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Υπάρχει ένας γενικός τρόπος υπολογισμού της ορίζουσας ενός πίνακα $n \times n$, με την προϋπόθεση ότι γνωρίζουμε να υπολογίζουμε τις ορίζουσες πινάκων $(n-1) \times (n-1)$. Ο τρόπος αυτός αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως **ανάπτυγμα κατά Laplace**.

Ας τον περιγράψουμε πρώτα στη γενική του μορφή. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Θα μας χρειαστούν πρώτα κάποιοι ορισμοί. Έστω ο πίνακας $A = (a_{ij})$, όπου $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ονομάζουμε **ελάσσονα ορίζουσα** (minor) του στοιχείου a_{ij} την ορίζουσα του $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i -γραμμή και την j -στήλη του A . Τη συμβολίζουμε με M_{ij} . Τον αριθμό $(-1)^{i+j} M_{ij}$ τον συμβολίζουμε με A_{ij} και τον ονομάζουμε **συντελεστή** ή **συμπαραγόντα** (cofactor) του a_{ij} . Τότε, ισχύει ότι

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad (4.1)$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Η έκφραση της ορίζουσας του A στη μορφή (4.1) λέγεται «ανάπτυγμα της ορίζουσας $|A|$ κατά τα στοιχεία της i -γραμμής του A ». Όπως βλέπουμε στην (4.1) υπάρχουν n διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να εκφράσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα κατά τα στοιχεία της i -γραμμής του.

Ακόμα ισχύει ότι:

$$|A| = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \dots + a_{ni}A_{ni}, \quad (4.2)$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Το ανάπτυγμα (4.2) λέγεται «ανάπτυγμα της ορίζουσας $|A|$ κατά τα στοιχεία της i -στήλης του A ». Έτσι, υπάρχουν n διαφορετικά αναπτύγματα της $|A|$ κατά τα στοιχεία της i -στήλης του A .

Τα πρόσημα (+ ή -) των συντελεστών A_{ij} των στοιχείων a_{ij} του πίνακα A ακολουθούν το μοτίβο της σκακιέρας

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Τα πρόσημα «+» και «-» πηγαίνουν εναλλάξ από κάθε στοιχείο στο γειτονικό του και ξεκινούν πάντα με «+» από το σημείο a_{11} .

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω στους πίνακες 3×3 . Έστω λοιπόν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}$ για κάθε $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Με βάση τους προηγούμενους ορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \quad \text{και} \quad A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}. \\
 M_{12} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} \quad \text{και} \quad A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}. \\
 M_{13} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \quad \text{και} \quad A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}. \\
 M_{21} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} \quad \text{και} \quad A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}. \\
 M_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \quad \text{και} \quad A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = M_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}. \\
 M_{23} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} \quad \text{και} \quad A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23} = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}. \\
 M_{31} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \quad \text{και} \quad A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = M_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}. \\
 M_{32} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \quad \text{και} \quad A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -M_{32} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}. \\
 M_{33} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{και} \quad A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = M_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.
 \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
 |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\
 &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
 \end{aligned}$$

Εντελώς ανάλογα υπολογίζεται η ορίζουσα και με τα άλλα αναπτύγματα. Ας δούμε άλλο ένα, π.χ., το ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της δεύτερης στήλης:

$$\begin{aligned}
 |A| &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\
 &= a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) \\
 &= a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} + a_{32}a_{13}a_{21} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23}.
 \end{aligned}$$

Αφού λοιπόν έχουμε υπολογίσει την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα, μπορούμε να υπολογίζουμε την ορίζουσα ενός 4×4 πίνακα από τα αναπτύγματα κατά Laplace είτε κατά γραμμές ή κατά στήλες, όπως κάναμε προηγουμένως.

Προχωρώντας έτσι επαγωγικά μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα $(n + 1) \times (n + 1)$, και ο υπολογισμός αυτός απαιτεί τον υπολογισμό $n + 1$ το πλήθος οριζουσών πινάκων $n \times n$. Αυτό επιτυγχάνεται με τους ίδιους τύπους (4.1) και (4.2) των αναπτυγμάτων κατά Laplace. Έτσι, τελικά μπορούμε να υπολογίσουμε κάθε ορίζουσα. Ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού των οριζουσών ενδείκνυται κυρίως για τον υπολογισμό οριζουσών 3×3 και για τον λόγο αυτό τον περιγράψαμε αναλυτικά. Για ορίζουσες 4×4 και περισσότερο (δηλαδή $n \times n$ με $n \geq 4$) ο προηγούμενος τρόπος είναι στην πράξη ασύμφορος και χρησιμοποιείται σπάνια λόγω του μεγάλου αριθμού πράξεων που απαιτεί.

Ο τρόπος υπολογισμού οριζουσών μέσω αναπτυγμάτων Laplace χρησιμοποιείται για δύο κυρίως λόγους:

- (α) Σε θεωρητικά θέματα όπου η ορίζουσα παρουσιάζεται ως ένα συγκεκριμένο άθροισμα οριζουσών μικρότερης τάξης.
- (β) Όταν ο πίνακας του οποίου την ορίζουσα θέλουμε να υπολογίσουμε έχει πολλά μηδενικά,* οπότε τότε πολλές από τις ορίζουσες υπολογίζονται εύκολα.

Γενικά, για ορίζουσες τάξης 4 και πάνω, συνήθως ο υπολογισμός των οριζουσών απλοποιείται σημαντικά χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών. Στην επόμενη παράγραφο παραθέτουμε τις ιδιότητες των οριζουσών και παραδείγματα για το πώς υπολογίζουμε ορίζουσες με αυτές τις ιδιότητες.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα παράδειγμα υπολογισμού μιας ορίζουσας τρίτης τάξης με χρήση των αθροισμάτων Laplace.

Παράδειγμα. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής έχουμε

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot A_{11} + (-1) \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) + 1 \cdot (0 \cdot 2 - 0 \cdot 3) + 2 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = 2 - 6 = -4. \end{aligned}$$

Φυσικά, εδώ επειδή ο πίνακάς μας έχει 2 μηδενικά στην 2η γραμμή μας συμφέρει να αναπτύξουμε ως προς τα στοιχεία της 2ης γραμμής. Δηλαδή

$$|A| = 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 2 - 6 = -4.$$

*Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται αραιός.

4.2 Ιδιότητες των οριζουσών

Πρόταση 4.2.1. Για την ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Αν μια γραμμή (ή μια στήλη) ενός πίνακα είναι μηδενική, τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν.
2. Αν δύο γραμμές (ή στήλες) ενός πίνακα είναι ίσες, τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν.
3. Αν εναλλάξουμε δύο γραμμές (ή στήλες) ενός πίνακα, τότε η ορίζουσά του αλλάζει πρόσημο.
4. Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή (ή μια στήλη) ενός πίνακα με έναν αριθμό λ , τότε η ορίζουσά του πολλαπλασιάζεται επί λ .
5. Αν προσθέσουμε σε μιά γραμμή ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής, τότε η ορίζουσα δεν αλλάζει. (Το ίδιο ισχύει και για στήλες.)

6. Έστω $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i + r'_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ να είναι ένας πίνακας με γραμμές τις r_j για $j = 1, 2, \dots, n$ με $j \neq i$ και i -οστή γραμμή την $r_i + r'_i$, όπου r_i, r'_i είναι δύο γραμμές. Τότε

$$|A| = |A_1| + |A_2|, \quad \text{όπου} \quad A_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A_2 = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r'_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

7. Αν μια γραμμή (ή μια στήλη) ενός πίνακα είναι πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής του (ή στήλης του αντίστοιχα), τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν.

Για τον υπολογισμό των οριζουσών με βάση τις ιδιότητές τους θα βασιστούμε στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.2.2. Η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Ας το δούμε κατ' αρχήν με άμεσο υπολογισμό για πίνακες 2×2 και 3×3 .

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$. Τότε από τον ορισμό της ορίζουσας ενός 2×2 πίνακα παίρνουμε $|A| = a_{11}a_{22} - 0 \cdot a_{12} = a_{11}a_{22}$, και το αποτέλεσμα ισχύει.

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης (μας συμφέρει γιατί έχει μηδενικά) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - 0 \cdot a_{23}) = a_{11}a_{22}a_{33}, \end{aligned}$$

και το αποτέλεσμα ισχύει και για ορίζουσες τρίτης τάξης.

Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για ορίζουσες τάξης k (δηλαδή $k \times k$) για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$. Θα αποδείξουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει και για ορίζουσες τάξης $k+1$. Έστω λοιπόν ο $(k+1) \times (k+1)$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}.$$

Εδώ μας συμφέρει να υπολογίσουμε την ορίζουσα του A με ανάπτυγμα κατά Laplace ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης του A , επειδή υπάρχουν πολλά μηδενικά. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + 0 \cdot A_{21} + \dots + 0 \cdot A_{k+1,1} = a_{11}A_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} & a_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} a_{11}(a_{22}a_{33} \dots a_{k+1,k+1}) = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{k+1,k+1}, \end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα $(*)$ προέκυψε από το επαγωγικό βήμα επειδή η M_{11} είναι η ορίζουσα k τάξης του άνω τριγωνικού πίνακα που τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του είναι τα $a_{22}, a_{33}, \dots, a_{k+1,k+1}$.

Παρατηρήστε ότι στο αρχικό βήμα μας αρκούσε βέβαια μόνον ο υπολογισμός μιας 2×2 ορίζουσας ενός άνω τριγωνικού πίνακα για να αποδειχθεί με επαγωγή η πρόταση. Το κάναμε και για την 3×3 ώστε να δείτε πόσο εύκολα υπολογίζεται και αυτή απευθείας. $\square$

Παρατήρηση: Παρατηρήστε τις ιδιότητες των οριζουσών 3 και 5 στην Πρόταση 4.2.1. Οι δύο αυτές ιδιότητες αντιστοιχούν στις δύο στοιχειώδεις πράξεις γραμμών που κάνουμε σε

έναν πίνακα για να τον μετατρέψουμε σε κλιμακωτό. Εκμεταλλευόμενοι αυτές τις δύο ιδιότητες, σε συνδυασμό με την Πρόταση 4.2.2, συνάγουμε μια μέθοδο για τον υπολογισμό των οριζουσών. Συγκεκριμένα:

Βρίσκουμε έναν γραμμοϊσοδύναμο του A πίνακα A' , ο οποίος α) είναι άνω τριγωνικός και β) είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A .

Αυτό το πετυχαίνουμε με τις δύο στοιχειώδεις πράξεις γραμμών με τις οποίες κλιμακοποιούμε έναν πίνακα δηλαδή (i) την εναλλαγή δύο γραμμών του πίνακα, και (ii) την πρόσθεση σε μια γραμμή του πίνακα ενός πολλαπλασίου μιας άλλης γραμμής του πίνακα. Με τη διαδικασία της κλιμακοποίησης ενός πίνακα παίρνουμε έναν γραμμοϊσοδύναμό του κλιμακωτό. Όμως, ένας κλιμακωτός $n \times n$ πίνακας είναι και άνω τριγωνικός.

Έστω λοιπόν ότι μετά από τη διαδικασία της κλιμακοποίησης βρίσκουμε έναν πίνακα A' που είναι άνω τριγωνικός και γραμμοϊσοδύναμος με τον A . Τότε ισχύει ότι:

- 1) Είτε $|A| = |A'|$, και αυτό ισχύει ή αν δεν έχουμε κάνει καμμία εναλλαγή γραμμών κατά τη διαδικασία της κλιμακοποίησης του A ή αν έχουμε εκτελέσει συνολικά ένα άρτιο πλήθος εναλλαγών γραμμών.
- 2) Είτε $|A| = -|A'|$. Αυτό ισχύει αν κατά τη διαδικασία της κλιμακοποίησης του A έχουμε εκτελέσει συνολικά ένα περιττό πλήθος εναλλαγών γραμμών.

Η ορίζουσα $|A'|$ τώρα υπολογίζεται εύκολα από την Πρόταση 4.2.2 ως το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου. Έτσι όμως υπολογίζουμε και την ορίζουσα του A , αφού όπως είπαμε ισχύει ότι $|A| = |A'|$ ή $|A| = -|A'|$.

(Προσοχή! Το σύμβολο $|A|$ δεν είναι απόλυτη τιμή αλλά ορίζουσα και φυσικά μπορεί να είναι ένας αρνητικός αριθμός.)

Η παραπάνω μέθοδος θα γίνει κατανοητή στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 + (-2)r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + (-3)r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ r_3 \leftarrow r_3 + 8r_2 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'. \end{aligned}$$

Επειδή κατά τη διαδικασία της κλιμακοποίησης του A δεν έχουμε κάνει καμμία εναλλαγή γραμμών έπεται ότι $|A| = |A'|$. Όμως από την Πρόταση 4.2.2 έχουμε ότι $|A'| = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1$. Άρα καταλήγουμε ότι $|A| = -1$.

Παράδειγμα. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 + (-1)r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + (-2)r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + (-1)r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_3 \leftarrow r_3 + (-\frac{4}{3})r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 + (-2)r_2 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_4 \leftarrow r_4 + (-\frac{33}{14})r_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{45}{14} \end{pmatrix} = A'. \end{aligned}$$

Εφόσον δεν έγινε καμμία εναλλαγή γραμμών έπεται ότι $|A| = |A'|$. Από την Πρόταση 4.2.2 έχουμε ότι $|A'| = 1 \cdot 3 \cdot \frac{14}{3} \cdot \frac{45}{14} = 45$. Άρα καταλήγουμε ότι $|A| = 45$.

Εκτός από τον αριθμητικό υπολογισμό ορίζουσών οι ιδιότητες των ορίζουσών μας βοηθούν να υπολογίσουμε με θεωρητικό τρόπο κάποιες ορίζουσες όπως, για παράδειγμα, τη «διάσημη» ορίζουσα του Vandermonde, η οποία έχει πολλές εφαρμογές στα μαθηματικά. Ας δούμε μια ειδική μορφή αυτής της ορίζουσας.

Εφαρμογή (Ορίζουσες Vandermonde). Να υπολογιστούν οι ορίζουσες:

$$V_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}, \quad V_2 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix},$$

όπου $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$.

Αν κάποιοι από τους αριθμούς a_i , $i = 1, 2, 3, 4$, είναι ίσοι, για παράδειγμα, $a_1 = a_2$, τότε η ορίζουσα θα έχει δύο γραμμές ίσες και άρα από την ιδιότητα 2 της Πρότασης 4.2.1 θα είναι ίση με μηδέν. Υποθέτουμε τώρα ότι οι αριθμοί a_1, a_2, a_3, a_4 είναι όλοι διάφοροι μεταξύ τους.

Θα υπολογίσουμε πρώτα την ορίζουσα

$$V_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

Αν αφαιρέσουμε από τις γραμμές 2 και 3 την πρώτη, τότε (από την ιδιότητα 5 της Πρότασης 4.2.1) έχουμε:

$$V_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας κατά Laplace τώρα την παραπάνω ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης έχουμε:

$$\begin{aligned} V_1 &= 1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3^2 - a_1^2) - (a_3 - a_1)(a_2^2 - a_1^2) \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 + a_1) - (a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a_2 + a_1) \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2 - a_1) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \\ &= (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1). \end{aligned}$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την ορίζουσα V_2 . Αφαιρούμε από τις γραμμές 2, 3 και 4 την πρώτη, οπότε παίρνουμε:

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & a_2^3 - a_1^3 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 & a_3^3 - a_1^3 \\ 0 & a_4 - a_1 & a_4^2 - a_1^2 & a_4^3 - a_1^3 \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσουμε τώρα κατά Laplace την παραπάνω ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} V_2 &= 1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & a_2^3 - a_1^3 \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 & a_3^3 - a_1^3 \\ a_4 - a_1 & a_4^2 - a_1^2 & a_4^3 - a_1^3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) & (a_2 - a_1)(a_2^2 + a_2a_1 + a_1^2) \\ a_3 - a_1 & (a_3 - a_1)(a_3 + a_1) & (a_3 - a_1)(a_3^2 + a_3a_1 + a_1^2) \\ a_4 - a_1 & (a_4 - a_1)(a_4 + a_1) & (a_4 - a_1)(a_4^2 + a_4a_1 + a_1^2) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Στην παραπάνω ορίζουσα, ο παράγοντας $(a_2 - a_1)$ πολλαπλασιάζει την πρώτη γραμμή, ο παράγοντας $(a_3 - a_1)$ πολλαπλασιάζει τη δεύτερη γραμμή, και ο παράγοντας $(a_4 - a_1)$ πολλαπλασιάζει την τρίτη γραμμή. Έτσι, βάσει της ιδιότητας 4 της Πρότασης 4.2.1, έχουμε ότι

$$V_2 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)V_3,$$

όπου

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2 \\ 1 & a_3 + a_1 & a_1^2 + a_1a_3 + a_3^2 \\ 1 & a_4 + a_1 & a_1^2 + a_1a_4 + a_4^2 \end{vmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τώρα την ορίζουσα V_3 .

Αφαιρούμε από τις γραμμές 2 και 3 την πρώτη, οπότε παίρνουμε:

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2 \\ 0 & a_3 - a_2 & a_3^2 + a_1a_3 - a_2^2 - a_1a_2 \\ 0 & a_4 - a_2 & a_4^2 + a_1a_4 - a_2^2 - a_1a_2 \end{vmatrix}.$$

Έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} a_3^2 + a_1a_3 - a_2^2 - a_1a_2 &= a_3^2 - a_2^2 + a_1(a_3 - a_2) = (a_3 - a_2)(a_3 + a_2) + a_1(a_3 - a_2) \\ &= (a_3 - a_2)(a_1 + a_2 + a_3). \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} a_4^2 + a_1a_4 - a_2^2 - a_1a_2 &= a_4^2 - a_2^2 + a_1(a_4 - a_2) = (a_4 - a_2)(a_4 + a_2) + a_1(a_4 - a_2) \\ &= (a_4 - a_2)(a_1 + a_2 + a_4). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Αντικαθιστούμε τις (4.3) και (4.4) στην V_3 και παίρνουμε:

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2 \\ 0 & a_3 - a_2 & (a_3 - a_2)(a_1 + a_2 + a_3) \\ 0 & a_4 - a_2 & (a_4 - a_2)(a_1 + a_2 + a_4) \end{vmatrix}.$$

Στην ορίζουσα αυτή ο αριθμός $(a_3 - a_2)$ βγαίνει κοινός παράγοντας από τη δεύτερη γραμμή και ο αριθμός $(a_4 - a_2)$ από την τρίτη γραμμή, άρα

$$V_3 = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2)V_4,$$

όπου

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2 \\ 0 & 1 & a_1 + a_2 + a_3 \\ 0 & 1 & a_1 + a_2 + a_4 \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσουμε τώρα τη V_4 κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης και έχουμε:

$$V_4 = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 + a_2 + a_3 \\ 1 & a_1 + a_2 + a_4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (a_1 + a_2 + a_4) - 1 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) = a_4 - a_3.$$

Άρα $V_4 = a_4 - a_3$. Επομένως,

$$V_3 = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2)V_4 = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3).$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} V_2 &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)V_3 \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3). \end{aligned}$$

Είδαμε επομένως ότι για να υπολογίσουμε την ορίζουσα V_2 εφαρμόσαμε συνδυασμό της μεθόδου των αθροισμάτων Laplace και τις ιδιότητες των οριζουσών. Γενικά, δηλαδή, μπορούμε να εφαρμόζουμε και τις δύο μεθόδους μαζί.

Η επόμενη ιδιότητα προκύπτει εύκολα με τις ιδιότητες των οριζουσών.

Πόρισμα 4.2.3. Έστω A να είναι ένας $n \times n$ πίνακας, $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει:

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|.$$

Απόδειξη. Εδώ χρησιμοποιούμε επαναληπτικά n -φορές την ιδιότητα 4 της Πρότασης 4.2.1, δηλαδή ότι αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή (ή μια στήλη) ενός πίνακα με έναν πραγματικό αριθμό λ , τότε η ορίζουσά του πολλαπλασιάζεται επί λ . Έστω ότι:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε επαναληπτικά n -φορές την προηγούμενη ιδιότητα και έχουμε:

$$\begin{aligned} |\lambda A| &= \left| \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} \right| \\ &= \lambda \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} \right| \\ &= \underbrace{\dots}_{n \text{ φορές}} = \lambda^n \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \lambda^n |A|. \end{aligned}$$

□

Τελειώνουμε αυτήν την παράγραφο με μια ακόμα βασική ιδιότητα των οριζουσών.

Πρόταση 4.2.4. Έστω A, B να είναι δύο $n \times n$ πίνακες. Τότε ισχύει:

$$|AB| = |A| |B|.$$

Άλλες ιδιότητες των οριζουσών θα δούμε σε επόμενες παραγράφους.

4.3 Σχέση τάξης πίνακα και ορίζουσας

Έστω A να είναι ένας $n \times n$ πίνακας. Ονομάζουμε «τάξη» της ορίζουσας $|A|$ του πίνακα A τον αριθμό n .

Προσοχή! Δεν ονομάζουμε τάξη της $|A|$ την τάξη του πίνακα A . Θα δούμε ότι οι δύο αυτοί αριθμοί είναι ίσοι μόνον εάν ο A είναι αντιστρέψιμος. Ας πάρουμε τώρα τυχόν $m \times n$ πίνακα A (όχι απαραίτητα $n \times n$), για $m, n \in \mathbb{N}$. Ας επιλέξουμε $k \leq \min\{m, n\}$ από τις m γραμμές του A . Από αυτές τις k γραμμές του A δημιουργούμε έναν $k \times n$ πίνακα B αν τις τοποθετήσουμε με την ίδια σειρά όπως είναι στον A , δηλαδή αν η r_{i_1} γραμμή του A είναι η r_{j_1} γραμμή του B και αν η r_{i_2} γραμμή του A είναι η r_{j_2} γραμμή του B , και ισχύει $i_1 < i_2$, τότε ισχύει και ότι $j_1 < j_2$.

Μετά από τις n στήλες του B επιλέγουμε k από αυτές και δημιουργούμε έναν $k \times k$ πίνακα C , τοποθετώντας τις στήλες στον C με τη σειρά που είναι στον B .

Η ορίζουσα $|C|$ του πίνακα C ονομάζεται «ελάσσονα ορίζουσα k τάξης του πίνακα A ».

Παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε τον 6×8 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 9 & 5 & 3 & 0 & 8 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 0 & 7 & 11 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -5 & -8 & 6 & 2 & 1 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Αν επιλέξουμε τις γραμμές: 2, 4, 5, 6 του πίνακα A παίρνουμε τον πίνακα B , όπου:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 & 3 & 0 & 8 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -5 & -8 & 6 & 2 & 1 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Αν από τις στήλες του B επιλέξουμε τις 2, 4, 6, 8, παίρνουμε τον πίνακα C :

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 8 & 2 \\ -3 & -8 & 2 & 4 \\ 14 & 16 & 18 & 20 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ο C τώρα είναι ένας τετραγωνικός 4×4 πίνακας. Την ορίζουσά του, δηλαδή την $|C|$, την ονομάζουμε «ελάσσονα ορίζουσα τέταρτης τάξης του πίνακα A ».

Γενικά, αποδεικνύεται ότι για έναν πίνακα $m \times n$ υπάρχουν $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$ ελάσσονες ορίζουσες n τάξης, όπου ως συνήθως συμβολίζουμε με $\binom{n}{k}$ τον διωνυμικό συντελεστή

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{για κάθε } k = 0, 1, \dots, n,$$

όπου $0! = 1$, $1! = 1$ και $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$.

Για τις ελάσσονες ορίζουσες τυχόντος πίνακα ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.3.1. *Εαν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες $r+1$ τάξεως ενός πίνακα είναι μηδέν, τότε όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξεως μεγαλύτερης του r είναι μηδέν.*

Με βάση την έννοια των ελασσονών οριζουσών ενός πίνακα υπάρχει μια πρόταση που χαρακτηρίζει την τάξη τυχαίου $m \times n$ πίνακα.

Πρόταση 4.3.2. *Δίνεται ο $m \times n$ πίνακας A . Τότε $r(A) = k$ εαν και μόνον εαν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξεως $k+1$ του A είναι μηδέν, ενώ υπάρχει τουλάχιστον μία ελάσσονα ορίζουσα τάξεως k διάφορη του μηδενός.*

Η Πρόταση 4.3.2 αποκτά πρακτική χρησιμότητα εαν $m \leq 4$ ή $n \leq 4$, δηλαδή τουλάχιστον ένα από τα m, n να είναι αρκετά μικρό, οπότε έχουμε να υπολογίσουμε ορίζουσες το πολύ τέταρτης τάξης. Επίσης έχει έννοια να εφαρμοστεί εαν ο ένας από τους δύο αριθμούς είναι πολύ μεγαλύτερος από τον άλλον.

Παράδειγμα. Να βρεθεί η τάξη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Λύση. Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα $|A|$, ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής κατά Laplace

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0. \end{aligned}$$

Ακόμα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3 \neq 0.$$

Έτσι υπάρχει μια ορίζουσα τάξης 2, η $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$, (η οποία βεβαίως είναι ελάχιστο) που είναι μη μηδενική, ενώ η μοναδική ορίζουσα τρίτης τάξης είναι η ορίζουσα του πίνακα και είναι μηδενική. Άρα, από την Πρόταση 4.3.2, η τάξη του πίνακα A είναι ίση με 2.

Παράδειγμα. Να βρεθεί η τάξη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Λύση. Αρχικά κλιμακοποιούμε τον πίνακα A και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 - 5r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 9r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 13r_1 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_2 \leftarrow -\frac{1}{4}r_2 \\ r_3 \leftarrow -\frac{1}{8}r_3 \\ r_4 \leftarrow -\frac{1}{12}r_4 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_3 \leftarrow r_3 - r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_2 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

Εδώ οποιαδήποτε ελάχιστο ορίζουσα τρίτης τάξης του πίνακα B και να πάρουμε θα έχει ως τρίτη γραμμή την μηδενική και άρα από τις ιδιότητες των οριζουσών θα είναι ίση με μηδέν.

Εξ' άλλου, η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = -4 \neq 0$. Έτσι από την Πρόταση 4.3.2, η τάξη του πίνακα A είναι ίση με 2.

Παρατηρήστε ότι ο πίνακας B είναι κλιμακωτός και έτσι βλέπουμε άμεσα ότι έχει τάξη 2, αφού έχει δύο μη μηδενικές γραμμές.

Παρατήρηση. Στο πρώτο παράδειγμα εφαρμόσαμε πραγματικά την Πρόταση 4.3.2, αφού δεν κάναμε κλιμακοποίηση, ενώ στο δεύτερο από την κλιμακοποίηση του πίνακα «φάνηκε» εύκολα η τάξη του και άρα στην ουσία δεν χρειαζόταν να εφαρμόσουμε την Πρόταση 4.3.2.

Μια άλλη εφαρμογή των ελασσορών οριζουσών ενός πίνακα θα δούμε στη συνέχεια στην επίλυση γραμμικών συστημάτων μέσω οριζουσών.

4.4 Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια των οριζουσών. Η μέθοδος του Cramer

Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (4.5)$$

όπου υποθέτουμε ότι οι $a_{ij}, b_i, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, είναι όλοι πραγματικοί αριθμοί. Η ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

του πίνακα του συστήματος ονομάζεται «ορίζουσα του συστήματος (4.5)».

Αν στην ορίζουσα D αντικαταστήσουμε την i -οστή στήλη της, δηλαδή την $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ με τη

στήλη $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ των σταθερών όρων, ενώ διατηρήσουμε τις υπόλοιπες όπως είναι, τότε προκύπτει η ορίζουσα

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \overset{i\text{-στήλη}}{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Εννοείται ότι εάν π.χ., $i = 1$, τότε θα αντικατασταθεί μόνον η πρώτη στήλη, αν $i = 2$, τότε θα αντικατασταθεί μόνον η δεύτερη στήλη, κ.ο.κ., από τη στήλη των σταθερών όρων.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σύστημα (4.5) έχει λύσεις (μία ή περισσότερες). Έστω $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ να είναι μια λύση του (4.5). Τότε ισχύει η:

Πρόταση 4.4.1. Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς, αν το σύστημα (4.5) έχει μια λύση, την $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, τότε ισχύει: $D_i = \xi_i D$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς, έχουμε τώρα το ακόλουθο σπουδαίο θεώρημα (κανόνας του Cramer):

Θεώρημα 4.4.2 (Κανόνας του Cramer). Θεωρούμε το $n \times n$ γραμμικό σύστημα (4.5). Υποθέτουμε ότι $D \neq 0$. Τότε το σύστημα (4.5) έχει μοναδική λύση τη n -άδα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, όπου

$$\xi_i = \frac{D_i}{D}, \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \dots, n.$$

Παράδειγμα. Να λυθεί με τον κανόνα του Cramer το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 \quad \quad + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}.$$

Έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

και επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση. Επιπλέον, υπολογίζουμε τις υπόλοιπες ορίζουσες:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -20, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 18, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 12.$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος δίνεται από τους τύπους:

$$\xi_1 = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{-20}{-2} = 10, \quad \xi_2 = \frac{|D_2|}{|D|} = \frac{18}{-2} = -9, \quad \xi_3 = \frac{|D_3|}{|D|} = \frac{12}{-2} = -6,$$

δηλαδή είναι η τριάδα $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (10, -9, -6)$.

Παρατήρηση. Ο κανόνας του Cramer δεν χρησιμοποιείται συνήθως για τη λύση συστημάτων $n \times n$, εκτός από τις απλές περιπτώσεις για $n = 2$ και $n = 3$, και αυτό γιατί όπως έχουμε ήδη πει, ο υπολογισμός οριζουσών για $n \geq 4$ απαιτεί αρκετές πράξεις (ακόμα και με τις ιδιότητες των οριζουσών). Ο κανόνας του Cramer έχει όμως σημαντικές εφαρμογές σε θεωρητικού τύπου θέματα, επειδή μας δίνει έναν τύπο για τη λύση γραμμικών συστημάτων. Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι η εφαρμογή του στην απόδειξη των θεωρημάτων αντίστροφής απεικόνισης και πεπλεγμένων συναρτήσεων στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Ας δούμε τώρα άλλη μια εφαρμογή του κανόνα του Cramer.

Παράδειγμα. Να μελετηθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}.$$

Λύση. Η ορίζουσα του συστήματος είναι η

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Υπολογίζουμε την D . Έχουμε

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \leftarrow r_2 + (-1)r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + (-\lambda)r_1}} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} \\ &= -((\lambda - 1)(1 - \lambda^2) - (1 - \lambda)^2) = (1 - \lambda)(1 - \lambda^2) + (1 - \lambda)^2 \\ &= (1 - \lambda)(1 - \lambda)(1 + \lambda) + (1 - \lambda)^2 = (1 - \lambda)^2(1 + \lambda) + (1 - \lambda)^2 \\ &= (1 - \lambda)^2(1 + \lambda + 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε επίσης τις ορίζουσες D_1 , D_2 και D_3 . Έχουμε

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 + (-\lambda)r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + (-\lambda^2)r_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1-\lambda^2 & \lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} \\ = -(1-\lambda^2)(1-\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_3 \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 + (-1)r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + (-\lambda)r_1 \end{array} \\ = - \begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda - \lambda^2 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda^3 & 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \lambda - \lambda^2 & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda^3 & 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} \\ = - \left((\lambda - \lambda^2)(1 - \lambda^2) - (1 - \lambda)(1 - \lambda^3) \right) \\ = - \left(\lambda(1 - \lambda)(1 - \lambda)(1 + \lambda) - (1 - \lambda)(1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2) \right) \\ = -(1 - \lambda)^2(\lambda + \lambda^2 - 1 - \lambda - \lambda^2) = (\lambda - 1)^2.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_3 \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 + (-1)r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + (-\lambda)r_1 \end{array} \\ = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda - \lambda^2 \\ 1 - \lambda & 1 - \lambda^3 \end{vmatrix} \\ = - \left((\lambda - 1)(1 - \lambda^3) - (\lambda - \lambda^2)(1 - \lambda) \right) \\ = - \left((\lambda - 1)(1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2) - \lambda(1 - \lambda)(1 - \lambda) \right) \\ = (1 - \lambda)^2(1 + \lambda + \lambda^2) + \lambda(1 - \lambda)^2 \\ = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

Αν $D \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq -2$ και $\lambda \neq 1$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ,

όπου

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{-(1+\lambda)(1-\lambda)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = -\frac{\lambda+1}{(\lambda+2)}, \\ \xi_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{1}{(\lambda+2)}, \\ \xi_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{(\lambda+1)^2}{(\lambda+2)}.\end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda = -2$. Τότε το αρχικό σύστημα γίνεται ως εξής:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}.$$

Τότε

$$D_1 = -(-2-1)^2(-2+1) = 9 \neq 0.$$

Επειδή $D_1 = -9 \neq 0$ και $D = 0$ το σύστημα δεν έχει λύση, γιατί αν υπήρχε λύση (ξ_1, ξ_2, ξ_3) σύμφωνα με την Πρόταση 4.4.1 θα ισχύει: $\xi_1 D = D_1$, άτοπο αφού $D = 0$ και $D_1 \neq 0$.

Τέλος, αν $\lambda = 1$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

δηλαδή το σύστημα ισοδυναμεί με την εξίσωση $x + y + z = 1$ και προφανώς τότε το σύστημα έχει τις άπειρες λύσεις:

$$(1 - y - z, y, z) \quad \text{για όλα τα } y, z \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήσεις στον κανόνα του Cramer. Ο κανόνας του Cramer μας πληροφορεί για τη μοναδική λύση ενός γραμμικού συστήματος $n \times n$ ειδικά (και όχι ενός αυθαίρετου συστήματος $m \times n$) μόνο στην περίπτωση όπου $D \neq 0$. Δεν μας λέει τι γίνεται όταν $D = 0$.

Για την περίπτωση όπου $D = 0$ σε ένα γραμμικό σύστημα $n \times n$ πρέπει να παρατηρήσουμε τα εξής:

- (i) Αν κάποια από τις ορίζουσες D_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι διάφορη του μηδενός, τότε το σύστημα είναι αδύνατο. (Άμεσο από την Πρόταση 4.4.1.)

- (ii) Έστω τώρα ότι ισχύει: $D = D_i = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε υπάρχουν περιπτώσεις όπου το σύστημα έχει λύση, όπως είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα εφαρμογής του κανόνα του Cramer. Δηλαδή έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

Στο σύστημα αυτό έχουμε $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ και το σύστημα αυτό είναι συμβιβαστό και μάλιστα, όπως είδαμε, έχει άπειρες λύσεις.

Συνεπώς στην περίπτωση που για το σύστημα ισχύει: $D = D_i = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, και αυτό έχει λύση, τότε είναι αδύνατο.

- (iii) Υπάρχουν περιπτώσεις όπου ισχύει $D = D_i = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, για ένα γραμμικό σύστημα $n \times n$ και αυτό είναι αδύνατο.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το γραμμικό 3×3 σύστημα:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \end{cases},$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ (αφού η τελευταία γραμμή των οριζουσών D, D_1, D_2, D_3 είναι μηδενική). Όμως το σύστημα είναι αδύνατο, αφού η δεύτερη εξίσωσή του δεν μπορεί να ικανοποιηθεί.

Παρόμοια, το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases},$$

έχει $D = D_1 = D_2 = 0$, ενώ βέβαια είναι αδύνατο αφού η πρώτη εξίσωσή του δεν μπορεί να ικανοποιηθεί.

Για την επόμενη παρατήρηση σχετικά με τον κανόνα του Cramer θα μας χρειαστεί ο ορισμός του ομογενούς συστήματος.

Ορισμός 4.4.3. Ένα γραμμικό $m \times n$ σύστημα ονομάζεται ομογενές εαν η στήλη b των σταθερών όρων του είναι η μηδενική.

Είναι προφανές ότι ένα ομογενές σύστημα είναι πάντοτε συμβιβαστό αφού έχει ως λύση την μηδενική. Ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.4.4. Ένα τετραγωνικό ομογενές σύστημα έχει μη μηδενική λύση αν και μόνον αν $D = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα είναι αόριστο.

Επιπλέον, ισχύει και η ακόλουθη πρόταση για ένα ομογενές σύστημα.

Πρόταση 4.4.5. Ένα ομογενές $m \times n$ γραμμικό σύστημα με $m < n$ είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρο πλήθος λύσεων. (Αυτό βεβαίως δεν ισχύει πάντα αν $m = n$ ή $m > n$.)

Σχόλια: Όπως είδαμε προηγούμενα ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να λυθεί επίσης με τη βοήθεια των οριζουσών και χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer. Επίσης και η τάξη ενός πίνακα υπολογίζεται με τη βοήθεια των οριζουσών. Όμως, επειδή ο υπολογισμός των οριζουσών (είτε με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των οριζουσών είτε με τα αθροίσματα Laplace) είναι χρονοβόρος, γενικά δεν λύνουμε τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών αλλά με τους γραμμοϊσοδύναμους πίνακες, όπως στα παραδείγματα που έχουμε δει. Οι ορίζουσες χρησιμοποιούνται για θεωρητικού τύπου θέματα συνήθως, καθώς και για να απαντήσουμε σε άλλου είδους ερωτήματα, όπως το να διερευνήσουμε ένα σύστημα, το οποίο δίδεται με παραμέτρους, ή να προσδιορίσουμε ένα συγκεκριμένο είδος από τις λύσεις ενός αόριστου συστήματος οι οποίες ικανοποιούν κάποιες ειδικές ιδιότητες. Εμείς εδώ δεν θα επεκταθούμε σε τέτοια θέματα λόγω του εισαγωγικού χαρακτήρα αυτού του μαθήματος.

Για το τέλος αυτού του κεφαλαίου αφήσαμε μια σημαντική κατηγορία πινάκων, τους αντίστροφους πίνακες. Στην επόμενη παράγραφο εισάγουμε τους αντίστροφους πίνακες, δίνουμε δύο διαφορετικούς τρόπους εύρεσης αντίστροφων πινάκων, έναν θεωρητικό και έναν υπολογιστικό (με τον υπολογιστικό να ενδείκνυται για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός αντιστρέψιμου πίνακα και τον θεωρητικό να χρησιμοποιείται για θεωρητικού τύπου θέματα κυρίως). Δίνουμε επίσης έναν τρόπο λύσης γραμμικών συστημάτων $n \times n$ με μη μηδενική ορίζουσα με τη βοήθεια των αντίστροφων πινάκων (ο οποίος έχει μάλλον θεωρητική κυρίως αξία), διαφορετικό από τους δύο προηγούμενους με τους γραμμοϊσοδύναμους πίνακες και τις ορίζουσες.

4.5 Αντιστρέψιμοι πίνακες

Πριν ορίσουμε τους αντιστρέψιμους πίνακες ας ξαναθυμηθούμε τον ταυτοτικό (ή μοναδιαίο) πίνακα I_n που είδαμε στην Ενότητα 2.1, και είναι ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας που έχει τα διαγώνια στοιχεία του ίσα με 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του 0. Ο ταυτοτικός πίνακας έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα να είναι «το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού πινάκων».

Αυτό σημαίνει ότι ισχύει το εξής:

- (i) Για κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A ισχύει ότι:

$$AI_n = I_n A = A.$$

Επίσης ισχύει το εξής:

- (ii) Ο ταυτοτικός πίνακας I_n είναι ο μοναδικός πίνακας B , που είναι τετραγωνικός $n \times n$, και για τον οποίο ισχύει

$$AB = BA = A,$$

για κάθε τετραγωνικό πίνακα A .

Από την Πρόταση 4.2.2 έχουμε ότι η ορίζουσα $|I_n|$ του ταυτοτικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του, αφού ο ταυτοτικός πίνακας είναι και άνω τριγωνικός, και άρα ισχύει $|I_n| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Με βάση την έννοια του ταυτοτικού πίνακα ορίζουμε τώρα την έννοια του αντιστρόφου ενός τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα.

Ορισμός 4.5.1. Έστω A ένας μη μηδενικός, τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Ο A θα λέγεται **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει ένας πίνακας B τέτοιος ώστε

$$AB = BA = I_n.$$

Παρατηρήσεις.

- (i) Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας και είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει μοναδικός τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας B τέτοιος ώστε

$$AB = BA = I_n. \quad (4.6)$$

Ο μοναδικός αυτός πίνακας B για τον οποίο ισχύει η (4.6) ονομάζεται «ο αντίστροφος του A » και συμβολίζεται με A^{-1} .

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε από την (4.6) έπεται ότι και ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και ότι ισχύει: $(A^{-1})^{-1} = A$.

- (ii) Έστω A να είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας για τον οποίο υπάρχει ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας B ώστε να ισχύει

$$AB = I_n. \quad (4.7)$$

Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και ο πίνακας B είναι μοναδικός ώστε να ισχύει η (4.7) και $B = A^{-1}$.

(iii) Έστω A να είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας για τον οποίο υπάρχει ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας B ώστε να ισχύει

$$BA = I_n. \quad (4.8)$$

Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και ο πίνακας B είναι μοναδικός ώστε να ισχύει η (4.8) και $B = A^{-1}$.

Κλασσικό παράδειγμα αντιστρέψιμου $n \times n$ πίνακα αποτελεί ο ταυτοτικός πίνακας I_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού από τον ορισμό του ταυτοτικού πίνακα (αλλά και με άμεσο υπολογισμό) έπεται ότι $I_n I_n = I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω τώρα A να είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος. Αφού ο A είναι τετραγωνικός πίνακας έχει ορίζουσα. Από τον ορισμό του αντιστρέψιμου πίνακα A , έπεται ότι ισχύει:

$$AA^{-1} = I_n. \quad (4.9)$$

Από την (4.9) έπεται ότι

$$|AA^{-1}| = |I_n| = 1, \quad (4.10)$$

όπως είδαμε προηγούμενα. Αλλά από την Πρόταση 4.2.4 ισχύει ότι

$$|AA^{-1}| = |A| |A^{-1}|. \quad (4.11)$$

Από τις (4.10) και (4.11) έπεται ότι ισχύει:

$$|A| |A^{-1}| = 1. \quad (4.12)$$

Η ισότητα (4.12) μας πληροφορεί δύο πράγματα:

(i) Ισχύει ότι:

$$|A| \neq 0.$$

(ii) Ισχύει ότι:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Ισχύει όμως και το αντίστροφο της (i). Συγκεκριμένα ισχύει η ακόλουθη πρόταση η οποία αποτελεί ταυτόχρονα και ένα κριτήριο για το πότε ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Πρόταση 4.5.2. Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ισχύει ότι: $|A| \neq 0$.

Ένα ακόμη κριτήριο για το αν ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος μας παρέχει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.5.3. Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ισχύει: $r(A) = n$.

Σχόλιο: Ένας αντιστρέψιμος πίνακας ονομάζεται επίσης και «μη ιδιάζων», ενώ ένας πίνακας ο οποίος δεν είναι αντιστρέψιμος ονομάζεται «ιδιάζων» (singular στα αγγλικά).

Σκεφτείτε τώρα το εξής: Ξεφύγετε κάπως από την γραμμική άλγεβρα και ας πούμε ότι προσπαθήσετε να γράψετε στο χαρτί μερικούς τετραγωνικούς πίνακες κατά τυχαίο τρόπο στα γρήγορα. Είναι πολύ σπάνιο (με πιθανότητα 0 θα λέγαμε αυστηρά) να πετύχετε έναν singular πίνακα. Ο λόγος είναι ότι γράφοντας τυχαία νούμερα σε έναν πίνακα είναι σπάνιο να πετύχετε ο πίνακας να έχει ορίζουσα 0, αφού αυτό αποτελεί μια πολύ ειδική συνθήκη. Έτσι με βάση την Πρόταση 4.5.2 θα λέγαμε «άτυπα» ότι ένας συνηθισμένος τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Το αμέσως επόμενο που έχουμε να κάνουμε, αφού ορίσαμε τους αντιστρέψιμους πίνακες είναι να δούμε πώς βρίσκουμε τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} ενός αντιστρέψιμου πίνακα A . Από την Πρόταση 4.5.2 φαίνεται αμέσως ότι ο μοναδικός ιδιάζων 1×1 πίνακας είναι ο μηδενικός (0). Έτσι για κάθε $a \neq 0$, ο 1×1 πίνακας (a) είναι αντιστρέψιμος και είναι άμεσο από τους σχετικούς ορισμούς ότι ισχύει:

$$(a)^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right).$$

Έστω τώρα

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

να είναι ένας τετραγωνικός και αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας. Από την Πρόταση 4.5.2 έχουμε ότι: $|A| = ad - bc \neq 0$. Τότε αποδεικνύεται ότι ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} είναι ο:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Παράδειγμα. Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0.$$

Άρα από την Πρόταση 4.5.2 έπεται ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Έτσι από την (4.13) παίρνουμε:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Για την εύρεση του αντιστρόφου ενός αντιστρέψιμου $n \times n$ πίνακα για $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, απαιτείται περισσότερη εργασία. Για να δούμε πώς βρίσκουμε τον αντίστροφο θα χρειαστούμε πρώτα μερικούς ορισμούς.

Καταρχήν, ανακαλούμε τον Ορισμό 2.1.1 για τον ανάστροφο ενός πίνακα. Υπενθυμίζουμε ότι αν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, τότε ο ανάστροφος του A συμβολίζεται με A^T και είναι ένας $n \times m$ πίνακας που έχει ως γραμμές τις στήλες του A (και ως στήλες τις γραμμές του A). Είναι προφανές από τον ορισμό ότι ισχύει $(A^T)^T = A$, για κάθε πίνακα A .

Ορισμός 4.5.4. Έστω $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, να είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}$ για κάθε $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ο **συμπληρωματικός** ή **προσαρτημένος πίνακας** (adjoint matrix) του A , συμβολίζεται με $\text{adj}A$, και είναι ο πίνακας που έχει ως στοιχεία του τους συμπαραγόντες των στοιχείων του αναστρόφου A^T του A .

Αν δηλαδή $\text{adj}A = (b_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, τότε είναι $\text{adj}A = (A_{ij})^T$, $i, j = 1, \dots, n$, και $b_{ij} = A_{ji}$ για κάθε $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, όπου $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ είναι ο συμπαραγόντας που αντιστοιχεί στο στοιχείο a_{ij} και M_{ij} είναι η ελάσσονα ορίζουσα του A που προκύπτει αν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη του A . Έτσι αν A είναι ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

τότε

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ισχύει τώρα η εξής πρόταση που χαρακτηρίζει τον προσαρτημένο πίνακα κάθε τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα.

Πρόταση 4.5.5. Για κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A με $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ισχύει η ισότητα

$$A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = |A| I_n.$$

Μια εφαρμογή της Πρότασης 4.5.5 είναι η εξής: Αναζητούμε δύο μη μηδενικούς $n \times n$ πίνακες A και B ώστε να ισχύει:

$$AB = \mathbf{0}. \quad (4.14)$$

Καταρχήν, παρατηρούμε ότι οι υποψήφιοι πίνακες A, B ώστε να ισχύει η (4.14) θα πρέπει να είναι και οι δύο ιδιάζοντες (μη αντιστρέψιμοι). Πράγματι αν, π.χ., ο A ήταν αντιστρέψιμος και ισχυε η (4.14) θα είχαμε:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}\mathbf{0} \Rightarrow (A^{-1}A)B = \mathbf{0} \Rightarrow I_n B = \mathbf{0} \Rightarrow B = \mathbf{0},$$

άτοπο, αφού από την υπόθεση έχουμε ότι $B \neq \mathbf{0}$. Ας δώσουμε τώρα ένα απλό παράδειγμα για το πώς μπορούμε να βρούμε δύο μη μηδενικούς πίνακες που να ικανοποιούν την (4.14).

Παράδειγμα. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ο οποίος φυσικά είναι ιδιάζων. Τότε

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε από την Πρόταση 4.5.5, επειδή $|A| = 0$, αλλά και με άμεσο υπολογισμό, έχουμε ότι:

$$A(\operatorname{adj} A) = \mathbf{0},$$

ενώ βεβαίως ισχύει $A \neq \mathbf{0}$ και $\operatorname{adj} A \neq \mathbf{0}$.

Έτσι για κάθε ιδιάζοντα $n \times n$ πίνακα $A \neq \mathbf{0}$ με $\operatorname{adj} A \neq \mathbf{0}$, έχουμε ότι $A(\operatorname{adj} A) = \mathbf{0}$ λόγω της Πρότασης 4.5.5.

Για 2×2 πίνακες, ο μόνος πίνακας A για τον οποίο ισχύει $\operatorname{adj} A = \mathbf{0}$ είναι ο μηδενικός, ενώ για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\operatorname{adj} A = \mathbf{0} \Leftrightarrow r(A) \leq n - 2$. Επίσης, αν $r(A) = n - 1$, τότε $r(\operatorname{adj} A) = 1$ και άρα $\operatorname{adj} A \neq \mathbf{0}$.

Με τις παρατηρήσεις αυτές μπορούμε εύκολα να κατασκευάζουμε μη μηδενικούς $n \times n$ πίνακες A και B ώστε $AB = \mathbf{0}$. Για παράδειγμα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 3$ θεωρούμε έναν τυχαίο άνω τριγωνικό $n \times n$ πίνακα A του οποίου τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι όλα μη μηδενικά εκτός από το στοιχείο $a_{nn} = 0$. Τότε, προφανώς, $r(A) = n - 1$, επομένως $r(\operatorname{adj} A) = 1$ και άρα $\operatorname{adj} A \neq \mathbf{0}$. Επιπλέον, $|A| = 0$, άρα $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = \mathbf{0}$.

Σχόλιο: Το ότι για έναν $n \times n$ πίνακα A , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, ισχύει $\operatorname{adj} A = \mathbf{0} \Leftrightarrow r(A) \leq n - 2$, προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 4.3.2.

Επίσης, από την Πρόταση 4.5.5, ο $\text{adj}A$ είναι αντιστρέψιμος, και άρα $r(\text{adj}A) = n$, αν και μόνον αν ο A είναι αντιστρέψιμος. Τέλος, με απαγωγή σε άτοπο έπεται από τα προηγούμενα ότι για έναν μη αντιστρέψιμο πίνακα A ισχύει ότι $\text{adj}A \neq 0$ αν και μόνον αν $r(A) = n - 1$.

Από την Πρόταση 4.5.5 παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 4.5.6. Έστω A να είναι ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας. Τότε ο A^{-1} προσδιορίζεται από τον τύπο:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A. \quad (4.15)$$

Παρατήρηση. Ο τύπος (4.15) στο Πόρισμα 4.5.6 μας δίνει τον αντίστροφο κάθε αντιστρέψιμου πίνακα για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Άρα προφανώς ισχύει και για την περίπτωση $n = 2$ που έχουμε ήδη δει. Ο τύπος (4.15) όμως έχει ένα σημαντικό μειονέκτημα. Δεν ενδείκνυται για υπολογισμούς αφού για να βρούμε τον πίνακα $\text{adj}A$ πρέπει να υπολογίσουμε n^2 το πλήθος ορίζουσες τάξης $n - 1$ η καθεμία. Με δεδομένο τον χρονοβόρο υπολογισμό των ορίζουσών για $n \geq 5$ (πολλές φορές και για $n = 4$) ο τύπος (4.15) εφαρμόζεται πρακτικά μόνον για $n = 3$. Βεβαίως, τόσο η Πρόταση 4.5.5 όσο και το Πόρισμα 4.5.6 έχουν σημαντικές εφαρμογές σε θεωρητικά θέματα.

Ας δούμε τώρα μια εφαρμογή του τύπου (4.15) για την περίπτωση $n = 3$.

Παράδειγμα. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφό του.

Καταρχήν βρίσκουμε την ορίζουσα $|A|$ υπολογίζοντας το ανάπτυγμα κατά Laplace της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής και έχουμε:

$$\begin{aligned} |A| &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(-1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) + 2 \cdot (-1 \cdot 0 - 2 \cdot 3) = -8. \end{aligned}$$

Αφού $|A| = -8 \neq 0$ έπεται από την Πρόταση 4.5.2 ότι ο A αντιστρέφεται.

Επίσης, έχουμε από τους σχετικούς ορισμούς:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, & M_{12} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, & M_{13} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6, \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & M_{22} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, & M_{23} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3, \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & M_{32} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, & M_{33} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \operatorname{adj} A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Επομένως, από τον τύπο (4.15) του Πορίσματος 4.5.6 έχουμε ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Για να κάνουμε την επαλήθευση, εάν πράγματι έχουμε βρει τον αντίστροφο του A , απλώς κάνουμε τον υπολογισμό $A \cdot A^{-1}$ και πρέπει να βρούμε ότι το γινόμενο είναι ο I_3 . Τότε από την παρατήρηση (ii) στη σελίδα 77 επιβεβαιώνουμε ότι πράγματι έχουμε βρει τον αντίστροφο του A .

Ο τύπος του Πορίσματος 4.5.6 δεν ενδείκνυται για τον υπολογισμό του αντιστρόφου για $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$. Σε αυτές τις περιπτώσεις ακολουθούμε την εξής διαδικασία (που ουσιαστικά είναι η μέθοδος απαλοιφής του Gauss):

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

να είναι ένας τετραγωνικός πίνακας του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο, εάν βέβαια αυτός υπάρχει. Μπορούμε καταρχήν να ελέγξουμε αν ο A είναι αντιστρέψιμος

υπολογίζοντας την ορίζουσα $|A|$. Έτσι ο A είναι αντιστρέψιμος αν $|A| \neq 0$ από την Πρόταση 4.5.2. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

Θεωρούμε τώρα τον $n \times 2n$ πίνακα M του οποίου οι n πρώτες στήλες είναι οι στήλες του A , και οι επόμενες στήλες του είναι οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_n . Σχηματικά ο M γράφεται ως: $M = (A|I_n)$, δηλαδή στο «αριστερό» του μέρος έχει τον A και στο «δεξιό» του τον I_n .

$$M = (A|I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right).$$

Στη συνέχεια μετατρέπουμε με απαλοιφή Gauss τον $(A|I_n)$ σε έναν πίνακα $(A'|B)$, όπου ο A' είναι **ανηγμένος κλιμακωτός**, βλ. Ορισμό 2.4.2. Δηλαδή, όταν ολοκληρωθεί η διαδικασία ο πίνακας θα έχει την τελική μορφή

$$M' = (I_n|B),$$

δηλαδή στα αριστερά, εκεί που βρισκόταν αρχικά ο πίνακας A , θα εμφανιστεί ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας. Τότε ο πίνακας B που εμφανίζεται στα δεξιά είναι ο A^{-1} , δηλαδή ισχύει $B = A^{-1}$, και έτσι υπολογίζουμε τον αντίστροφο.

Για να γίνει πιο κατανοητή η παραπάνω διαδικασία ας κάνουμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Καταρχήν ελέγχουμε αν ο A είναι αντιστρέψιμος. Για το σκοπό αυτό υπολογίζουμε την $|A|$. Μας συμφέρει να αναπτύξουμε κατά Laplace την $|A|$ ως προς τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής του A , επειδή εκεί έχουμε ένα μηδενικό. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} |A| &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) - (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = -2 \neq 0. \end{aligned}$$

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος. Θεωρούμε τώρα τον πίνακα M , όπου

$$\begin{aligned}
 M = (A|I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 - r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \end{array} \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 \leftarrow -\frac{1}{2}r_2 \end{array} \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_1 \leftarrow r_1 - 2r_2 \\ r_3 \leftarrow r_3 + 3r_2 \end{array} \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_1 \leftarrow r_1 - r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 + r_3 \end{array} \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) = (I_3|B).
 \end{aligned}$$

Άρα

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι για να βρούμε τον αντίστροφο ενός αντιστρέψιμου πίνακα, όταν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, χρησιμοποιούμε την προηγούμενη μέθοδο.

Όπως είδαμε προηγουμένως, ο αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με $|A| \neq 0$,

δίνεται από τον τύπο (4.13): $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Αυτό επιβεβαιώνεται βέβαια με άμεσο υπολογισμό, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $AA^{-1} = I_2$, σύμφωνα με την παρατήρηση (ii) στη σελίδα 77. Εδώ προκύπτει φυσιολογικά το ερώτημα: Πώς σκεφτήκαμε και βρήκαμε τον τύπο (4.13); Ένας τρόπος να βρούμε τον τύπο (4.13) είναι ο πιο απλός, δηλαδή με τον ορισμό του αντιστρέψιμου πίνακα. Συγκεκριμένα, έστω ο 2×2 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, με $|A| \neq 0$. Θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφο A^{-1} του A . Έστω ότι

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Τότε βέβαια ισχύει:

$$\begin{aligned} AA^{-1} = I_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax_1 + bx_3 & ax_2 + bx_4 \\ cx_1 + dx_3 & cx_2 + dx_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση καταλήγουμε στα δύο γραμμικά συστήματα

$$\begin{cases} ax_1 + bx_3 = 1 \\ cx_1 + dx_3 = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} ax_2 + bx_4 = 0 \\ cx_2 + dx_4 = 1 \end{cases},$$

που, ισοδύναμα, γράφονται σε μορφή πινάκων ως:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή για να προσδιορίσουμε τον A^{-1} (ακριβέστερα, τις στήλες του A^{-1}) πρέπει να λύσουμε 2 γραμμικά συστήματα με 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους το καθένα. (Παρατηρήστε ότι και στα δύο αυτά συστήματα, ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος παραμένει ο ίδιος (A) και μεταβάλλεται μόνο ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων. Φυσικά, τα δύο αυτά συστήματα λύνονται με διάφορους τρόπους. Ας τα λύσουμε με τον κανόνα του Cramer.

Και τα δύο συστήματα έχουν ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A| \neq 0.$$

Άρα και τα δύο συστήματα έχουν μοναδική λύση. Για το πρώτο σύστημα έχουμε:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{d}{|A|} \quad \text{και} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{c}{|A|}.$$

Για το δεύτερο σύστημα έχουμε:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{b}{|A|} \quad \text{και} \quad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a}{|A|}.$$

Άρα έχουμε

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

και έτσι καταλήγουμε στον τύπο (4.13).

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε γενικά να βρούμε τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} ενός αντιστρέψιμου πίνακα A . Δηλαδή, έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

να είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας $n \times n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Οπότε ισχύει $|A| \neq 0$. Έστω ότι ο αντίστροφος του A είναι ο

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Τότε ισχύει $AA^{-1} = I_n$, ή, ισοδύναμα,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Ας συμβολίσουμε με $x^{(j)}$ τη j -στήλη του πίνακα A^{-1} και με $e^{(j)}$ τη j -στήλη του πίνακα I_n , για $j = 1, 2, \dots, n$. Τότε μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η (4.16) μας λέει ότι:

$$Ax^{(j)} = e^{(j)}, \quad \text{για όλα τα } j = 1, \dots, n. \quad (4.17)$$

Δηλαδή για να προσδιορίσουμε τον A^{-1} (ακριβέστερα, τις στήλες του A^{-1}) πρέπει να λύσουμε n γραμμικά συστήματα με n εξισώσεις και n αγνώστους το καθένα. (Παρατηρήστε ότι, όπως και στην περίπτωση 2×2 , σε όλα αυτά τα συστήματα ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος παραμένει ο ίδιος (A) και μεταβάλλεται μόνο ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων.) Λύνουμε αυτά τα n γραμμικά συστήματα κατά τα γνωστά, όπου το κάθε ένα έχει μοναδική λύση αφού έχει ορίζουσα $D = |A| \neq 0$. Έτσι προσδιορίζουμε όλους τους αγνώστους x_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ και άρα και τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} .

4.6 Επίλυση γραμμικών συστημάτων με χρήση του αντίστροφου πίνακα

Η πρώτη σημαντική εφαρμογή των αντιστρέψιμων πινάκων είναι στη λύση γραμμικών συστημάτων. Έτσι, έστω το ακόλουθο γραμμικό σύστημα $n \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (4.18)$$

Όπως έχουμε ήδη δει, το (4.18) μας δίνει την ισότητα πινάκων $Ax = b$, όπου κατά τα γνωστά ο A είναι ο πίνακας του συστήματος, x είναι ο πίνακας στήλη των αγνώστων του συστήματος και b είναι ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων του συστήματος. Υποθέτουμε ότι $r(A) = n$, οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος από την Πρόταση 4.5.3.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης $Ax = b$ (από αριστερά) με τον αντίστροφο του A και παίρνουμε:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow I_n x = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b,$$

όπου παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων, βλ. ιδιότητα 6 στην Ενότητα 2.2.1, δηλαδή ότι: $A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x$, και ότι $I_n x = x$, δηλαδή ότι ο μοναδιαίος πίνακας είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού πινάκων. Έτσι η ισότητα $x = A^{-1}b$ σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε τους αγνώστους του συστήματος αν πρώτα υπολογίσουμε τον A^{-1} και μετά κάνουμε τον πολλαπλασιασμό $A^{-1}b$.

Σχόλιο: Ο προηγούμενος τρόπος λύσης ενός γραμμικού συστήματος $n \times n$ με τη βοήθεια του αντιστρόφου δεν έχει πρακτικό ενδιαφέρον, αφού ο υπολογισμός του πίνακα A^{-1} απαιτεί περισσότερες πράξεις από αυτές που απαιτούνται για να λυθεί το σύστημα (4.18) με απαλοιφή Gauss ή με τη μέθοδο των οριζουσών αφού, όπως είδαμε προηγουμένως, ο υπολογισμός του πίνακα A^{-1} ανάγεται στη λύση n γραμμικών συστημάτων $n \times n$. Όμως, η ισοδυναμία

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b,$$

έχει σπουδαία σημασία για θεωρητικού τύπου θέματα στα οποία δεν θα επεκταθούμε λόγω του εισαγωγικού χαρακτήρα αυτού του μαθήματος.

Κεφάλαιο 5

Διανυσματικοί Χώροι

5.1 Εισαγωγή

Η βασικότερη έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας είναι η έννοια του διανυσματικού χώρου. Πριν δώσουμε τον ορισμό θα αναφέρουμε μερικά στοιχεία για την σπουδαιότερη περίπτωση διανυσματικού χώρου που είναι ο χώρος $\mathbb{R}^n$, για $n = 1, 2, 3, \dots$. Η περίπτωση $n = 3$ είναι ο συνηθής χώρος $\mathbb{R}^3$, τον οποίο ταυτίζουμε με τον συνηθή γεωμετρικό τριδιάστατο χώρο που ζούμε. Έτσι αυτός ο χώρος αποκτά και «φυσική σημασία» την οποία χρησιμοποιούμε συνήθως για να κατανοήσουμε τις ιδιότητές του.

Ο απλούστερος, αλλά και σημαντικός, διανυσματικός χώρος είναι το ίδιο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Τον χώρο $\mathbb{R}^2$ τον ταυτίζουμε συνήθως με ένα επίπεδο του χώρου. Ο $\mathbb{R}^2$ «αποτελείται» από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη της μορφής (a, b) , όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Δεν θα δώσουμε εδώ τον αυστηρό ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους γιατί απαιτεί κάποιες γνώσεις από τη θεωρία συνόλων. Θεωρούμε όμως ότι έτσι περισσότερο θα μπλέξουμε τον φοιτητή σε τεχνικές λεπτομέρειες, παρά θα τον διαφωτίσουμε. Για παράδειγμα, για να οριστεί αυστηρά το ζεύγος (a, b) , με $a, b \in \mathbb{R}$, απαιτούνται τέσσερα αξιώματα της θεωρίας συνόλων με την προϋπόθεση βέβαια ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ έχει ήδη οριστεί.

Για εμάς είναι αρκετό να γνωρίζουμε το εξής: Το ζεύγος (a, b) είναι ένα σύνολο από δύο στοιχεία τα a και b στο οποίο έχει σημασία ποιο είναι πρώτο και ποιο δεύτερο. Έτσι ισχύει ότι $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, αλλά $(1, 2) \neq (2, 1)$. Επίσης αν $a = b$, τότε $\{a\} \neq (a, a)$, ενώ $\{a\} = \{a, a\}$.

Εκείνο που παίζει ουσιαστικότερο ρόλο σε ένα σύνολο είναι όχι τόσο το ποιά στοιχεία έχει αλλά τι μπορούμε να κάνουμε με τα στοιχεία αυτά, αν το σύνολο έχει κάποιες πράξεις μεταξύ των στοιχείων του και τι ιδιότητες έχουν οι πράξεις αυτές. Το πρώτο πράγμα που θα πρέπει να κάνουμε με τα στοιχεία ενός συνόλου είναι να τα ξεχωρίζουμε. Με άλλα λόγια, να μπορούμε να πούμε πότε είναι ίσα δύο στοιχεία του συνόλου. Έτσι, αν $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ είναι δύο στοιχεία

του $\mathbb{R}^2$, λέμε ότι είναι ίσα, και γράφουμε τότε $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ και $b_1 = b_2$. Ανάλογα με το $\mathbb{R}^2$ ορίζεται και ο χώρος $\mathbb{R}^n$, για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Έτσι ο $\mathbb{R}^n$ περιέχει όλες τις (διατεταγμένες) n -άδες της μορφής $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Όπως και για τα διατεταγμένα ζεύγη δεν δίνουμε εδώ τον αυστηρό ορισμό του τι είναι μια n -άδα $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Για εμάς είναι αρκετό να θεωρούμε ότι μια n -άδα είναι ένα σύνολο n αριθμών στους οποίους βασικό ρόλο παίζει η θέση τους μέσα στην n -άδα, υπό την έννοια ότι αν αλλάξουμε τη θέση τους θα προκύψει διαφορετικό στοιχείο του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, μέσα σε μια n -άδα κάποια (ή και όλα) τα στοιχεία μπορεί να είναι ίσα μεταξύ τους.

Η ισότητα των στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως εξής: Έστω $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Τότε

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, n.$$

Στον χώρο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε δύο πράξεις μεταξύ των στοιχείων του.

1) **Την πρόσθεση:** Αν $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

2) **Τον αριθμητικό ή βαθμωτό πολλαπλασιασμό:** Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε:

$$\lambda (a_1, b_1) = (\lambda a_1, \lambda a_2).$$

Γενικά, με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε στον χώρο $\mathbb{R}^n$, για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, δύο πράξεις μεταξύ των στοιχείων του:

1) **Την πρόσθεση:** Αν $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

2) **Τον αριθμητικό ή βαθμωτό πολλαπλασιασμό:** Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε:

$$\lambda (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

Στον χώρο $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε ένα στοιχείο, το οποίο ονομάζουμε μηδέν ή μηδενικό στοιχείο και το συμβολίζουμε με 0 (όπως και το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}$). Είναι $0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, το 0 του $\mathbb{R}^n$ είναι το στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ που έχει σε όλες τις θέσεις το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}$.

Επίσης, αν $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε το στοιχείο $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$, το οποίο το ονομάζουμε «αντίθετο του $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ » και το συμβολίζουμε με $-(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Δηλαδή, ορίζουμε

$$-(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n).$$

Παρατηρήστε ότι από τον ορισμό του αριθμητικού πολλαπλασιασμού ισχύει ότι:

$$-(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-1)(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Παρατήρηση: Για τις πράξεις της πρόσθεσης και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο που χρησιμοποιούμε και για τις αντίστοιχες πράξεις των πραγματικών αριθμών. Το ίδιο ισχύει και για το σύμβολο του μηδενικού στοιχείου του $\mathbb{R}^n$, όπου χρησιμοποιούμε το σύμβολο του μηδενικού στοιχείου του $\mathbb{R}$. Το ίδιο επίσης κάνουμε και για να συμβολίσουμε το αντίθετο στοιχείο. Ο αναγνώστης θα πρέπει να διακρίνει ποιά ακριβώς σύμβολο χρησιμοποιείται από τα συμφραζόμενα, δηλαδή από το σε ποιιά στοιχεία του συνόλου εφαρμόζεται το κάθε σύμβολο κάθε φορά.

5.2 Ορισμός διανυσματικού χώρου

Στην προηγούμενη εισαγωγική παράγραφο περιγράψαμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$, που είναι ο σημαντικότερος διανυσματικός χώρος με τον οποίο θα ασχοληθούμε στο μάθημά μας. Ειδικότερα, θα μας απασχολήσουν κυρίως οι χώροι $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$. Γενικά στα Μαθηματικά, τη Φυσική και την τεχνολογία χρησιμοποιούνται πολλοί και σημαντικοί διανυσματικοί χώροι. Όλοι αυτοί οι χώροι «υπακούουν» σε ένα θεωρητικό μοντέλο, έναν ορισμό, τον οποίο αναφέρουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 5.2.1. Ένα μη κενό σύνολο V θα λέγεται (πραγματικός) **διανυσματικός χώρος** (vector space στα αγγλικά) αν ορίσουμε στον V δύο πράξεις από τις οποίες η μία ονομάζεται «πρόσθεση» και η άλλη «αριθμητικός ή βαθμωτός πολλαπλασιασμός» ως εξής:

- I. Η **πρόσθεση** αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος στοιχείων a, b του V ένα μοναδικό στοιχείο του V , που λέγεται άθροισμα των a και b και συμβολίζεται $a + b$.
- II. Ο **αριθμητικός ή βαθμωτός πολλαπλασιασμός** αντιστοιχεί σε κάθε πραγματικό αριθμό λ και σε κάθε στοιχείο $a \in V$ ένα μοναδικό στοιχείο του V , που λέγεται γινόμενο των λ και a και συμβολίζεται λa .

Από την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό απαιτούμε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες οκτώ ιδιότητες: Για οποιαδήποτε $a, b, c \in V$ και οποιουσδήποτε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ πρέπει

(i) Το V με την πρόσθεση να έχει τις ακόλουθες τέσσερις ιδιότητες που το καθιστούν «αβελιανή ομάδα»:

- (α) $a + (b + c) = (a + b) + c$, για κάθε $a, b, c \in V$ (προσεταιριστική ιδιότητα).
- (β) Υπάρχει ένα στοιχείο του V , το οποίο ονομάζεται «το μηδενικό στοιχείο του V », και το οποίο συμβολίζεται με 0 , τέτοιο ώστε $a + 0 = 0 + a = a$, για κάθε $a \in V$. Λέμε επίσης ότι το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο του V ως προς την πρόσθεση.
- (γ) Για κάθε $a \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο a' του V έτσι ώστε $a + a' = a' + a = 0$. Το a' είναι το μοναδικό στοιχείο του V που ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα, ονομάζεται «το αντίθετο του a » και συμβολίζεται με $-a$.
- (δ) $a + b = b + a$, για κάθε $a, b \in V$ (αντιμεταθετική ιδιότητα).

(ii) Ο αριθμητικός πολλαπλασιασμός έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- (α) $1a = a$, για κάθε $a \in V$, όπου 1 είναι η μονάδα του $\mathbb{R}$.
- (β) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και για κάθε $a \in V$.

(iii) Επιμεριστικές ιδιότητες (δύο ιδιότητες στις οποίες εμπλέκονται και οι δύο πράξεις).

- (α) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και για κάθε $a, b \in V$.
- (β) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και για κάθε $a \in V$.

Παρατηρήσεις πάνω στον Ορισμό 5.2.1:

1. Το μηδενικό στοιχείο του V είναι το μοναδικό που ικανοποιεί την ιδιότητα (i),(β) του ορισμού και γι' αυτό δικαιολογείται να του δώσουμε ιδιαίτερο σύμβολο.
2. Στην ιδιότητα (ii),(β), το $\lambda\mu$ είναι γινόμενο στους πραγματικούς αριθμούς, ενώ τα γινόμενα $(\lambda\mu)a$, μa και $\lambda(\mu a)$ είναι γινόμενα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του V .
3. Ισχύει η ιδιότητα: Για $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in V$:

$$\lambda a = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } a = 0.$$

4. Ισχύει η ιδιότητα: Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in V$:

$$\lambda(-a) = (-\lambda)a = -(\lambda a).$$

5. Το αξίωμα (i),(δ) του ορισμού προκύπτει από τα υπόλοιπα αξιώματα του ορισμού. Παρόλα αυτά συνηθίζεται να μπαίνει και αυτό στον ορισμό του διανυσματικού χώρου.

6. Ο διανυσματικός χώρος λέγεται επίσης και *γραμμικός χώρος*.
7. Συνήθως συμβολίζουμε έναν διανυσματικό χώρο με τα γράμματα V , W , και αν έχουμε πολλούς διανυσματικούς χώρους σε ένα πρόβλημα γράφουμε $V_1, V_2, \dots$ κλπ., ή $W_1, W_2, \dots$ κλπ.
8. Αν $a, b \in V$ και $a + b = 0$, τότε $b = -a$ και $a = -b$.
9. $(-1)a = -a$, για κάθε $a \in V$.
10. Αν $a, b, c \in V$ και $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.
11. Αν $a, b \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda a = \lambda b$, τότε είτε $\lambda = 0$ ή $a = b$.
12. Σε έναν διανυσματικό χώρο ορίζεται και η πράξη της αφαίρεσης, όπως και στους πραγματικούς αριθμούς (προσοχή! η διαίρεση δεν ορίζεται). Έτσι, αν $a, b \in V$, ορίζουμε:

$$a - b = a + (-b).$$

13. Ισχύει $-(a + b) = -a - b$, για κάθε $a, b \in V$.
14. Όμοια ισχύει: $-(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = -a_1 - a_2 - \dots - a_n$, για κάθε $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$.
15. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$, ισχύει ότι:

$$\lambda(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n.$$

16. Για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $a \in V$, ισχύει ότι:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)a = \lambda_1 a + \lambda_2 a + \dots + \lambda_n a.$$

17. Για κάθε $a \in V$ ισχύει ότι: $-(-a) = a$.
18. Σε έναν διανυσματικό χώρο μπορούμε να λύνουμε εξισώσεις όπως και στους πραγματικούς αριθμούς.
19. Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου τα λέμε συνήθως «διανύσματα».
20. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in V$. Στην γραφή λa ενός διανύσματος το λ λέγεται συνήθως «συντελεστής». Οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί.

Γενικότερα, οι «συντελεστές» των διανυσμάτων μπορεί να είναι από ένα σώμα $\mathbb{K}$ όπως το σώμα των ρητών ($\mathbb{Q}$) ή των μιγαδικών αριθμών ($\mathbb{C}$). Εμείς σε αυτό το μάθημα δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες περιπτώσεις. Για μας οι συντελεστές θα είναι πάντα πραγματικοί αριθμοί.

Παράδειγμα. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ και $a, b \in V$. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\lambda x + a = b, \quad (5.1)$$

δηλαδή να βρεθεί ένα στοιχείο $x_0 \in V$, το οποίο αν αντικαταστήσει το x στην (5.1) προκύπτει ισότητα

Λύση. Η λύση εδώ είναι κλασσική περίπτωση της μεθόδου της ανάλυσης-σύνθεσης της Ακαδημίας του Πλάτωνα στην Αρχαία Αθήνα. Αρχικά υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση. Αν x είναι μια λύση της (5.1), τότε:

$$\begin{aligned} \lambda x + a = b &\Rightarrow (\lambda x + a) + (-a) = b + (-a) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \lambda x + (a + (-a)) = b - a \\ &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lambda x + 0 = b - a \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \lambda x = b - a \stackrel{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}(b - a) \\ &\stackrel{(4)}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)x = \frac{1}{\lambda}(b - a) \stackrel{(5)}{\Rightarrow} 1x = \frac{1}{\lambda}(b - a) \stackrel{(6)}{\Rightarrow} x = \frac{1}{\lambda}(b - a). \end{aligned}$$

Ας δούμε αναλυτικά τα παραπάνω βήματα: Για να πάρουμε τη συνεπαγωγή (1) χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα (i),(α) του Ορισμού 5.2.1 (προσεταιριστικότητα). Για να πάρουμε τη συνεπαγωγή (2) χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα (i),(γ) του αντιθέτου στοιχείου. Για να πάρουμε τη συνεπαγωγή (3) χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα (i),(β) του ορισμού. Για να πάρουμε τη συνεπαγωγή (4) χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα (ii),(β) του ορισμού. Για να πάρουμε τη συνεπαγωγή (5) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο $1/\lambda$ είναι ο αντίστροφος του λ . Για να πάρουμε τη συνεπαγωγή (6) χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα (ii),(α) του ορισμού.

Προσοχή! δεν τελειώσαμε. Αυτό που κάναμε μέχρι τώρα ήταν ανάλυση. **Υποθέσαμε ότι υπάρχει λύση** και με αυτήν την υπόθεση δείξαμε ότι η λύση είναι μοναδική και είναι το $x_0 = \frac{1}{\lambda}(b - a)$. Θα μπορούσε όμως να μην υπάρχει λύση. Για να επιβεβαιώσουμε ότι πράγματι υπάρχει λύση θα πρέπει να αντικαταστήσουμε την τιμή που βρήκαμε στην αρχική εξίσωση για να επιβεβαιώσουμε ότι αυτή πράγματι αποτελεί λύση. Μόνον τότε έχουμε εξασφαλίσει ότι η εξίσωση έχει πραγματικά λύση. Έτσι έχουμε με απευθείας υπολογισμό:

$$\begin{aligned} \lambda\left(\frac{1}{\lambda}(b - a)\right) + a &\stackrel{(1)}{=} \left(\lambda \frac{1}{\lambda}\right)(b - a) + a \stackrel{(2)}{=} 1(b - a) + a \stackrel{(3)}{=} (b - a) + a \\ &\stackrel{(4)}{=} (b + (-a)) + a \stackrel{(5)}{=} b + ((-a) + a) \stackrel{(6)}{=} b + 0 \stackrel{(7)}{=} b. \end{aligned}$$

Στις προηγούμενες σχέσεις, η ισότητα (1) προκύπτει από την ιδιότητα (ii),(β), η ισότητα (2) προκύπτει από το γεγονός ότι ο $\lambda \frac{1}{\lambda} = 1$, η ισότητα (3) προκύπτει από την ιδιότητα (ii),(α), η ισότητα (4) προκύπτει από τον ορισμό της αφαίρεσης στον V , η ισότητα (5) προκύπτει από την ιδιότητα (i),(α), η ισότητα (6) προκύπτει από την ιδιότητα (i),(γ), και η ισότητα (7) προκύπτει από την ιδιότητα (i),(β).

Αργότερα θα έχουμε την ευκαιρία να δούμε και γραμμικά συστήματα σε διανυσματικούς χώρους.

5.3 Παραδείγματα διανυσματικών χώρων

Ας δούμε τώρα μερικά κλασσικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων.

1. Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ με τις πράξεις που ορίσαμε σε αυτόν στην Παράγραφο 5.1. Το μηδενικό στοιχείο της πρόσθεσης είναι το $0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ και το αντίθετο του $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ είναι το $-a = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$, για κάθε $a \in \mathbb{R}^n$.
2. Θεωρούμε το σύνολο των πινάκων $m \times n$ με m γραμμές και n στήλες, όπου $m, n \in \mathbb{N}$, και στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Ας συμβολίσουμε με $\mathbb{R}^{m \times n}$ το σύνολο αυτό. Εφοδιάζουμε αυτό το σύνολο με πρόσθεση τη συνήθη πρόσθεση πινάκων και με αριθμητικό πολλαπλασιασμό τον συνήθη πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα όπως τον ορίσαμε στις πράξεις πινάκων. Τότε το $\mathbb{R}^{m \times n}$ με αυτές τις πράξεις γίνεται διανυσματικός χώρος με μηδενικό στοιχείο τον μηδενικό πίνακα και αντίθετο πίνακα του πίνακα $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, τον πίνακα $-A = (-a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.
3. Έστω $\mathbb{P} = \{p(x) : p \text{ πολυώνυμο}\}$ να είναι το σύνολο όλων των πολυωνύμων μιας πραγματικής μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές. Εφοδιάζουμε το $\mathbb{P}$ με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού των πολυωνύμων. Το $\mathbb{P}$ είναι διανυσματικός χώρος με μηδενικό στοιχείο το μηδενικό πολυώνυμο και αντίθετο πολυώνυμο του $p(x)$, το $-p(x)$.
4. Έστω $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ συνάρτηση}\}$ να είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τιμές στο $\mathbb{R}$. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι δύο στοιχεία του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Τότε από τις f, g ορίζεται μια νέα συνάρτηση που τη συμβολίζουμε με $f + g$, όπου $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε βέβαια $f + g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται πρόσθεση στο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ακόμα, έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $\lambda f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ με τύπο $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι ορίζεται αριθμητικός πολλαπλασιασμός στο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Με αυτές τις δύο πράξεις το $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ γίνεται διανυσματικός χώρος. Το μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ είναι η συνάρτηση που συμβολίζουμε με $\mathbf{0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $\mathbf{0}(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, τότε το αντίθετο στοιχείο του f είναι η συνάρτηση $-f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ με τύπο $(-f)(x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
5. Έστω $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ συνάρτηση}\}$ των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $[a, b]$ και τιμές στο $\mathbb{R}$. Εδώ οι πράξεις ορίζονται όπως και στο 4, και ομοίως ορίζονται το μηδενικό και το αντίθετο στοιχείο.

6. Έστω $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Θεωρούμε το σύνολο $C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ συνεχής συνάρτηση}\}$. Το $C([a, b])$ είναι διανυσματικός χώρος και οι πράξεις ορίζονται όπως στα 4 και 5. Ανάλογα ορίζονται το μηδενικό και το αντίθετο στοιχείο.

Άσκηση: Να αποδείξετε λεπτομερώς ότι τα σύνολα που περιγράφονται παραπάνω στα 1, 2, 3 και 4, είναι πράγματι διανυσματικοί χώροι και να δείξετε επίσης ότι το μηδενικό και το αντίθετο στοιχείο είναι πράγματι αυτά που αναφέρονται παραπάνω.

5.4 Διανυσματικοί υπόχωροι

Ορισμός 5.4.1. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος. Ένα υποσύνολο A του V λέγεται υπόχωρος του V αν ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $0 \in A$.
- (ii) Για κάθε $a, b \in A$ έχουμε $a + b \in A$.
- (iii) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $a \in A$ έχουμε $\lambda a \in A$.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A \leq V$.

Παρατηρήσεις:

- i) Αν ο A είναι υπόχωρος του V , τότε ο A είναι και αυτός διανυσματικός χώρος με τις ίδιες πράξεις με τις οποίες είναι διανυσματικός χώρος ο V . Επίσης το μηδενικό στοιχείο του V ανήκει στο A και για κάθε $a \in A$, το αντίθετο $-a \in A$, αφού $-a = (-1)a \in A$ από την ιδιότητα (iii) του Ορισμού 5.4.1.
- ii) Ο υπόχωρος του V λέγεται και διανυσματικός υπόχωρος του V .
- iii) Για να δείξουμε ότι ένα υποσύνολο $A \subseteq V$ είναι υπόχωρος του V αρκεί να δείξουμε τις (ii) και (iii) του ορισμού και επίσης ότι $A \neq \emptyset$, αφού αν $A \neq \emptyset$ και $a \in A$, τότε $0 = 0a \in A$ από την παρατήρηση 3 του Ορισμού 5.2.1, και άρα ισχύει και το (i) του Ορισμού 5.4.1.

Παρατηρήστε ότι στη σχέση $0 = 0a$, το 0 στα αριστερά είναι το μηδενικό στοιχείο του V , ενώ το 0 στο δεξί μέλος είναι ο πραγματικός αριθμός 0.

Παραδείγματα υποχώρων διαφόρων διανυσματικών χώρων.

1. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος. Τότε το $\{0\}$ με μοναδικό στοιχείο το μηδενικό στοιχείο του V είναι υπόχωρος του V . Επίσης το $V \leq V$.

2. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και $a \in V$. Τότε το σύνολο

$$\langle a \rangle = \{x \in V : \text{υπάρχει } \lambda \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε } x = \lambda a\}$$

είναι υπόχωρος του V .

3. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε το σύνολο

$$\begin{aligned} A &= \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle \\ &= \{x \in V : \text{υπάρχουν } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n\} \end{aligned}$$

είναι υπόχωρος του V .

4. Έστω $C(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ συνεχής}\}$. Τότε το $C(\mathbb{R}) \leq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5. Ισχύει ότι $C([a, b]) \leq \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

6. Στον $\mathbb{R}^2$ υπάρχουν δύο διανύσματα τα οποία έχουν μεγάλη σημασία για τον χώρο αυτό, όπως θα δούμε αργότερα. Αυτά είναι τα διανύσματα $(1, 0)$ και $(0, 1)$. Συμβολίζουμε για απλότητα $e_1 = (1, 0)$ και $e_2 = (0, 1)$. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Θεωρούμε τα διανύσματα $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ και $v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$ του $\mathbb{R}^2$. Από το Παράδειγμα 2 παραπάνω, ορίζονται οι υπόχωροι $\langle u \rangle$ και $\langle v \rangle$ του V . Θα δείξουμε τώρα ότι ισχύει

$$\langle u \rangle = \langle v \rangle \Leftrightarrow \lambda(\lambda_1, \lambda_2) = (\mu_1, \mu_2) \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Αρχικά υποθέτουμε ότι $\langle u \rangle = \langle v \rangle$.

Από τον ορισμό του $\langle v \rangle$ προκύπτει άμεσα ότι $v \in \langle v \rangle$, αφού $v = 1 v$. Επειδή $\langle u \rangle = \langle v \rangle$ και $v \in \langle v \rangle$ έπεται ότι και $v \in \langle u \rangle$. Άρα από τον ορισμό του $\langle u \rangle$ υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} v &= \lambda_0 u \Leftrightarrow \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 = \lambda_0 (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) \\ &\Leftrightarrow \mu_1 (1, 0) + \mu_2 (0, 1) = \lambda_0 (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) \\ &\Leftrightarrow (\mu_1, 0) + (0, \mu_2) = (\lambda_0 \lambda_1) e_1 + (\lambda_0 \lambda_2) e_2 \\ &\Leftrightarrow (\mu_1 + 0, 0 + \mu_2) = (\lambda_0 \lambda_1) (1, 0) + (\lambda_0 \lambda_2) (0, 1) \\ &\Leftrightarrow (\mu_1, \mu_2) = (\lambda_0 \lambda_1, 0) + (0, \lambda_0 \lambda_2) \\ &\Leftrightarrow (\mu_1, \mu_2) = (\lambda_0 \lambda_1, \lambda_0 \lambda_2) \\ &\Leftrightarrow \mu_1 = \lambda_0 \lambda_1 \quad \text{και} \quad \mu_2 = \lambda_0 \lambda_2 \\ &\Leftrightarrow (\mu_1, \mu_2) = \lambda_0 (\lambda_1, \lambda_2), \end{aligned}$$

όπου $\lambda_0 \neq 0$, αφού $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \neq 0$ από υπόθεση. Άρα αποδείξαμε τη μια κατεύθυνση. Αντίστροφα, έστω ότι $\lambda(\lambda_1, \lambda_2) = (\mu_1, \mu_2)$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Άρα $\mu_1 = \lambda\lambda_1$ και $\mu_2 = \lambda\lambda_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} v &= \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 = (\lambda\lambda_1)e_1 + (\lambda\lambda_2)e_2 = \lambda(\lambda_1 e_1) + \lambda(\lambda_2 e_2) \\ &= \lambda(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = \lambda u, \end{aligned}$$

και άρα $v \in \langle u \rangle$ από τον ορισμό του $\langle u \rangle$. Άρα για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\kappa v = \kappa(\lambda u) = (\kappa\lambda)u \in \langle u \rangle.$$

Συνεπώς

$$\langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle. \quad (5.2)$$

Επιπλέον, αφού $v = \lambda u \xrightarrow{\lambda \neq 0} \frac{1}{\lambda} v = \frac{1}{\lambda}(\lambda u) = (\frac{1}{\lambda}\lambda)u = 1u = u \Rightarrow u \in \langle v \rangle$, και για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\rho u = \rho\left(\frac{1}{\lambda}v\right) = \frac{\rho}{\lambda}v \in \langle v \rangle.$$

Επομένως

$$\langle u \rangle \subseteq \langle v \rangle. \quad (5.3)$$

Από τις (5.2) και (5.3) έπεται ότι: $\langle u \rangle = \langle v \rangle$, και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του ισχυρισμού.

Από τον ισχυρισμό αυτό έπεται το εξής: Αν πάρουμε τυχόν $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$ με $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ και τυχόν $v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$ με $\mu_1 \mu_2 \neq 0$, ώστε **να μην υπάρχει** $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$(\mu_1, \mu_2) = \lambda(\lambda_1, \lambda_2),$$

τότε ισχύει ότι $\langle u \rangle \neq \langle v \rangle$.

Επειδή μπορούμε να επιλέξουμε άπειρα ζεύγη τέτοια ώστε να ισχύουν τα παραπάνω έπεται ότι ο χώρος $\mathbb{R}^2$ έχει άπειρους διαφορετικούς διανυσματικούς υπόχωρους.

Παρόμοια και ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ έχει άπειρους διανυσματικούς υπόχωρους. Αργότερα θα δούμε ότι όλοι οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ είναι της μορφής $\langle u \rangle$, για κάποιο $u \in \mathbb{R}^2$. Έτσι έχουμε ήδη περιγράψει όλους τους διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^2$.

7. Το σύνολο $\mathbb{P}_n = \{p(x) : p \text{ πολυώνυμο βαθμού το πολύ } n\}$ των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ n , για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, εννοείται ότι περιέχει και το μηδενικό πολυώνυμο. Ισχύει ότι $\mathbb{P}_n \leq \mathbb{P}$ (με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού πολυωνύμων), όπου $\mathbb{P}$ συμβολίζει το σύνολο όλων των πολυωνύμων.

Προφανώς, αν $n, m \in \mathbb{N}$ με $n < m$ είναι άμεσο ότι ισχύει $\mathbb{P}_n \leq \mathbb{P}_m$ και $\mathbb{P}_n \neq \mathbb{P}_m$, επομένως ο $\mathbb{P}$ έχει άπειρους διανυσματικούς υπόχωρους.

8. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$. Το σύνολο $\Pi = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ είναι άνω τριγωνικός}\}$ όλων των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n \times n}$ και βέβαια $\Pi \neq \mathbb{R}^{n \times n}$.
9. Έστω $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε σταθεροποιημένο $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει $\langle f_\lambda \rangle \leq C(\mathbb{R})$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, και αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε $\langle f_{\lambda_1} \rangle \neq \langle f_{\lambda_2} \rangle$. Έτσι το σύνολο $C(\mathbb{R})$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων έχει άπειρους διανυσματικούς υπόχωρους της μορφής $\langle f \rangle$, όπου $f \in C(\mathbb{R})$.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι τα σύνολα που περιγράφονται στα παραπάνω παραδείγματα είναι πράγματι υπόχωροι των αντίστοιχων χώρων.

Τα παραδείγματα 2 και 3 παραπάνω είναι κλασσικές περιπτώσεις παραγωγής υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου. Στις ακόλουθες προτάσεις περιγράφουμε άλλες δύο περιπτώσεις παραγωγής υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου.

Πρόταση 5.4.2. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και A, B να είναι υπόχωροι του V . Τότε η τομή $A \cap B$ είναι υπόχωρος του V .

Γενικότερα ισχύει η εξής πρόταση:

Πρόταση 5.4.3. Η τομή μιας οικογένειας υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου V είναι υπόχωρος του V .

Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και A, B να είναι μη κενά υποσύνολα του V . Θεωρούμε το εξής υποσύνολο του V :

$$\begin{aligned} A + B &= \{x \in V : \text{υπάρχουν } a \in A, b \in B \text{ τέτοια ώστε } x = a + b\} \\ &= \{a + b : a \in A \text{ και } b \in B\}. \end{aligned}$$

Το σύνολο $A+B$ λέγεται **άθροισμα των συνόλων** A και B . Από την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης του V έχουμε ότι ισχύει: $A + B = B + A$. Έχουμε τώρα την εξής πρόταση:

Πρόταση 5.4.4. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και A, B να είναι υπόχωροι του V . Τότε το άθροισμα $A + B$ είναι υπόχωρος του V .

Γενικότερα, αν έχουμε n υποσύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$ ενός διανυσματικού χώρου V ορίζουμε το άθροισμά τους ως εξής: Για $n = 2$ το άθροισμα δύο υποσυνόλων A_1, A_2 του V είναι αυτό που ορίστηκε προηγουμένως. Έστω τώρα ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ορίσει το άθροισμα $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ των n υποσυνόλων $A_1, A_2, \dots, A_n$ του V για οποιαδήποτε τέτοια υποσύνολα του V . Τότε για $n + 1$ υποσύνολα του V τα $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$, ορίζουμε

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + A_{n+1} = (A_1 + A_2 + \dots + A_n) + A_{n+1},$$

δηλαδή το $A_1 + A_2 + \cdots + A_n + A_{n+1}$ ορίζεται να είναι το άθροισμα των δύο ήδη ορισμένων υποσυνόλων $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ και A_{n+1} του V .

Από την Πρόταση 5.4.4 τώρα έπεται αμέσως επαγωγικά η εξής γενικότερή της πρόταση:

Πρόταση 5.4.5. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και $A_1, A_2, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, να είναι υπόχωροι του V . Τότε το άθροισμα $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ είναι υπόχωρος του V .

Παράδειγμα. Ας πάρουμε τα διανύσματα $e_1 = (1, 0)$ και $e_2 = (0, 1)$ του $\mathbb{R}^2$, που ορίσαμε στο Παράδειγμα 6 της σελίδας 97. Όπως ήδη αναφέραμε (βλ. 2 στα παραδείγματα υποχώρων) τα σύνολα $\langle e_1 \rangle$ και $\langle e_2 \rangle$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$. Έτσι το σύνολο $V_1 = \langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ λόγω της Πρότασης 5.4.4. Θα δείξουμε ότι ισχύουν οι εξής δύο ιδιότητες:

$$(i) \quad \mathbb{R}^2 = \langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle, \text{ και}$$

$$(ii) \quad \langle e_1 \rangle \cap \langle e_2 \rangle = \{0\}.$$

Αρχικά θα δείξουμε την (ii). Έστω $u \in \langle e_1 \rangle \cap \langle e_2 \rangle$. Αφού $u \in \langle e_1 \rangle$ υπάρχει $\lambda_1 \in \mathbb{R}$:

$$u = \lambda_1 e_1 = \lambda_1 (1, 0) = (\lambda_1, 0). \quad (5.4)$$

Αφού $u \in \langle e_2 \rangle$ υπάρχει $\lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$u = \lambda_2 e_2 = \lambda_2 (0, 1) = (0, \lambda_2). \quad (5.5)$$

Από τις (5.4) και (5.5) παίρνουμε ότι:

$$(\lambda_1, 0) = u = (0, \lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ και } \lambda_2 = 0.$$

Άρα από την (5.4) έχουμε $u = (0, 0) = 0$, δηλαδή το u είναι το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^2$. Επομένως δείξαμε ότι:

$$\langle e_1 \rangle \cap \langle e_2 \rangle \subseteq \{0\}. \quad (5.6)$$

Όμως το σύνολο $\langle e_1 \rangle \cap \langle e_2 \rangle$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, άρα από τον ορισμό του υπόχωρου έχουμε ότι $0 \in \langle e_1 \rangle \cap \langle e_2 \rangle$. Άρα

$$\{0\} \subseteq \langle e_1 \rangle \cap \langle e_2 \rangle. \quad (5.7)$$

Από τις (5.6) και (5.7) αποδεικνύεται η (ii), δηλαδή ότι $\langle e_1 \rangle \cap \langle e_2 \rangle = \{0\}$.

Θα αποδείξουμε τώρα και την (i). Προφανώς

$$\langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (5.8)$$

αφού το $\langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle$ είναι εξ' ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Αντίστροφα, έστω τυχόν $u \in \mathbb{R}^2$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $u = (\lambda_1, \lambda_2)$. Άρα έχουμε

$$u = (\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = \lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,$$

όπου η δεύτερη ισότητα στην προηγούμενη σχέση έπεται από τον ορισμό της πρόσθεσης στο $\mathbb{R}^2$, η τρίτη από τον ορισμό του αριθμητικού πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}^2$, και η τελευταία από τον ορισμό των διανυσμάτων e_1 και e_2 .

Όμως $\lambda_1 e_1 \in \langle e_1 \rangle$ και $\lambda_2 e_2 \in \langle e_2 \rangle$, από τους ορισμούς των συνόλων $\langle e_1 \rangle$ και $\langle e_2 \rangle$.

Τέλος, αφού $\lambda_1 e_1 \in \langle e_1 \rangle$ και $\lambda_2 e_2 \in \langle e_2 \rangle$ έπεται ότι το διάνυσμα $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in \langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle$ από τον ορισμό του συνόλου $\langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle$. Άρα $u \in \langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle$, οπότε

$$\mathbb{R}^2 \subseteq \langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle. \quad (5.9)$$

Έτσι από τις (5.8) και (5.9) προκύπτει ότι:

$$\mathbb{R}^2 = \langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle.$$

Δηλαδή είδαμε ότι ο $\mathbb{R}^2$ γράφεται ως άθροισμα των δύο συγκεκριμένων υποχώρων του $\langle e_1 \rangle$ και $\langle e_2 \rangle$.

Παρατηρήστε ότι το σύνολο $\langle e_1 \rangle$ είναι ο συνήθης άξονας xx' του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων που γνωρίζουμε ήδη από την Β' Λυκείου. Όμοια το σύνολο $\langle e_2 \rangle$ είναι ο άξονας yy' του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων του επιπέδου.

Το προηγούμενο παράδειγμα μας οδηγεί σε έναν ορισμό:

Ορισμός 5.4.6. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος. Λέμε ότι ο V είναι ευθύ άθροισμα των υποχώρων του A και B , και το συμβολίζουμε $V = A \oplus B$, αν ισχύουν οι εξής δύο ιδιότητες:

$$(i) \quad V = A + B, \text{ και}$$

$$(ii) \quad A \cap B = \{0\}.$$

Έτσι από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε ότι ο $\mathbb{R}^2$ είναι ευθύ άθροισμα των υποχώρων του $\langle e_1 \rangle$ και $\langle e_2 \rangle$ και άρα με τον συμβολισμό του Ορισμού 5.4.6 γράφουμε:

$$\mathbb{R}^2 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle.$$

Ανάλογα στον χώρο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τα διανύσματα $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ και $e_3 = (0, 0, 1)$. Παρόμοια με τον $\mathbb{R}^2$ έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 5.4.7. Στον $\mathbb{R}^3$ ισχύουν τα εξής:

Τα αθροίσματα $\langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle$, $\langle e_2 \rangle + \langle e_3 \rangle$ και $\langle e_1 \rangle + \langle e_3 \rangle$ είναι ευθέα. Έτσι μπορούμε να γράφουμε $\langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle$, $\langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle$ και $\langle e_1 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle$ για αυτά τα ευθέα αθροίσματα. Μάλιστα ισχύει άμεσα ότι: $\langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle = \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle$, $\langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle = \langle e_3 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle$ και $\langle e_1 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle = \langle e_3 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle$.

Επίσης ισχύουν:

$$\begin{aligned}(\langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle) \cap \langle e_3 \rangle &= \{0\}, \\(\langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle) \cap \langle e_1 \rangle &= \{0\} \text{ και} \\(\langle e_1 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle) \cap \langle e_2 \rangle &= \{0\}.\end{aligned}$$

Ακόμα ισχύει ότι: $\mathbb{R}^3 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle$.

Στον χώρο $\mathbb{R}^3$ τα σύνολα $\langle e_1 \rangle$, $\langle e_2 \rangle$ και $\langle e_3 \rangle$ είναι αντίστοιχα οι γνωστοί μας άξονες xx' , yy' και zz' του τρισσορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων.

Η Πρόταση 5.4.7 μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.4.8. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, να είναι υπόχωροι του V . Λέμε ότι ο V είναι ευθύ άθροισμα των υποχώρων του $A_1, A_2, \dots, A_n$ αν ισχύουν τα εξής:

- (i) $V = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, και
- (ii) $A_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n A_j \right) = \{0\}$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$, όπου με $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n A_j$ εννοούμε ότι παίρνουμε το άθροισμα όλων των υποχώρων $A_1, A_2, \dots, A_n$, εκτός από τον A_i .

Όταν ο V είναι ευθύ άθροισμα των υποχώρων του $A_1, A_2, \dots, A_n$ αυτό το συμβολίζουμε με

$$V = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n.$$

Έτσι με βάση τον Ορισμό 5.4.8 έχουμε από την Πρόταση 5.4.7, ότι ο $\mathbb{R}^3$ είναι ευθύ άθροισμα των τριών υποχώρων του $\langle e_1 \rangle$, $\langle e_2 \rangle$ και $\langle e_3 \rangle$, δηλαδή:

$$\mathbb{R}^3 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle.$$

Όταν ένας διανυσματικός χώρος γράφεται ως ευθύ άθροισμα δύο υποχώρων του ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 5.4.9. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και A, B να είναι δύο υπόχωροι του V . Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (i) $V = A \oplus B$.
- (ii) Κάθε στοιχείο $u \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $u = u_1 + u_2$, όπου $u_1 \in A$ και $u_2 \in B$.
(Δηλαδή, αν $u = u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$, όπου $u_1, u'_1 \in A$ και $u_2, u'_2 \in B$, τότε $u_1 = u'_1$ και $u_2 = u'_2$.)

Η Πρόταση 5.4.9 γενικεύεται για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος υποχώρων και ισχύει η ακόλουθη πρόταση με βάση τον Ορισμό 5.4.8.

Πρόταση 5.4.10. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και έστω $A_1, A_2, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, να είναι υπόχωροι του V . Τότε οι ακόλουθες τρεις ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

(i) $V = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$.

(ii) Κάθε στοιχείο του V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα στοιχείων των $A_1, A_2, \dots, A_n$. Αυτό σημαίνει ότι αν $u \in V$ και ισχύει:

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n,$$

όπου $u_i, u'_i \in A_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, τότε ισχύει και ότι: $u_i = u'_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

(iii) $V = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ και αν ισχύει ότι: $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0$ με $u_i \in A_i$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, τότε ισχύει: $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$.

5.5 Γραμμικοί συνδυασμοί

Ας επανέλθουμε τώρα στον υπόχωρο του παραδείγματος 3 της σελίδας 97. Ο υπόχωρος A αυτού του παραδείγματος έχει στοιχεία της μορφής $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, u_1, u_2, \dots, u_n \in V$. Το παράδειγμα αυτό μας οδηγεί σε έναν σημαντικό ορισμό.

Ορισμός 5.5.1. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και $u_1, u_2, \dots, u_n$ να είναι διανύσματα του $V, n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι το διάνυσμα w είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $u_1, u_2, \dots, u_n$, αν υπάρχουν n πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, έτσι ώστε

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n.$$

Με βάση τον Ορισμό 5.5.1 έχουμε και τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.5.2. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και K να είναι ένα μη κενό υποσύνολο του V . Λέμε ότι το διάνυσμα $w \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του K , αν υπάρχουν διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_n \in K$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε το w να είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Θα συμβολίζουμε με $\langle K \rangle$ ή με $\text{span}(K)$ το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του K .

Έστω λοιπόν V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και έστω $K \neq \emptyset$, $K \subseteq V$. Από τους Ορισμούς 5.5.1 και 5.5.2 έχουμε ότι ισχύει:

$$\text{span}(K) = \{x \in V : \text{υπάρχουν } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}, \\ \text{και } u_1, u_2, \dots, u_n \in K \text{ ώστε να ισχύει } x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n\}.$$

Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 5.5.3. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και $K \neq \emptyset$ να είναι ένα υποσύνολο του V . Τότε το $\text{span}(K)$ είναι υπόχωρος του V .

Το σύνολο (υπόχωρος) $\text{span}(K)$ είναι πλήρως ορισμένο από το K . Για να εκφράσουμε τη συσχέτιση των συνόλων $\text{span}(K)$ και K δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.5.4. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και K να είναι ένα μη κενό υποσύνολό του. Το σύνολο $\text{span}(K)$ των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του K λέγεται ο υπόχωρος του V που παράγεται από το K ή η γραμμική θήκη του K στον V .

Αν $K = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, τότε συνήθως θα συμβολίζουμε τον $\text{span}(K)$ με $\text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ αντί με $\text{span}(\{u_1, u_2, \dots, u_n\})$.

Αν ισχύει ότι $\text{span}(K) = V$, τότε λέμε ότι το σύνολο K παράγει τον χώρο V ή ότι το K είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V .

Επιπλέον, δίνουμε τον ακόλουθο σημαντικό ορισμό:

Ορισμός 5.5.5. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος. Λέμε ότι ο V είναι πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος αν υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V το οποίο παράγει τον V .

Παράδειγμα. Ας έρθουμε πάλι στο παράδειγμα 6 της σελίδας 97. Το σύνολο $\langle e_1, e_2 \rangle = \text{span}\{e_1, e_2\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Επομένως,

$$\text{span}\{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (5.10)$$

Αντίστροφα, έστω τυχόν $u \in \mathbb{R}^2$. Από το παράδειγμα της σελίδας 100 έχουμε ότι

$$\mathbb{R}^2 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle = \text{span}\{e_1\} \oplus \text{span}\{e_2\}.$$

Άρα, όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του συνόλου $\text{span}\{e_1\} + \text{span}\{e_2\}$ υπάρχουν $u_1 \in \text{span}\{e_1\}$ και $u_2 \in \text{span}\{e_2\}$ ώστε να ισχύει $u = u_1 + u_2$. Επομένως υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

ώστε να ισχύουν: $u_1 = \lambda_1 e_1$ και $u_2 = \lambda_2 e_2$ (από τον ορισμό των συνόλων $\text{span}\{e_1\}$ και $\text{span}\{e_2\}$). Άρα ισχύει:

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2.$$

Δηλαδή το u είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων e_1, e_2 και άρα $u \in \text{span}\{e_1, e_2\}$. Συνεπώς έχουμε και ότι:

$$\mathbb{R}^2 \subseteq \text{span}\{e_1, e_2\}. \quad (5.11)$$

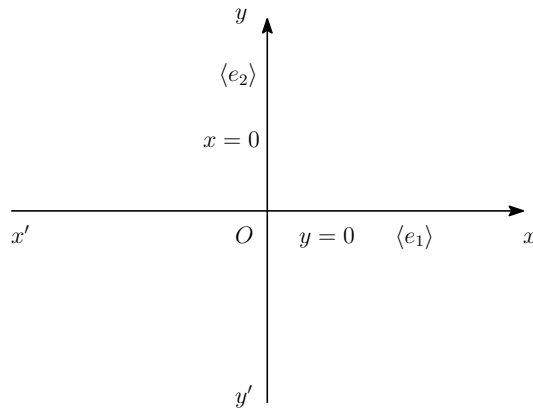
Από τις (5.10) και (5.11) έπεται ότι:

$$\mathbb{R}^2 = \text{span}\{e_1, e_2\}.$$

Άρα από τον Ορισμό 5.5.5 έχουμε ότι ο $\mathbb{R}^2$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος και το σύνολο $\{e_1, e_2\}$ παράγει τον $\mathbb{R}^2$ σύμφωνα με τον Ορισμό 5.5.4. Παρατηρήστε ότι ισχύει:

$$\mathbb{R}^2 = \text{span}\{e_1, e_2\} = \text{span}\{e_1\} \oplus \text{span}\{e_2\}.$$

Έτσι ο $\mathbb{R}^2$ έχει «δύο διαφορετικές γραφές». Τα διανύσματα e_1, e_2 λέγονται τα **κανονικά διανύσματα** του $\mathbb{R}^2$. Σημειώνουμε εδώ ότι ο υπόχωρος $\text{span}\{e_1\}$ είναι ο οριζόντιος άξονας xx' στο επίπεδο, με καρτεσιανή εξίσωση $y = 0$, και ο υπόχωρος $\text{span}\{e_2\}$ είναι ο κατακόρυφος άξονας yy' στο επίπεδο, με καρτεσιανή εξίσωση $x = 0$, βλ. Σχήμα 5.1.

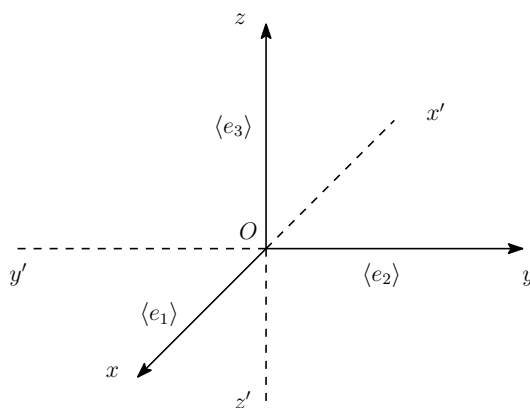


Σχήμα 5.1:

Ομοίως το $\mathbb{R}^3$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος και ισχύει ότι:

$$\mathbb{R}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\} = \text{span}\{e_1\} \oplus \text{span}\{e_2\} \oplus \text{span}\{e_3\}.$$

Επομένως και ο $\mathbb{R}^3$ έχει δύο διαφορετικές γραφές. Εδώ, κατ' αντιστοιχία με τον $\mathbb{R}^2$, οι υπόχωροι $\text{span}\{e_1\}$, $\text{span}\{e_2\}$ και $\text{span}\{e_3\}$ του τριδιάστατου χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι οι άξονες xx' , yy'



Σχήμα 5.2:

και zz' , αντίστοιχα, του τρισσορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων του $\mathbb{R}^3$ με καρτεσιανές εξισώσεις ($y = z = 0$, $x = z = 0$, $x = y = 0$), βλ. Σχήμα 5.2.

Για παράδειγμα, ο άξονας xx' έχει καρτεσιανές εξισώσεις τις $y = 0$ και $z = 0$, όπου η κάθε μία από αυτές είναι η καρτεσιανή εξίσωση ενός επιπέδου του $\mathbb{R}^3$. Συγκεκριμένα, η καρτεσιανή εξίσωση $y = 0$ εκφράζει το επίπεδο xOz και η καρτεσιανή εξίσωση $z = 0$ εκφράζει το επίπεδο xOy . Έτσι ο άξονας xx' προκύπτει ως τομή των δύο κάθετων μεταξύ τους επιπέδων: xOy και xOz .

Γενικά ισχύει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Για το $\mathbb{R}$ ισχύει $\mathbb{R} = \text{span}\{1\}$, δηλαδή ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}$ παράγεται από το μονοσύνολό του $\{1\}$ που περιέχει τη μονάδα, η οποία είναι το κανονικό διάνυσμα του $\mathbb{R}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ισχύει ότι:

$$\mathbb{R}^n = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \text{span}\{e_1\} \oplus \text{span}\{e_2\} \oplus \dots \oplus \text{span}\{e_n\},$$

όπου

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{1}, 0, \dots, 0)$$

είναι το διάνυσμα που έχει 1 στη θέση i και παντού αλλού το 0. Έτσι οι χώροι $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι όλοι πεπερασμένα παραγόμενοι. Τα διανύσματα $e_1, e_2, \dots, e_n$ ονομάζονται τα κανονικά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

Ας δούμε και ένα παράδειγμα διανυσματικού χώρου που δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος.

Παράδειγμα. Ο χώρος των πολωνύμων δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος.

Απόδειξη.* (Με απαγωγή σε άτοπο.)

Ας υποθέσουμε ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{P}$ των πολυωνύμων μιας πραγματικής μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Τότε υπάρχουν κάποια πολυώνυμα $p_1, p_2, \dots, p_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει: $\mathbb{P} = \text{span}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ σύμφωνα με τον Ορισμό 5.5.5. Έστω n_0 να είναι ο μεγαλύτερος βαθμός των πολυωνύμων $p_1, p_2, \dots, p_n$. Δηλαδή $n_0 = \max\{\text{βαθμός } p_i(x), i = 1, 2, \dots, n\}$. Τότε για οποιοδήποτε πολυώνυμο $q \in \text{span}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ισχύει ότι $\text{βαθμός}(q) \leq n_0$. Επομένως το πολυώνυμο $x^{n_0+1} \notin \text{span}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, ενώ βεβαίως $x^{n_0+1} \in \mathbb{P}$. Άρα $\mathbb{P} \neq \text{span}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. $\square$

Παραδείγματα.

1. Ελέγξτε αν το διάνυσμα $(1, 2, 3)$ ανήκει στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από το σύνολο $K = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 1)\}$.

Με βάση τους Ορισμούς 5.5.2 και 5.5.4 έχουμε:

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) \in \text{span}(K) &\Leftrightarrow \text{υπάρχουν } \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (1, 2, 3) = \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, 1, 1) \\ &\Leftrightarrow \text{υπάρχουν } \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (1, 2, 3) = (\lambda - \mu, \mu, \lambda + \mu) \\ &\Leftrightarrow \text{το σύστημα } \begin{cases} \lambda - \mu = 1 \\ \mu = 2 \\ \lambda + \mu = 3 \end{cases} \text{ έχει λύση.} \end{aligned}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύστημα αυτό δεν έχει λύση, επομένως $(1, 2, 3) \notin \text{span}(K)$.

2. Έστω $K = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (-1, 0, -1)\}$. Ελέγξτε αν το K παράγει τον $\mathbb{R}^3$.

Από τον Ορισμό 5.5.4 αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν $\mathbb{R}^3 = \text{span}(K)$, δηλαδή αν και μόνον αν για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ υπάρχουν $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \kappa(1, 1, 1) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(-1, 0, -1) \\ \Leftrightarrow (x, y, z) &= (\kappa - \mu, \kappa + \lambda, \kappa + \lambda - \mu) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa - \mu = x \\ \kappa + \lambda = y \\ \kappa + \lambda - \mu = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Βεβαιωθείτε ότι το σύστημα αυτό έχει λύση $\kappa = x + y - z$, $\lambda = z - x$, $\mu = y - z$, επομένως το K παράγει τον $\mathbb{R}^3$.

*Εκτός ύλης.

3. Θεωρήστε το ακολουθο σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Κάνουμε απαλοιφή Gauss και βρίσκουμε το σύνολο λύσεων του συστήματος αυτού που είναι το:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -\frac{1}{3}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Το S είναι προφανώς ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^{4 \times 1}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{pmatrix} -3x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -\frac{1}{3}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

επομένως

$$S = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Άρα αν ορίσουμε το σύνολο

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{4 \times 1},$$

τότε $\text{span}(K) = S$ δηλαδή, με άλλα λόγια, το K παράγει το S .

Περιγράφουμε τώρα έναν ακόμη τρόπο παραγωγής υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και K να είναι ένα μη κενό υποσύνολό του. Θεωρούμε τώρα το σύνολο όλων των υποχώρων του V που περιέχουν το K , δηλαδή θεωρούμε το σύνολο

$$S_K = \{A \in \mathcal{P}(V) : A \leq V \text{ και } K \subseteq A\},$$

όπου με $\mathcal{P}(V)$ συμβολίζουμε, ως συνήθως, το δυναμοσύνολο του V , δηλαδή το σύνολο που έχει ως στοιχεία του όλα τα υποσύνολα του V , το οποίο είναι πράγματι ένα σύνολο όπως μας επιβεβαιώνει το αξίωμα του δυναμοσυνόλου της θεωρίας συνόλων. Τότε βέβαια $S_K \neq \emptyset$, αφού $V \in S_K$.

Ορίζουμε το σύνολο

$$K^* = \bigcap_{A \in S_K} A,$$

δηλαδή το K^* είναι η τομή όλων των υποχώρων του V που περιέχουν το K . Από την Πρόταση 5.4.3 έπεται ότι το K^* είναι ένας υπόχωρος του V .

Παρατήρηση: Το σύνολο K^* έχει την εξής ιδιότητα: Το K^* είναι ο μικρότερος υπόχωρος που περιέχει το K . Δηλαδή αν $A \leq V$ και $K \subseteq A$, τότε ισχύει $K^* \subseteq A$.

Σχολιο: Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και A, B να είναι δύο υπόχωροι του V . Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B,$$

η οποία έπεται άμεσα από τους ορισμούς.

Για τους υπόχωρους $\text{span}(K)$ και K^* ενός τυχόντος μη κενού υποσυνόλου ενός διανυσματικού χώρου V ισχύει η επόμενη πρόταση:

Πρόταση 5.5.6. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και K να είναι ένα μη κενό υποσύνολό του. Τότε $\text{span}(K) = K^*$.

Ορισμός 5.5.7. Ορίζουμε ως υπόχωρο ενός διανυσματικού χώρου που παράγεται από το κενό σύνολο $\emptyset$, τον μηδενικό υπόχωρο $\{0\}$ του V . Δηλαδή ορίζουμε $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$.

Ειδικά για πεπερασμένα παραγόμενους διανυσματικούς χώρους ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 5.5.8. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος, $n \in \mathbb{N}$, και έστω τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$. Τότε:

(i) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ισχύει:

$$\text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n\} = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, \lambda u_i, \dots, u_n\}.$$

(ii) Για κάθε ζεύγος δεικτών i, j με $i, j \in \{1, \dots, n\}$ και $i \neq j$, και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\text{span}\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_i, \dots, \underbrace{\lambda u_i + u_j}_{j\text{-θέση}}, \dots, u_n\}.$$

(iii) Για κάθε ζεύγος δεικτών i, j με $i, j \in \{1, \dots, n\}$ και $i < j$ ισχύει:

$$\text{span}\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n\} = \text{span}\{u_1, \dots, \underbrace{u_j}_{i\text{-θέση}}, \dots, \underbrace{u_i}_{j\text{-θέση}}, \dots, u_n\}.$$

Μέχρι τώρα έχουμε δει κάποιες πρώτες βασικές έννοιες των διανυσματικών χώρων. Ο φοιτητής θα παρατηρήσει ότι αυτές φαίνονται ασύνδετες με όσα έχουμε πει στα προηγούμενα κεφάλαια για πίνακες, ορίζουσες και γραμμικά συστήματα (εκτός βέβαια από το κλασσικό παράδειγμα ότι ο χώρος των πινάκων είναι ένας διανυσματικός χώρος). Με τις επόμενες δύο προτάσεις αρχίζουμε σιγά-σιγά να συνδέουμε αυτές τις έννοιες. Η επόμενη πρόταση είναι άμεση εφαρμογή της Πρότασης 5.5.8.

Πρόταση 5.5.9. Έστω A, B να είναι δύο γραμμοϊσοδύναμοι $n \times m$ πίνακες. Τότε ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^{1 \times m}$ που παράγεται από τις γραμμές του A ισούται με τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^{1 \times m}$ που παράγεται από τις γραμμές του B .

Ας δούμε τι μας λέει η Πρόταση 5.5.9. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix},$$

δύο $n \times m$ πίνακες. Θέτουμε

$$r_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{im}), \quad r'_i = (b_{i1} \ b_{i2} \ \dots \ b_{im})$$

να είναι οι i -οστές γραμμές των A, B , αντίστοιχα, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Όπως έχουμε ήδη δει ο $\mathbb{R}^{1 \times m}$ είναι διανυσματικός χώρος, και προφανώς $r_i, r'_i \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Θέτουμε

$$R_1 = \text{span}\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \quad \text{και} \quad R_2 = \text{span}\{r'_1, r'_2, \dots, r'_n\},$$

οπότε έχουμε ότι $R_1 \leq \mathbb{R}^{1 \times m}$ και $R_2 \leq \mathbb{R}^{1 \times m}$. Η Πρόταση 5.5.9 μας λέει ότι:

$$\text{Αν ισχύει ότι } A \sim B, \text{ τότε ισχύει ότι: } R_1 = R_2.$$

Είδαμε προηγουμένως ότι η τομή υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου είναι διανυσματικός χώρος. Αυτό δεν ισχύει για την ένωση. Δηλαδή, γενικά η ένωση διανυσματικών υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου δεν είναι υπόχωρος του χώρου. Ισχύει όμως για την ένωση υποχώρων η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 5.5.10. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και $A_1, A_2, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, να είναι υπόχωροι του V . Τότε ισχύει:

$$\text{span}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = A_1 + A_2 + \dots + A_n,$$

όπου με $\bigcup_{i=1}^n A_i$ συμβολίζουμε την ένωση $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

Στη συνέχεια θα δούμε έναν συσχετισμό των διανυσματικών χώρων με τα γραμμικά συστήματα. Θεωρούμε το $m \times n$ ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}$, για κάθε $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Όπως γνωρίζουμε το (5.12) έχει τουλάχιστον μία λύση τη μηδενική $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ και, βεβαίως, το σύνολο λύσεων ενός $m \times n$ γραμμικού συστήματος είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Με τους διανυσματικούς χώρους μπορούμε να μελετήσουμε καλύτερα το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος, γιατί ισχύει η ακόλουθη παρατήρηση:

Παρατήρηση 5.5.11. Το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος (5.12) είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Έστω τώρα το ακόλουθο γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (5.13)$$

Ας δούμε τώρα τον συσχετισμό των λύσεων των (5.12) και (5.13), όταν το (5.13) έχει λύση. Όπως είπαμε το (5.12) έχει πάντα λύση, τουλάχιστον τη μηδενική, ενώ το (5.13) μπορεί να είναι αδύνατο.

Ας υποθέσουμε ότι το (5.13) έχει τουλάχιστον μια λύση την $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Έστω V_h να είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος είναι το σύνολο λύσεων του (5.12), από την Παρατήρηση 5.5.11. Τότε για το σύνολο λύσεων του (5.13), που το συμβολίζουμε με Λ (προφανώς $x_0 \in \Lambda$), ισχύει

$$\Lambda = x_0 + V_h,$$

όπου

$$x_0 + V_h = \{x_0 + u : u \in V_h\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{υπάρχει } u \in V_h \text{ με } y = x_0 + u\}.$$

Επομένως, αν το (5.13) είναι αόριστο, τότε έχει άπειρες λύσεις και ισχύει:

$$\Lambda = x + V_h, \quad \text{για κάθε } x \in \Lambda.$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 5x_5 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα κατά τα γνωστά, π.χ. με τη βοήθεια των γραμμοϊσοδύναμων πινάκων βρίσκουμε ότι το σύνολο λύσεων αυτού του συστήματος είναι το εξής:

$$\Lambda = \{(-3x_2 - x_4 + 2x_5, x_2, -\frac{x_4}{3} - x_5, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5, \text{ όπου } x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Μπορούμε να γράψουμε τη γενική μορφή των λύσεων αυτού του συστήματος ως εξής:

$$\begin{aligned} &(-3x_2 - x_4 + 2x_5, x_2, -\frac{x_4}{3} - x_5, x_4, x_5) \\ &= (-3x_2, x_2, 0, 0, 0) + (-x_4, 0, -\frac{x_4}{3}, x_4, 0) + (2x_5, 0, -x_5, 0, x_5) \\ &= x_2(-3, 1, 0, 0, 0) + x_4(-1, 0, -\frac{1}{3}, 1, 0) + x_5(2, 0, -1, 0, 1). \end{aligned}$$

Θέτουμε για απλότητα συμβολισμού

$$u_1 = (-3, 1, 0, 0, 0), \quad u_2 = (-1, 0, -\frac{1}{3}, 1, 0), \quad u_3 = (2, 0, -1, 0, 1).$$

Άρα εαν $u \in \Lambda$, τότε $u = x_2 u_1 + x_4 u_2 + x_5 u_3$, για $x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\Lambda = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\},$$

και άρα ο Λ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ που παράγεται από τα διανύσματα u_1, u_2, u_3 του $\mathbb{R}^5$.

Για τους γραμμικούς συνδυασμούς διανυσμάτων ισχύει η επόμενη βασική πρόταση:

Πρόταση 5.5.12. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και $u_1, u_2, \dots, u_n$ να είναι στοιχεία του V . Τότε οι επόμενες δύο συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Ένα από τα διανύσματα u_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

(ii) Υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, όχι όλα μηδέν, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0.$$

Η Πρόταση 5.5.12 μας οδηγεί στον ορισμό:

Ορισμός 5.5.13. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος, $n \in \mathbb{N}$, και $u_1, u_2, \dots, u_n$ να είναι στοιχεία του V .

(i) Τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ λέγονται **γραμμικά εξαρτημένα**, εαν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, όχι όλα μηδέν, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0.$$

(ii) Τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα** εαν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Παραδείγματα.

- 1) Το μηδενικό διάνυσμα ενός διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικά εξαρτημένο, αφού για τον πραγματικό αριθμό $1 \neq 0$, έχουμε $1 \cdot 0 = 0$.
- 2) Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος και $u \in V$, $u \neq 0$, τότε επειδή ισχύει $\lambda u = 0$, μόνον εαν $\lambda = 0$, έπεται ότι το u είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
- 3) Αν έχουμε ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $u_1, u_2, \dots, u_n$ ενός διανυσματικού χώρου V για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και κάποιο από τα u_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι το μηδέν, τότε τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Αν $n = 1$ αυτό έπεται από το Παράδειγμα 1. Αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και αν χωρίς βλάβη της γενικότητας ισχύει $u_1 = 0$ και $u_i \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, τότε έχουμε:

$$1 u_1 + 0 u_2 + \dots + 0 u_n = 0,$$

ενώ ο συντελεστής του u_1 είναι $1 (\neq 0)$ και άρα τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

- 4) Από ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου μπορούμε να κατασκευάσουμε γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα ως εξής:

Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και έστω $n \in \mathbb{N}$ και $u_1, u_2, \dots, u_n$ να είναι διανύσματα του V . Αν κάποιο από τα u_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι το 0 , τότε από το Παράδειγμα 3 τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι όλα τα $u_i, i = 1, 2, \dots, n$ είναι διάφορα του 0.

Αν δύο από τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι ίδια – έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $u_1 = u_2$ – τότε έχουμε ότι $1 u_1 + (-1) u_2 = 0$, και άρα τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα. Επίσης έχουμε ότι

$$1 u_1 + (-1) u_2 + 0 u_3 + \dots + 0 u_n = 0, \quad \text{αν } n > 2,$$

και άρα τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι όλα διαφορετικά. Παίρνουμε τυχαία n -άδα αριθμών $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ και ορίζουμε το διάνυσμα $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$. Τότε

$$(-1)w + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0,$$

και άρα τα $w, u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

- 5) Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι εάν V είναι ένας διανυσματικός χώρος, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι διανύσματα του V , όπου δύο από αυτά, τουλάχιστον, είναι τα ίδια τότε τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
- 6) Από το Παράδειγμα 4 έπεται το εξής: Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος $U \subseteq V$, όπου $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $w \in \text{span}(U)$ τα $w, u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
- 7) Η Πρόταση 5.5.12 μας εξασφαλίζει ότι ισχύει και το αντίστροφο του Παραδείγματος 6. Δηλαδή, έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και $u_1, u_2, \dots, u_n$ να είναι διανύσματα του V . Αν τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε υπάρχει κάποιο $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ώστε να ισχύει

$$\begin{cases} \text{είτε} & u_j \in \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_n\} \text{ αν } j \neq 1, n, \\ \text{ή} & u_1 \in \text{span}\{u_2, \dots, u_n\}, \\ \text{ή} & u_n \in \text{span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\}. \end{cases}$$

- 8) Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και έστω $u_1, u_2 \in V$. Αν $u_1 = 0$ ή $u_2 = 0$ τότε από το Παράδειγμα 3, τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα. Επίσης, αν ισχύει $u_1 = u_2$, τότε από το Παράδειγμα 4, τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα και ότι $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ και $u_1 \neq u_2$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 \neq 0$ ή $\lambda_2 \neq 0$ ώστε να ισχύει

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0. \quad (5.14)$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει $\lambda_1 \neq 0$. Τότε από την (5.14) έχουμε:

$$\lambda_1 u_1 = -\lambda_2 u_2 \quad (\text{αφού αν } v, w \in V \text{ με } v + w = 0 \Rightarrow w = -v).$$

Άρα

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 &= -\lambda_2 u_2 \xrightarrow{\lambda_1 \neq 0} \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_1 u_1) = \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 u_2) \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_1} \lambda_1\right) u_1 = \left(\frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2)\right) u_2 \\ \Rightarrow 1 u_1 &= \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) u_2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\Rightarrow u_1 \in \text{span}\{u_2\}. \quad (5.16)$$

Αν ήταν $\lambda_2 = 0$, τότε από την (5.15) θα είχαμε ότι $u_1 = 0$, άτοπο από την υπόθεση. Άρα $\lambda_2 \neq 0$.

Με παρόμοιο τρόπο έπεται από την (5.14) ότι

$$u_2 \in \text{span}\{u_1\}. \quad (5.17)$$

Έστω τυχόν $u_3 \in \text{span}\{u_1\}$. Τότε υπάρχει $\lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$u_3 = \lambda_3 u_1 = \lambda_3 \left(\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) u_2 \right) = \left(\lambda_3 \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right) u_2 \Rightarrow u_3 \in \text{span}\{u_2\}.$$

Άρα

$$\text{span}\{u_1\} \subseteq \text{span}\{u_2\} \quad (5.18)$$

Παρόμοια, από την (5.17) έπεται ότι:

$$\text{span}\{u_2\} \subseteq \text{span}\{u_1\}. \quad (5.19)$$

Από τις (5.18) και (5.19) έπεται

$$\text{span}\{u_1\} = \text{span}\{u_2\}. \quad (5.20)$$

Είναι προφανές ότι η (5.20) ισχύει και όταν $u_1 = u_2$.

Έστω τώρα αντίστροφα ότι έχουμε δύο διανύσματα $u_1, u_2 \in V$ διάφορα του 0, για τα οποία ισχύει ότι: $\text{span}\{u_1\} = \text{span}\{u_2\}$. Άρα υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{R}$: $u_2 = \lambda_0 u_1 \Rightarrow \lambda_0 u_1 - 1 u_2 = 0$, και άρα τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Δείξαμε λοιπόν το εξής: Δύο μη μηδενικά διανύσματα u_1, u_2 ενός διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνον αν $\text{span}\{u_1\} = \text{span}\{u_2\}$.

(Προφανώς αυτό δεν ισχύει αν το ένα από τα δύο είναι το 0 και το άλλο διάφορο του μηδενικού διανύσματος.)

Από αυτό που δείξαμε συμπεραίνουμε το εξής: Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και $u_1, u_2 \in V$, όπου τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε από τα παραπάνω έχουμε ότι $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ και $u_1 \neq u_2$. Ακόμα ισχύει ότι: $\text{span}\{u_1\} \neq \text{span}\{u_2\}$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει κάτι περισσότερο από αυτό. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι:

$$\text{span}\{u_1\} \cap \text{span}\{u_2\} = \{0\}.$$

Προφανώς $\{0\} \subseteq \text{span}\{u_1\} \cap \text{span}\{u_2\}$, αφού το $\text{span}\{u_1\} \cap \text{span}\{u_2\}$ είναι υπόχωρος του V ως τομή των υποχώρων του $\text{span}\{u_1\}, \text{span}\{u_2\}$ και το 0 ανήκει σε κάθε υπόχωρο του V .

Αντίστροφα, έστω $w \in \text{span}\{u_1\} \cap \text{span}\{u_2\}$. Αφού $w \in \text{span}\{u_1\} \Rightarrow$ υπάρχει $\lambda_1 \in \mathbb{R}$: $w = \lambda_1 u_1$. Έστω ότι $w \neq 0$. Τότε $\lambda_1 \neq 0$, γιατί αλλιώς θα είχαμε $w = 0 u_1 = 0$. Άρα $\lambda_1 u_1 = w \in \text{span}\{u_2\} \Rightarrow$ υπάρχει $\lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 u_1 = \lambda_2 u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_2 \Rightarrow u_1 \in \text{span}\{u_2\}$, δηλαδή τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα, άτοπο από την υπόθεση. Άρα δεν υπάρχει $w \neq 0$ με $w \in \text{span}\{u_1\} \cap \text{span}\{u_2\}$ και άρα $w = 0$. Επομένως, $\text{span}\{u_1\} \cap \text{span}\{u_2\} \subseteq \{0\}$ και άρα $\text{span}\{u_1\} \cap \text{span}\{u_2\} = \{0\}$.

Δηλαδή δείξαμε ότι αν τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε ισχύει ότι: $\text{span}\{u_1\} \cap \text{span}\{u_2\} = \{0\}$. Στην περίπτωση αυτή το άθροισμα $\text{span}\{u_1\} + \text{span}\{u_2\}$ είναι ευθύ.

- 9) Ας εφαρμόσουμε το παράδειγμα 8 στο $\mathbb{R}^2$. Ας θεωρήσουμε τα διανύσματα $e_1 = (1, 0)$ και $e_2 = (0, 1)$ του $\mathbb{R}^2$. Προφανώς $e_1 \neq 0, e_2 \neq 0$ και $e_1 \neq e_2$. Έχουμε δείξει ότι $\mathbb{R}^2 = \text{span}\{e_1\} \oplus \text{span}\{e_2\} \Rightarrow \text{span}\{e_1\} \cap \text{span}\{e_2\} = \{0\}$ και άρα $\text{span}\{e_1\} \neq \text{span}\{e_2\}$. Συνεπώς από το παράδειγμα 8, τα e_1, e_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Φυσικά αυτό μπορούμε να το δείξουμε και άμεσα από τον ορισμό. Αφού, επιπλέον, $\mathbb{R}^2 = \text{span}\{e_1, e_2\}$ όπως έχουμε δείξει, έπεται από το παράδειγμα 6, ότι για κάθε $u \in \mathbb{R}^2$ τα u, e_1, e_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα

- 10) Θα δείξουμε τώρα ότι τα διανύσματα e_1, e_2, e_3 του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ με:

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 &\Leftrightarrow \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Έτσι δεν υπάρχουν μ_1, μ_2, μ_3 που να είναι όλα διάφορα του μηδενός ώστε να ισχύει: $\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 = 0$ και άρα τα e_1, e_2, e_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ακόμα, όπως έχουμε πει, ισχύει ότι $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$. Άρα από το παράδειγμα 6 έχουμε ότι για κάθε $u \in \mathbb{R}^3$ τα διανύσματα u, e_1, e_2, e_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Παρατήρηση: Ο ορισμός της γραμμικής εξάρτησης ενός πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου δεν λαμβάνει υπ' όψιν του τη σειρά με την οποία γράφουμε τα διανύσματα ή με άλλα λόγια δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία γράφουμε τα διανύσματα. Έτσι, για παράδειγμα, αν u_1, u_2, u_3, u_4 είναι τέσσερα γραμμικά εξαρτημένα (ή ανεξάρτητα) διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου, τότε και τα διανύσματα u_2, u_4, u_1, u_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα (ή ανεξάρτητα), αντίστοιχα. Αυτό μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 5.5.14. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος. Έστω $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, να είναι ένα μη κενό και πεπερασμένο υποσύνολο του V , δηλαδή $S \subseteq V$. Τότε:

- (i) Το S λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
- (ii) Το S λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έστω τώρα $X \subseteq V$.

Το X λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν υπάρχει ένα μη κενό και πεπερασμένο, γραμμικά εξαρτημένο υποσύνολο $S \subseteq X$.

Αν το $X \subseteq V$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο τότε λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο. Δηλαδή, ένα υποσύνολο $X \subseteq V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν κάθε μη κενό και πεπερασμένο υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Το κενό σύνολο θεωρείται εξ' ορισμού γραμμικά ανεξάρτητο.

Ας έρθουμε τώρα στις σημαντικότερες περιπτώσεις διανυσματικών χώρων που μελετάμε εμείς σε αυτό το μάθημα. Δηλαδή στους χώρους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$.

Θεωρούμε δύο τυχαία και διάφορα μεταξύ τους διανύσματα του $\mathbb{R}^2$, έστω τα $a = (a_1, a_2)$ και $b = (b_1, b_2)$. Θέλουμε να βρούμε μια συνθήκη που να μας εξασφαλίζει ότι τα a, b είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Βάσει του ορισμού πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $x_1 a + x_2 b = 0$. Ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 a + x_2 b = 0 &\Leftrightarrow x_1(a_1, a_2) + x_2(b_1, b_2) = (0, 0) \Leftrightarrow (x_1 a_1, x_1 a_2) + (x_2 b_1, x_2 b_2) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow (x_1 a_1 + x_2 b_1, x_1 a_2 + x_2 b_2) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 a_1 + x_2 b_1 = 0 \\ x_1 a_2 + x_2 b_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 = 0 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Το γραμμικό σύστημα (5.21) είναι ομογενές σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τους x_1, x_2 . Αυτό έχει πάντα λύση τη μηδενική. Γνωρίζουμε απο τα προηγούμενα ότι έχει μη μηδενικές λύσεις μόνο αν $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. Άρα:

- τα a, b είναι γραμμικά εξαρτημένα αν ισχύει: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, και
- είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν ισχύει: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Ανάλογα, έστω $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ και $c = (c_1, c_2, c_3)$ να είναι τρία μη μηδενικά και διάφορα μεταξύ τους διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Θέτουμε

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Τότε:

- (i) αν $D \neq 0$ τα a, b, c είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ενώ
- (ii) αν $D = 0$ τα a, b, c είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Αν πάρουμε τρία διανύσματα a, b, c του $\mathbb{R}^2$ και αναρωτηθούμε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δουλεύοντας όπως πριν, καταλήγουμε σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 3 αγνώστους το οποίο, όπως έχουμε δει, είναι πάντα αόριστο και άρα τρία οποιαδήποτε διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.

Με όμοιο τρόπο δουλεύοντας και καταλήγοντας σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 4 αγνώστους καταλήγουμε στο ότι τεσσερα οποιαδήποτε διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.

Στη συνέχεια αναφέρουμε δύο ακόμα προτάσεις σχετικές με τη γραμμική εξάρτηση-ανεξαρτησία διανυσμάτων.

Πρόταση 5.5.15. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και A, B να είναι δύο μη κενά και πεπερασμένα υποσύνολά του, τέτοια ώστε $B \subseteq A$. Τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) Αν το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε και το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
- (ii) Αν το B είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε και το A είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Πρόταση 5.5.16. Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος, $n \in \mathbb{N}$, και $u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}$ να είναι $n+1$ διανύσματα του V . Αν τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τα $u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) $u_{n+1} \in \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.
- (ii) Το u_{n+1} γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $u_1, u_2, \dots, u_n$.

5.6 Βάση και διάσταση ενός διανυσματικού χώρου

Από την παράγραφο αυτή και εξής, όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε έναν διανυσματικό χώρο V θα γράφουμε χάριν συντομίας «ο δ.χ. V ».

Συνεχίζουμε δίνοντας τον ορισμό μιας άλλης έννοιας, της έννοιας της βάσης ενός διανυσματικού χώρου (δ.χ.).

Ορισμός 5.6.1. Έστω V να είναι ένας δ.χ. και έστω B να είναι ένα υποσύνολο του V . Το B λέγεται βάση του V αν:

- (i) είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, και
- (ii) παράγει τον V , δηλαδή $\text{span}(B) = V$.

Ένας δ.χ. λέγεται πεπερασμένης διάστασης αν υπάρχει μια βάση του χώρου αυτού η οποία είναι πεπερασμένο σύνολο. Αν ένας δ.χ. δεν είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε λέμε ότι είναι δ.χ. χώρος άπειρης διάστασης.

Εμείς εδώ θα ασχοληθούμε κυρίως με δ.χ. πεπερασμένης διάστασης. Για δ.χ. πεπερασμένης διάστασης ισχύει το ακόλουθο βασικό θεώρημα:

Θεώρημα 5.6.2. Έστω V να είναι ένας δ.χ. και έστω B να είναι ένα μη κενό και πεπερασμένο υποσύνολο του V . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το B είναι μια βάση του V .
- (ii) Κάθε στοιχείο $u \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του B .

Αναλυτικότερα, το θεώρημα αυτό μας λέει το εξής: Έστω B να είναι ένα μη κενό και πεπερασμένο υποσύνολο του δ.χ. V . Ας υποθέσουμε ότι το B είναι μια βάση του V και ας θεωρήσουμε τυχόν $u \in V$. Τότε υπάρχουν διάφορα ανά δύο $u_1, u_2, \dots, u_n \in B$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n.$$

Επίσης, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν και τα διάφορα ανά δύο διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_m \in B$, $m \in \mathbb{N}$, και πραγματικοί αριθμοί $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε:

$$u = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_m w_m,$$

τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) $n = m$,
- (ii) $\lambda_i = \mu_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, και
- (iii) $u_i = w_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Πόρισμα 5.6.3. Το Θεώρημα 5.6.2 ισχύει ακόμα και για δ.χ. άπειρης διάστασης.

Παραδείγματα.

- 1) Έχουμε δείξει ότι το σύνολο $B = \{e_1, e_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο $\mathbb{R}^2$ και ότι $\mathbb{R}^2 = \text{span}(B)$. Άρα το $B = \{e_1, e_2\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$, η οποία συνήθως αναφέρεται ως **η κανονική βάση** του $\mathbb{R}^2$.
- 2) Έχουμε δείξει επίσης ότι το $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και ότι $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$. Άρα το $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$, η **κανονική βάση** του $\mathbb{R}^3$.
- 3) Το σύνολο $B' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ αποτελεί μια άλλη βάση του $\mathbb{R}^3$ αφού τα διανύσματα $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (γιατί;) και, επιπλέον, κάθε διάνυσμα (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός τους αφού

$$(x, y, z) = (x - y)(1, 0, 0) + (y - z)(1, 1, 0) + z(1, 1, 1).$$

- 4) Το σύνολο

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

αποτελεί μια βάση του διανυσματικού χώρου των 2×2 πινάκων $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Είναι εύκολο να δείξετε ότι οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και, προφανώς, για κάθε πίνακα $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ισχύει:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Για τη συνέχεια αναφέρουμε κάποια βασικά αποτελέσματα της θεωρίας που έχουμε αναπτύξει μέχρι τώρα. Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι ένα κεντρικό θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας.

Θεώρημα 5.6.4. Έστω V να είναι ένας δ.χ. και $n, m \in \mathbb{N}$. Αν n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του V ανήκουν σε έναν υπόχωρο του V που παράγεται από m στοιχεία, τότε $n \leq m$.

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος δ.χ. έχει μία βάση. Επιπλέον, αν η βάση αυτή είναι πεπερασμένη και έχει n στοιχεία, τότε κάθε άλλη βάση του είναι επίσης πεπερασμένη και έχει n στοιχεία.

Παρατήρηση: Ο δ.χ. του Θεωρήματος 5.6.4 είναι ένας αυθαίρετος δ.χ. πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης.

Από το κεντρικό Θεώρημα 5.6.4 έπονται τα ακόλουθα πορίσματα:

Πόρισμα 5.6.5. Έστω V δ.χ. ο οποίος παράγεται από m διανύσματα. Τότε κάθε υποσύνολο του V που περιέχει τουλάχιστον $m + 1$ στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Πόρισμα 5.6.6. Έστω V δ.χ. και n να είναι ένας φυσικός αριθμός. Αν ο V έχει μια πεπερασμένη βάση με n στοιχεία, τότε κάθε βάση του V είναι πεπερασμένη και έχει n στοιχεία.

Σχόλιο: Στην περίπτωση που ο δ.χ. V έχει μια βάση που αποτελείται από 0 στοιχεία, τότε $V = \{0\} = \text{span}(\emptyset)$, δηλαδή η βάση του χώρου $\{0\}$ δεν είναι το 0 αλλά το κενό σύνολο.

Το Πόρισμα 5.6.6 μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.6.7. Έστω V δ.χ. που παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο, δηλαδή ο V είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Το πλήθος των στοιχείων μιας οποιασδήποτε βάσης του V είναι μια σταθερά για τον V , που συμβολίζεται με $\dim V$, και ονομάζεται η διάσταση του V .

Το επόμενο πόρισμα μας εξασφαλίζει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος δ.χ. έχει μία βάση.

Πόρισμα 5.6.8. Έστω V να είναι ένας πεπερασμένα παραγόμενος δ.χ. και B_0 ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V . Τότε υπάρχει μια πεπερασμένη βάση του V με $B_0 \subseteq B$.

Από το Πόρισμα 5.6.8 έπεται αμέσως το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 5.6.9. Έστω V να είναι ένας πεπερασμένα παραγόμενος δ.χ. Τότε ο V έχει τουλάχιστον μια πεπερασμένη βάση.

Το θεώρημα αυτό ισχύει και για απειροδιάστατους δ.χ. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι:

Θεώρημα 5.6.10. Κάθε δ.χ. V έχει μια βάση.

Για τη συνέχεια θα δούμε κάποιες ιδιότητες των διαστάσεων και των βάσεων.

Πρόταση 5.6.11. Έστω V δ.χ. και $n \in \mathbb{N}$. Τότε κάθε ζευγάρι από τις ακόλουθες τρεις προτάσεις συνεπάγεται την τρίτη:

(i) $\dim V = n$.

(ii) Τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_n$ παράγουν τον V , δηλαδή $V = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

(iii) Τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Πρόταση 5.6.12. Έστω V να είναι δ.χ. πεπερασμένης διάστασης και A υπόχωρος του V . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Ο A είναι πεπερασμένης διάστασης και $\dim A \leq \dim V$.

(ii) $A = V$ αν και μόνον αν $\dim A = \dim V$.

Έστω A, B να είναι υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης του δ.χ. V . Το ακόλουθο θεώρημα συνδέει τις διαστάσεις των υποχώρων $A, B, A + B$ και $A \cap B$ του V .

Θεώρημα 5.6.13. Έστω V να είναι αυθαίρετος δ.χ. πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης και έστω A, B να είναι υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης του V . Τότε βέβαια ο $A \cap B$ είναι υπόχωρος του A και άρα ο $A \cap B$ έχει πεπερασμένη διάσταση από την Πρόταση 5.6.12 (i). Επίσης ο $A + B$ έχει πεπερασμένη διάσταση και ισχύει η ισότητα:

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B).$$

Θεώρημα 5.6.14. Έστω V δ.χ., $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ να είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V , και $A = \{u_1, u_2, \dots, u_l\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V . Τότε υπάρχει ένα σύνολο $B_0 \subseteq B$ με $m - l$ στοιχεία έτσι ώστε $V = \text{span}(B_0 \cup A)$. Αν, επιπλέον, το B είναι μια βάση του V , τότε το $B_0 \cup A$ είναι επίσης μια βάση του V .

Πρόταση 5.6.15. Έστω V να είναι ένας πεπερασμένα παραγόμενος δ.χ. και έστω B να είναι μια βάση του V . Αν $K \subseteq B$ και $K' = B \setminus K = \{u \in B : u \notin K\}$, τότε ισχύει:

$$V = \text{span}(K) \oplus \text{span}(K').$$

Με όλα τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε ολοκληρώσει τη βασική θεωρία των διανυσματικών χώρων. Στη συνέχεια θα δούμε διάφορες εφαρμογές της θεωρίας αυτής.

5.7 Εφαρμογές και παραδείγματα στους διανυσματικούς χώρους

Εφαρμογή 5.7.1. Η απλούστερη, μη τετριμμένη, περίπτωση διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Το $\mathbb{R}$ έχει ακριβώς δύο υποχώρους, το $\{0\}$ και το ίδιο το $\mathbb{R}$. Ο $\mathbb{R}$ έχει διάσταση 1, αφού $\mathbb{R} = \text{span}\{1\}$. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, έχουμε $\text{span}\{a\} = \mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, με $a \neq 0$ και $b \neq 0$, έχουμε $\text{span}\{a\} \cap \text{span}\{b\} = \mathbb{R}$, ενώ βέβαια αν $a \neq 0$ έχουμε $\text{span}\{a\} \cap \{0\} = \{0\}$.

Εφαρμογή 5.7.2. Ας πάμε στην αμέσως επόμενη ενδιαφέρουσα περίπτωση διανυσματικού χώρου, στον $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε δύο τυχαία διανύσματα u_1, u_2 του $\mathbb{R}^2$. Προφανώς αν $u_1 = 0$ ή $u_2 = 0$ ή $u_1 = u_2$, τότε τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα. Έστω $u_1 = (a_1, b_1)$, $u_2 = (a_2, b_2)$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Είδαμε προηγούμενα ότι τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα μόνον εάν ισχύει:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Έστω τώρα ότι ισχύει:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Τότε τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Είδαμε ότι τα διανύσματα e_1, e_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ότι το $\{e_1, e_2\}$ παράγει τον $\mathbb{R}^2$. Άρα το $S = \{e_1, e_2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$, που ονομάζεται η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, και άρα ο $\mathbb{R}^2$ έχει διάσταση 2.

Αφού τώρα ο $\mathbb{R}^2$ έχει διάσταση 2 και τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, από την Πρόταση 5.6.11 έπεται ότι τα u_1, u_2 παράγουν τον $\mathbb{R}^2$ και άρα το $\{u_1, u_2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$. Επιπλέον, από το Θεώρημα 5.6.2 έπεται ότι κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2 .

Ας κάνουμε μια εφαρμογή των παραπάνω.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τα διανύσματα $u_1 = (1, 2)$ και $u_2 = (3, 4)$ του $\mathbb{R}^2$. Να δειχθεί ότι τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και να γραφεί το διάνυσμα $u_0 = (5, 6)$ ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2 .

Λύση. Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0.$$

Άρα τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα υπάρχουν μοναδικά $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$u_0 = xu_1 + yu_2. \quad (5.22)$$

Η (5.22) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} u_0 = xu_1 + yu_2 &\Leftrightarrow (5, 6) = x(1, 2) + y(3, 4) \Leftrightarrow (5, 6) = (x, 2x) + (3y, 4y) \\ &\Leftrightarrow (5, 6) = (x + 3y, 2x + 4y) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Έτσι για να βρούμε τα x, y αρκεί να λύσουμε το γραμμικό 2×2 σύστημα (5.23). Ας το λύσουμε απλά. Αφαιρούμε την δεύτερη εξίσωση από την πρώτη και έχουμε $y = 2$. Άρα από τη δεύτερη εξίσωση της (5.23): $x + 2 \cdot 2 = 3 \Rightarrow x = -1$. Επομένως έχουμε:

$$u_0 = -u_1 + 2u_2.$$

Επαλήθευση. Έχουμε:

$$-u_1 + 2u_2 = -(1, 2) + 2(3, 4) = (-1, -2) + (6, 8) = (-1 + 6, -2 + 8) = (5, 6) = u_0.$$

Αφού τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε ότι $\text{span}\{u_1\} \cap \text{span}\{u_2\} = \{0\}$, από το παράδειγμα 8 στη σελίδα 114.

Όπως είδαμε στο παράδειγμα 8 στη σελίδα 114, για δύο τυχόντα μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ θα έχουμε είτε ότι $\text{span}\{a\} \cap \text{span}\{b\} = \text{span}\{a\} = \text{span}\{b\}$ αν τα a, b είναι γραμμικά εξαρτημένα, ή ότι $\text{span}\{a\} \cap \text{span}\{b\} = \{0\}$ αν τα a, b είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και τότε τα a, b παράγουν τον $\mathbb{R}^2$ και κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των a, b , όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Έτσι κάθε ζεύγος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\{a, b\}$ του $\mathbb{R}^2$ είναι μια βάση του, και άρα το $\mathbb{R}^2$ έχει άπειρες βάσεις.

Γενικά ισχύει ότι κάθε διανυσματικός χώρος είτε πεπερασμένης είτε άπειρης διάστασης έχει άπειρες το πλήθος βάσεις. Από αυτό εξαιρείται μόνο ο μηδενικός χώρος $\{0\}$, ο οποίος όπως έχουμε πει έχει (κατά σύμβαση) ως μοναδική του βάση το κενό σύνολο $\emptyset$ (προσοχή, όχι το 0).

Εφαρμογή 5.7.3. Ας πάμε στον χώρο $\mathbb{R}^3$ που είναι το αμέσως επόμενο σημαντικότερο παράδειγμα διανυσματικού χώρου μετά το $\mathbb{R}^2$ (επίπεδο του χώρου). (Ο χώρος $\mathbb{R}^3$ ταυτίζεται με ολόκληρο τον τριδιάστατο χώρο που ζούμε.) Όπως έχουμε δει στον $\mathbb{R}^3$ ισχύουν τα εξής: Τα e_1, e_2, e_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ αφού $\text{span}\{e_1, e_2, e_3\} = \mathbb{R}^3$, όπως έχουμε δει. Άρα ο $\mathbb{R}^3$ έχει διάσταση 3 και μία βάση του είναι το σύνολο $\{e_1, e_2, e_3\}$, το οποίο ονομάζεται η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Ας πάρουμε τώρα τρία μη μηδενικά και διάφορα μεταξύ τους διανύσματα u_1, u_2, u_3 του $\mathbb{R}^3$. Έστω ότι

$$u_1 = (a_1, a_2, a_3), \quad u_2 = (b_1, b_2, b_3), \quad u_3 = (c_1, c_2, c_3).$$

Έχουμε δείξει ότι τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνον αν ισχύει:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Έστω λοιπόν ότι $D \neq 0$, οπότε τα u_1, u_2, u_3 είναι τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Αφού τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ο $\mathbb{R}^3$ έχει διάσταση 3 (όπως δείξαμε νωρίτερα) έπεται από την Πρόταση 5.6.11 ότι τα u_1, u_2, u_3 παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ και άρα το σύνολο $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Επιπλέον, από το Θεώρημα 5.6.2 έπεται ότι κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2, u_3 .

Ας κάνουμε τώρα μια εφαρμογή των παραπάνω.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$u_1 = (1, 2, 3), \quad u_2 = (4, 5, 6), \quad u_3 = (8, 9, 11) \quad \text{του } \mathbb{R}^3.$$

Ναδειχθεί ότι τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και να γραφεί το διάνυσμα $u_0 = (11, 12, 13)$ ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2, u_3 .

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 11 - 6 \cdot 9) - 4 \cdot (2 \cdot 11 - 3 \cdot 9) + 8 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = -3 \neq 0. \end{aligned}$$

Άρα τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς το $\{u_1, u_2, u_3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

Έτσι το u_0 γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2, u_3 .

Άρα υπάρχουν μοναδικά $x, y, z \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$u_0 = xu_1 + yu_2 + zu_3. \quad (5.24)$$

Από την (5.24) παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} u_0 = xu_1 + yu_2 + zu_3 &\Leftrightarrow (11, 12, 13) = x(1, 2, 3) + y(4, 5, 6) + z(8, 9, 11) \\ &\Leftrightarrow (11, 12, 13) = (x, 2x, 3x) + (4y, 5y, 6y) + (8z, 9z, 11z) \\ &\Leftrightarrow (11, 12, 13) = (x + 4y + 8z, 2x + 5y + 9z, 3x + 6y + 11z) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + 8z = 11 \\ 2x + 5y + 9z = 12 \\ 3x + 6y + 11z = 13 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Έτσι για να προσδιορίσουμε τα x, y, z αρκεί να λύσουμε το γραμμικό 3×3 σύστημα (5.25). Το σύστημα (5.25) έχει μοναδική λύση από τον κανόνα του Cramer αφού η ορίζουσά του (όπως

έχουμε ήδη υπολογίσει) είναι:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 11 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Το σύστημα (5.25) μπορούμε να το λύσουμε με κλιμακοποίηση ή με τον κανόνα του Cramer. Μιας και υπολογίσαμε την ορίζουσα D ας το λύσουμε με τον κανόνα του Cramer. Έχουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} 11 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 9 \\ 13 & 6 & 11 \end{vmatrix} = 11 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 13 & 11 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 13 & 6 \end{vmatrix} = 7.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 8 \\ 2 & 12 & 9 \\ 3 & 13 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 13 & 11 \end{vmatrix} - 11 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = -10.$$

$$\begin{aligned} D_z &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 2 & 5 & 12 \\ 3 & 6 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} + 11 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 13 - 6 \cdot 12) - 4 \cdot (2 \cdot 13 - 3 \cdot 12) + 11 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{7}{3}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{3}, \quad z = \frac{D_z}{D} = 0.$$

Επομένως έχουμε τελικά ότι:

$$u_0 = -\frac{7}{3}u_1 + \frac{10}{3}u_2 + 0u_3 = -\frac{7}{3}u_1 + \frac{10}{3}u_2.$$

Επαλήθευση. Έχουμε:

$$\begin{aligned} -\frac{7}{3}u_1 + \frac{10}{3}u_2 &= -\frac{7}{3}(1, 2, 3) + \frac{10}{3}(4, 5, 6) = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}, -7\right) + \left(\frac{40}{3}, \frac{50}{3}, 20\right) \\ &= \left(-\frac{7}{3} + \frac{40}{3}, -\frac{14}{3} + \frac{50}{3}, -7 + 20\right) = (11, 12, 13) = u_0. \end{aligned}$$

Εφαρμογή 5.7.4. Ας εφαρμόσουμε τώρα τη θεωρία που έχουμε αναπτύξει για να βρούμε την τομή υποχώρων στους χώρους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$. Θα δώσουμε αρχικά κάποιους ορισμούς που θα μας βοηθήσουν στη συνέχεια να συσχετίσουμε κάποιες έννοιες με έννοιες που μας είναι οικείες από τη γεωμετρία.

Έστω V να είναι τυχόν διανυσματικός χώρος. Ένας υπόχωρος του V διάστασης 1 θα λέγεται **ευθεία** του V . Τις ευθείες θα τις συμβολίζουμε (όπως στη γεωμετρία) με $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$. Έστω ε να είναι μια ευθεία του V . Τότε υπάρχει $u \in V, u \neq 0$, ώστε $\varepsilon = \text{span}\{u\}$.

Ένας υπόχωρος του V διάστασης 2 θα λέγεται **επίπεδο** του V . Τα επίπεδα θα τα συμβολίζουμε με $\Pi_1, \Pi_2, \dots$. Έτσι αν Π είναι ένα επίπεδο του V , τότε $\dim \Pi = 2$ και άρα υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $u_1, u_2 \in V$, ώστε να ισχύει: $\Pi = \text{span}\{u_1, u_2\}$.

Παρατήρηση: Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος, ε να είναι μια ευθεία του V , και V_1 να είναι ένας υπόχωρος του V . Προφανώς ισχύει είτε ότι ε είναι υποσύνολο του V_1 ή ότι δεν είναι υποσύνολο του V_1 .

Ας υποθέσουμε ότι ε δεν είναι υποσύνολο του V_1 . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα διάνυσμα $a \in \varepsilon$ ώστε $a \notin V_1$. Αφού $\dim \varepsilon = 1$ υπάρχει $u \in V, u \neq 0$, ώστε: $\varepsilon = \text{span}\{u\}$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $u_2 \in \varepsilon$ με $u_2 \in V_1$. Τότε $u_2 = \lambda u$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Έστω ότι $\lambda \neq 0$. Τότε αφού $a \in \varepsilon \Rightarrow a = \mu u$ με $\mu \neq 0$. (Πράγματι, αν ήταν $\mu = 0$, τότε $a = 0u = 0$, το οποίο προφανώς ανήκει στον V_1 . Άτοπο αφού υποθέσαμε ότι $a \notin V_1$.)

Άρα αφού $u_2 \in V_1$ και το V_1 είναι υπόχωρος του V έπεται (επειδή $\lambda \neq 0$) ότι:

$$\frac{\mu}{\lambda} u_2 \in V_1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{\lambda} (\lambda u) = \mu u = a \in V_1,$$

άτοπο. Στο άτοπο καταλήξαμε έχοντας υποθέσει ότι $\lambda \neq 0$. Άρα $\lambda = 0$ και, επομένως, $u_2 = 0u = 0$. Έτσι δείξαμε ότι:

$$\varepsilon \cap V_1 = \{0\}.$$

Δηλαδή, αποδείξαμε ότι για κάθε ευθεία ε του V και για κάθε υπόχωρο $V_1 \leq V$ του V ισχύει ότι:

(i) είτε $\varepsilon \subseteq V_1$,

(ii) ή $\varepsilon \cap V_1 = \{0\}$.

Όπως έχουμε δείξει αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι δύο ευθείες του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$, τότε

(i) είτε θα ισχύει ότι $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ή

(ii) $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \{0\}$.

Προφανώς κάθε ευθεία (εφ' όσον είναι υπόχωρος του V) περιέχει το 0. Έτσι είμαστε σε συμφωνία με τη γεωμετρία όπου δύο ευθείες του επιπέδου ή του χώρου που διέρχονται από το 0 και είναι διαφορετικές έχουν μοναδικό κοινό σημείο το 0.

Επίσης, αν Π είναι ένα επίπεδο του χώρου και ε είναι μια ευθεία του $\mathbb{R}^3$, τότε είτε η ευθεία ε περιέχεται στο Π , είτε η ε έχει κοινό σημείο με το Π μόνο το 0 (από το αποτέλεσμα που δείξαμε αμέσως πριν).

Ας θεωρήσουμε τώρα συγκεκριμένα ότι το Π είναι ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ και η ε είναι μια ευθεία του $\mathbb{R}^3$ που δεν περιέχεται στο Π . Τότε όπως δείξαμε ισχύει:

$$\Pi \cap \varepsilon = \{0\} \Rightarrow \dim(\Pi \cap \varepsilon) = \dim(\{0\}) = 0.$$

Άρα, από το Θεώρημα 5.6.13, έχουμε:

$$\dim(\Pi \oplus \varepsilon) = \dim \Pi + \dim \varepsilon - \dim(\Pi \cap \varepsilon) = 2 + 1 - 0 = 3.$$

Προφανώς $\Pi \oplus \varepsilon \leq \mathbb{R}^3$ και επειδή, όπως δείξαμε, $\dim(\Pi \oplus \varepsilon) = 3$, έπεται από την Πρόταση 5.6.12 ότι:

$$\Pi \oplus \varepsilon = \mathbb{R}^3.$$

Έστω τώρα ότι $B_1 = \{u_1, u_2\}$ είναι μια βάση του Π και $\varepsilon = \text{span}\{u_3\}$, όπου $u_3 \in \mathbb{R}^3$.

Δηλαδή ισχύει: $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{u_1, u_2\} \oplus \text{span}\{u_3\}$.

Έτσι, για κάθε $u \in \mathbb{R}^3$ έχουμε ότι $u = w_1 + w_2$ με $w_1 \in \text{span}\{u_1, u_2\}$ και $w_2 \in \text{span}\{u_3\}$, επομένως $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$, για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, και άρα τα u_1, u_2, u_3 παράγουν τον $\mathbb{R}^3$, οπότε από την Πρόταση 5.6.11 έπεται ότι τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα το σύνολο $B_0 = \{u_1, u_2, u_3\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.

Έτσι, με την παραπάνω διαδικασία μπορούμε από κάθε επίπεδο Π του $\mathbb{R}^3$ και κάθε ευθεία ε του $\mathbb{R}^3$ η οποία δεν ανήκει στο Π να βρούμε μια βάση $B_0 = \{u_1, u_2, u_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ ώστε $\Pi = \text{span}\{u_1, u_2\}$ και $\varepsilon = \text{span}\{u_3\}$.

Ας πάρουμε τώρα δύο διανύσματα u_1, u_2 του $\mathbb{R}^3$ γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $V_1 = \text{span}\{u_1, u_2\}$. Τότε βέβαια ισχύει ότι το $B_0 = \{u_1, u_2\}$ είναι βάση του V_1 , από τον ορισμό της βάσης. Έτσι $\dim V_1 = 2$ και το V_1 είναι ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$. Ας πάρουμε τώρα τυχόν διάνυσμα $u_3 \in \mathbb{R}^3$. Τότε υπάρχουν δύο δυνατότητες:

- (i) $u_3 \in V_1$ και τότε το u_3 γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2 . Για να βρούμε πώς γράφεται το u_3 ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2 θα πρέπει να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα όπως κάναμε σε προηγούμενα παραδείγματα.
- (ii) $u_3 \notin V_1$. Τότε ισχύει $V_1 \cap \text{span}\{u_3\} = \{0\}$ και όπως δείξαμε νωρίτερα το σύνολο $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.

Ας πάρουμε τώρα δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα u_1, u_2 του $\mathbb{R}^3$ και έστω $\Pi = \text{span}\{u_1, u_2\}$. Τότε κάποιο από τα διανύσματα e_1, e_2, e_3 δεν ανήκει στο Π , γιατί αν όλα τα

e_1, e_2, e_3 ανήκαν στο Π , τότε $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \Pi$, και άρα $\text{span}\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \Pi$, αφού ο Π είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και ο $\text{span}\{e_1, e_2, e_3\} = \{e_1, e_2, e_3\}^*$ από γνωστή πρόταση, όπου ο $\{e_1, e_2, e_3\}^*$ είναι εξ' ορισμού ο ελάχιστος υπόχωρος που παράγεται από τα e_1, e_2, e_3 . Όμως ισχύει ότι $\text{span}\{e_1, e_2, e_3\} = \mathbb{R}^3$. Άρα $\mathbb{R}^3 \subseteq \Pi$ που φυσικά είναι άτοπο, διότι αν ίσχυε, μιας και προφανώς $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$, τότε θα είχαμε $\mathbb{R}^3 = \Pi$ και άρα $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \Pi \Leftrightarrow 3 = 2$, άτοπο.

Άρα κάποιο από τα διανύσματα e_1, e_2, e_3 δεν ανήκει στο Π . Ελέγχουμε ποιό από τα e_1, e_2, e_3 δεν ανήκει στο Π εξετάζοντας αν το σύστημα $e_i = xu_1 + yu_2$ έχει λύση με αγνώστους $x, y \in \mathbb{R}$ για $i = 1, 2, 3$. Τουλάχιστον ένα από τα τρία συστήματα $e_i = xu_1 + yu_2$, για $i = 1, 2, 3$ δεν έχει λύση, (μπορεί η δύο από αυτά ή και τα τρία) οπότε αν $e_1 \notin \Pi$, έπεται από τα παραπάνω ότι το σύνολο $\text{span}\{u_1, u_2, e_1\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.

Εφαρμογή 5.7.5. Έστω τώρα u_1, u_2, u_3 να είναι τρία διαφορετικά, μη μηδενικά, διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Υποθέτουμε ότι τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα. Διακρίνουμε κάποιες περιπτώσεις:

- (i) Οι ευθείες $\varepsilon_1 = \text{span}\{u_1\}$, $\varepsilon_2 = \text{span}\{u_2\}$, $\varepsilon_3 = \text{span}\{u_3\}$ ταυτίζονται, δηλαδή $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

Τότε προφανώς ισχύει ότι:

$$\text{span}\{u_1, u_2, u_3\} = \text{span}\{u_1\} + \text{span}\{u_2\} + \text{span}\{u_3\} = \text{span}\{u_1\} = \text{span}\{u_2\} = \text{span}\{u_3\}.$$

- (ii) Δεν ισχύει το (i).

Τότε δύο τουλάχιστον από τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι διαφορετικές. Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ισχύει $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Τότε όπως είδαμε ισχύει: $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \{0\}$. Τότε, όπως έχουμε δείξει, τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θέτουμε $\Pi = \text{span}\{u_1, u_2\}$. Προφανώς το $\{u_1, u_2\}$ είναι βάση του Π και το Π είναι ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$.

Αν ισχύε ότι $u_3 \notin \Pi$, τότε όπως αποδείξαμε στην Εφαρμογή 5.7.4 τα u_1, u_2, u_3 θα ήταν γραμμικά ανεξάρτητα, άτοπο από την υπόθεση. Άρα $u_3 \in \Pi \Rightarrow \text{span}\{u_1, u_2, u_3\} \subseteq \Pi$, και επειδή προφανώς $\Pi \subseteq \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$, τελικά έχουμε:

$$\Pi = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}.$$

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα αυτού.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$u_1 = (1, 2, 3), \quad u_2 = (4, 5, 6), \quad u_3 = (7, 8, 9) \quad \text{του } \mathbb{R}^3.$$

Δείξτε ότι τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα, ότι παράγουν έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 και βρείτε ποιά από τα u_1, u_2, u_3 αποτελούν βάση αυτού του χώρου.

Λύση. Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 4 \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) + 7 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = 0.$$

Άρα τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ελέγχουμε αν τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνον αν ισχύει $\text{span}\{u_1\} = \text{span}\{u_2\}$. Άρα αν τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε για τα u_1, u_2 ισχύει ότι το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Άρα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$u_2 = \lambda u_1 \Leftrightarrow (4, 5, 6) = \lambda (1, 2, 3) \Leftrightarrow (4, 5, 6) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ 2\lambda = 5 \\ 3\lambda = 6 \end{cases}$$

Αυτές οι ισότητες δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα. Άρα $\text{span}\{u_1\} \neq \text{span}\{u_2\}$. Επομένως τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα από την προηγούμενη εφαρμογή αν θέσουμε $\Pi = \text{span}\{u_1, u_2\}$, έπεται ότι $\text{span}\{u_1, u_2, u_3\} = \Pi$, συνεπώς τα u_1, u_2, u_3 παράγουν τον υπόχωρο Π του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 του οποίου τα u_1, u_2 αποτελούν βάση του.

Εφαρμογή 5.7.6. Ας πάρουμε τώρα δύο επίπεδα Π_1, Π_2 του $\mathbb{R}^3$ διαφορετικά μεταξύ τους. Θα δείξουμε το γνωστό μας από τη γεωμετρία αποτέλεσμα ότι η τομή τους είναι μια ευθεία του χώρου.

Αφού $\Pi_1 \neq \Pi_2$ είτε θα υπάρχει $u_2 \in \Pi_2$ με $u_2 \notin \Pi_1$ ή θα υπάρχει $u_1 \in \Pi_1$ με $u_1 \notin \Pi_2$. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι υπάρχει $u_2 \in \Pi_2$ με $u_2 \notin \Pi_1$.

Από την Εφαρμογή 5.7.4 έπεται ότι αν $\Pi_1 = \text{span}\{w_1, w_2\}$, τότε

$$\text{span}\{w_1, w_2, u_2\} = \mathbb{R}^3, \quad (5.26)$$

κι επειδή $\{w_1, w_2, u_2\} \subseteq \Pi_1 \cup \Pi_2 \Rightarrow \{w_1, w_2, u_2\} \subseteq \text{span}(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ και άρα:

$$\text{span}\{w_1, w_2, u_2\} \subseteq \text{span}(\Pi_1 \cup \Pi_2), \quad (5.27)$$

αφού ο $\text{span}(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και ο $\text{span}\{w_1, w_2, u_2\}$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει τα w_1, w_2, u_2 .

Από τις (5.26), (5.27), και επειδή προφανώς ισχύει ότι $\text{span}(\Pi_1 \cup \Pi_2) \subseteq \mathbb{R}^3$ έπεται ότι ισχύει:

$$\text{span}(\Pi_1 \cup \Pi_2) = \mathbb{R}^3. \quad (5.28)$$

Αλλά απο γνωστή πρόταση (βλ. Πρόταση 5.5.10) έχουμε ότι:

$$\text{span}(\Pi_1 \cup \Pi_2) = \Pi_1 + \Pi_2. \quad (5.29)$$

Από τις (5.28) και (5.29) έπεται ότι:

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \mathbb{R}^3. \quad (5.30)$$

Επιπλέον, από το Θεώρημα 5.6.13 και την (5.30) έχουμε ότι:

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim(\Pi_1 + \Pi_2) = \dim \Pi_1 + \dim \Pi_2 - \dim(\Pi_1 \cap \Pi_2). \quad (5.31)$$

Από τις (5.30) και (5.31) έπεται ότι:

$$3 = 2 + 2 - \dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) \Rightarrow \dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι το $\Pi_1 \cap \Pi_2$ είναι μια ευθεία ε του $\mathbb{R}^3$, δηλαδή $\varepsilon = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

Έτσι, δείξαμε ότι η τομή δύο επιπέδων του $\mathbb{R}^3$ είναι μια ευθεία ε του χώρου.

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα της προηγούμενης εφαρμογής.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$u_1 = (1, 2, 3), \quad u_2 = (7, 8, 9), \quad u_3 = (6, 4, 5), \quad u_4 = (-1, 1, -2) \quad \text{του } \mathbb{R}^3,$$

καθώς και τα επίπεδα

$$\Pi_1 = \text{span}\{u_1, u_2\} \quad \text{και} \quad \Pi_2 = \text{span}\{u_3, u_4\} \quad \text{του } \mathbb{R}^3.$$

Να βρεθεί η ευθεία $\Pi_1 \cap \Pi_2$ του $\mathbb{R}^3$.

Λύση. Γράφουμε τη «μορφή» που θα έχει τυχόν διάνυσμα του Π_1 . Έτσι τυχόν $w_1 \in \Pi_1$ θα γράφεται ως εξής:

$$w_1 = au_1 + bu_2, \quad \text{όπου } a, b \in \mathbb{R}.$$

Άρα

$$w_1 = a(1, 2, 3) + b(7, 8, 9) = (a, 2a, 3a) + (7b, 8b, 9b) = (a + 7b, 2a + 8b, 3a + 9b),$$

για $a, b \in \mathbb{R}$.

Παρόμοια, τυχόν διάνυσμα $w_2 \in \Pi_2$ έχει τη μορφή:

$$w_2 = cu_3 + du_4, \quad \text{όπου } c, d \in \mathbb{R}.$$

Άρα

$$w_2 = c(6, 4, 5) + d(-1, 1, -2) = (6c, 4c, 5c) + (-d, d, -2d) = (6c - d, 4c + d, 5c - 2d),$$

για $c, d \in \mathbb{R}$.

Τώρα ένα $w \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ θα έχει «τη μορφή του w_1 » για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$ και «τη μορφή του w_2 » για κάποια $c, d \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, αν $w \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ θα υπάρχουν $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} w_1 = w_2 &\Leftrightarrow (a + 7b, 2a + 8b, 3a + 9b) = (6c - d, 4c + d, 5c - 2d) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 7b = 6c - d \\ 2a + 8b = 4c + d \\ 3a + 9b = 5c - 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 7b - 6c + d = 0 \\ 2a + 8b - 4c - d = 0 \\ 3a + 9b - 5c + 2d = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Άρα για να βρούμε τα κοινά διανύσματα των Π_1, Π_2 πρέπει να προσδιορίσουμε όλα τα πιθανά $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν το σύστημα (5.32) ώστε μετά να προσδιορίσουμε τη ζητούμενη τομή $\Pi_1 \cap \Pi_2$. Έτσι έχουμε να λύσουμε το ομογενές σύστημα (5.32) με τις μεθόδους που έχουμε αναπτύξει προηγούμενα. Ας χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του Cramer. Για το σκοπό αυτό γράφουμε το σύστημα ως εξής:

$$\begin{cases} a - 6c + d = -7b \\ 2a - 4c - d = -8b \\ 3a - 5c + 2d = -9b \end{cases} \quad (5.33)$$

Το (5.33) έχει ορίζουσα:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - (-6) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 31 \neq 0.$$

Συνεπώς $D \neq 0$, και άρα αν θεωρήσουμε το σύστημα (5.33) ως ένα σύστημα με αγνώστους μόνο τα a, c, d και σταθερή τη στήλη $(-7b, -8b, -9b)^T$, τότε είναι ένα σύστημα Cramer που έχει μοναδική λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} D_a &= \begin{vmatrix} -7b & -6 & 1 \\ -8b & -4 & -1 \\ -9b & -5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -7b \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - (-8b) \cdot \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-9b) \cdot \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -55b. \\ D_c &= \begin{vmatrix} 1 & -7b & 1 \\ 2 & -8b & -1 \\ 3 & -9b & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(-7b) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-8b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-9b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 30b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_d &= \begin{vmatrix} 1 & -6 & -7b \\ 2 & -4 & -8b \\ 3 & -5 & -9b \end{vmatrix} \\
&= -7b \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - (-8b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + (-9b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 18b.
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$a = \frac{D_a}{D} = -\frac{55}{31}b, \quad c = \frac{D_c}{D} = \frac{30}{31}b, \quad d = \frac{D_d}{D} = \frac{18}{31}b.$$

Συνεπώς τα $w \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ είναι τα w της μορφής των στοιχείων του Π_1 για τα οποία $a = -\frac{55}{31}b$. (Έτσι αρκούσε προηγουμένως να υπολογίσουμε μόνον το $a = \frac{D_a}{D} = -\frac{55}{31}b$ από το σύστημα (5.33).)

Άρα τα στοιχεία του $\Pi_1 \cap \Pi_2$ είναι της μορφής:

$$\begin{aligned}
w &= \left(-\frac{55}{31}b + 7b, 2\left(-\frac{55}{31}b\right) + 8b, 3\left(-\frac{55}{31}b\right) + 9b \right) = \left(\frac{162}{31}b, \frac{138}{31}b, \frac{114}{31}b \right) \\
&= \frac{6}{31}b(27, 23, 19).
\end{aligned}$$

Άρα $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \text{span}\{u_0\}$, όπου $u_0 = (27, 23, 19)$, δηλαδή το $\Pi_1 \cap \Pi_2$ είναι η ευθεία που παράγεται από το διάνυσμα u_0 .

Εφαρμογή 5.7.7. Ας έρθουμε τώρα στη σημαντικότερη εφαρμογή αυτού του κεφαλαίου. Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Το πρόβλημα είναι να βρούμε την διάσταση και μια βάση του χώρου $\text{span}(S)$.

Προφανώς αν $S = \{0\}$, τότε έχουμε εξ' ορισμού ότι το $\emptyset$ είναι βάση του S και η διάσταση του $\text{span}(S)$ είναι 0. Αν το $S = \{a\}$ με $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, τότε η διάσταση του $\text{span}(S)$ είναι 1 και μια βάση του $\text{span}(S)$ είναι το ίδιο το S . Επίσης, το πρόβλημα για $n = 1$ είναι τετριμμένο αφού για κάθε $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, το $\{b\}$ είναι βάση του S για κάθε $S \subseteq \mathbb{R}$ με $b \in S$ και $\text{span}(S) = \mathbb{R}$.

Έτσι εξετάζουμε την περίπτωση όπου $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και το S περιέχει τουλάχιστον δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

Θα μας βοηθήσουν και θα μας χρειαστούν στη συνέχεια κάποια στοιχεία από τους πίνακες. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$, δηλαδή ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας. Ο A έχει m γραμμές και κάθε μία ανήκει στον χώρο $\mathbb{R}^n$. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Συμβολίζουμε

$$r_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), r_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, r_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}),$$

τις m γραμμές του A , δηλαδή γενικά η i -γραμμή είναι το διάνυσμα $r_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ του $\mathbb{R}^n$, για $i = 1, 2, \dots, m$.

Θέτουμε $V = \text{span}\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ να είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τις γραμμές του A .

Ορισμός 5.7.8. Με τους παραπάνω συμβολισμούς ο χώρος $V = \text{span}\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ ονομάζεται ο χώρος γραμμών του πίνακα A .

Σχόλιο: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα ταυτίζουμε τους χώρους πινάκων $\mathbb{R}^{n \times 1}$ και $\mathbb{R}^{1 \times n}$ με τον χώρο $\mathbb{R}^n$. Έτσι θα ταυτίζουμε τους πίνακες

$$(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

με το διάνυσμα $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ του $\mathbb{R}^n$.

Αναφέρουμε τώρα δύο προτάσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Πρόταση 5.7.9. Δύο γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών.

(Η πρόταση αυτή είναι αναδιατύπωση της Πρότασης 5.5.9 στη σελίδα 110, όπου εκεί έχει δοθεί κατ' ουσίαν και η απόδειξη.)

Πρόταση 5.7.10. Οι μη μηδενικές γραμμές ενός κλιμακωτού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου γραμμών αυτού του πίνακα. Επειδή τώρα οι μη μηδενικές γραμμές ενός κλιμακωτού πίνακα παράγουν εξ' ορισμού τον χώρο γραμμών του, έπεται ότι οι μη μηδενικές γραμμές ενός κλιμακωτού πίνακα αποτελούν βάση του χώρου γραμμών του.

Από τις Προτάσεις 5.7.9 και 5.7.10 προκύπτει το ακόλουθο χρήσιμο πόρισμα:

Πόρισμα 5.7.11. Η τάξη ενός πίνακα είναι ίση με τη διάσταση του χώρου γραμμών του.

Απόδειξη.* Έστω A να είναι ένας πίνακας, και έστω ότι είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον κλιμακωτό πίνακα K . (Γνωρίζουμε ότι κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν κλιμακωτό πίνακα.) Αφού οι A, K είναι γραμμοϊσοδύναμοι έπεται από την Πρόταση 5.7.9 ότι οι

*Εκτός ύλης.

A, K έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών, έστω V . Έστω r να είναι η τάξη του A . Τότε εξ' ορισμού το r ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του K . Από την Πρόταση 5.7.10 οι r γραμμές, οι μη μηδενικές του K αποτελούν βάση του χώρου γραμμών V και εξ' ορισμού το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης είναι η διάσταση του χώρου V . Άρα $r = \dim V$ και άρα η διάσταση του χώρου γραμμών του A ισούται με την τάξη του. $\square$

Σχόλιο: Συνήθως στα βιβλία Γραμμικής Άλγεβρας ως τάξη ενός πίνακα ορίζεται να είναι η διάσταση του χώρου γραμμών του, όπως δηλώνει και το Πόρισμα 5.7.11.

Με βάση τα παραπάνω διατυπώνουμε τώρα μια μέθοδο για την Εφαρμογή 5.7.7.

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς a_{ij} για κάθε $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, όπου $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 2$, να είναι δύο σταθεροποιημένοι φυσικοί αριθμοί. Με βάση τους αριθμούς a_{ij} ορίζουμε τα διανύσματα:

$$u_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), u_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, u_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}),$$

δηλαδή $u_i \in \mathbb{R}^n$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$.

Θέτουμε $V = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ και θέλουμε να βρούμε μια βάση και τη διάσταση του V . Εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

- 1) Κατασκευάζουμε τον πίνακα A , ο οποίος έχει γραμμές τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_m$. Σημειώνουμε ότι δεν παίζει ρόλο με ποια σειρά θα πάρουμε τις γραμμές $u_i, i = 1, 2, \dots, m$, του πίνακα A . Έστω λοιπόν ότι:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- 2) Κλιμακοποιούμε τον A . Βρίσκουμε δηλαδή έναν κλιμακωτό πίνακα K , ο οποίος είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα A , δηλαδή $A \sim K$.
- 3) Οι μη μηδενικές γραμμές του K αποτελούν βάση του χώρου γραμμών V του A και το πλήθος τους βέβαια είναι η διάσταση του V .

Παράδειγμα. Θεωρούμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 2, 3, 2), \quad u_3 = (2, 5, 6, 4), \quad \text{και} \quad u_4 = (2, 6, 8, 5).$$

Θεωρούμε τον χώρο $V = \text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ που παράγουν τα διανύσματα u_1, u_2, u_3, u_4 του $\mathbb{R}^4$. Να βρεθεί η διάσταση και μια βάση του V .

Με βάση τη μεθοδολογία που περιγράψαμε νωρίτερα σχηματίζουμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix},$$

του οποίου οι γραμμές είναι τα διανύσματα u_1, u_2, u_3, u_4 .

Κλιμακοποιούμε τον πίνακα A .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 - r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_1 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 - 3r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 4r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow -r_3 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_3 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K. \end{aligned}$$

Θέτουμε $w_1 = (1, 1, 1, 1)$, $w_2 = (0, 1, 2, 1)$, $w_3 = (0, 0, 2, 1)$. Το σύνολο $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές του κλιμακωτού πίνακα K , ο οποίος είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A και το B αποτελεί βάση του χώρου V . Έτσι η διάσταση του V είναι 3.

Παρόμοιο πρόβλημα με το παραπάνω είναι και το ακόλουθο:

Εφαρμογή 5.7.12. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Θεωρούμε κάποια διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_m$ του $\mathbb{R}^n$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Θεωρούμε πάλι τον χώρο $V = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ του $\mathbb{R}^n$ που παράγουν τα $u_1, u_2, \dots, u_m$.

Ισχύει η εξής παρατήρηση:

Παρατήρηση 5.7.13. Υπάρχει ένα υποσύνολο $W \subseteq S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ώστε το W να είναι βάση του V .

Δηλαδή υπάρχουν δείκτες $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ώστε το σύνολο $W = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\}$ να είναι βάση του V .

Το πρόβλημα είναι να βρούμε ένα τέτοιο υποσύνολο W του S .

Σε σύγκριση με το προηγούμενο πρόβλημα, εδώ δεν ψάχνουμε να βρούμε μια **οποιαδήποτε** βάση του V , αλλά μια βάση η οποία να αποτελείται από κάποια από τα δοσμένα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_m$. Το πρόβλημα αυτό λύνεται με την ακόλουθη μεθοδολογία.

Θεωρούμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$

$$u_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), u_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, u_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}),$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, όπου $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 2$.

Θέτουμε $V = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ και θέλουμε να βρούμε μια βάση B του V , η οποία να αποτελείται από κάποια από τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_m$. Θέτουμε $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

Τότε:

- 1) Κατασκευάζουμε τον πίνακα A , ο οποίος έχει **στήλες** τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_m$, με όποια σειρά θέλουμε.
- 2) Κλιμακοποιούμε τον A και έστω ότι βρίσκουμε δηλαδή έναν γραμμοϊσοδύναμο με τον A κλιμακωτό πίνακα K .
- 3) Βάζουμε σε κυκλάκι το οδηγό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής του K .
- 4) Θεωρούμε τις στήλες του πίνακα A στις οποίες βρίσκονται οι οδηγοί που κυκλώσαμε στο βήμα 3. Οι στήλες αυτές είναι τα διανύσματα του S τα οποία αποτελούν βάση του V .

Παράδειγμα. Θεωρούμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 2, 1, 3), & u_2 &= (2, 4, 2, 6), & u_3 &= (1, 3, 2, 6), \\ u_4 &= (3, 7, 5, 14), & u_5 &= (2, 7, 5, 15), & u_6 &= (1, 4, 6, 15). \end{aligned}$$

Θεωρούμε τον χώρο $V = \text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ που είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$. Να βρεθεί μια βάση του V η οποία να αποτελείται από κάποια από τα διανύσματα του συνόλου $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ και η διάσταση του V .

Σχηματίζουμε τον πίνακα ο οποίος έχει στήλες τα διανύσματα $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$. Δηλαδή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 14 & 15 & 15 \end{pmatrix}.$$

Κλιμακοποιούμε τον A και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 14 & 15 & 15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 3r_1 \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 3r_2 \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_3 \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K.
 \end{aligned}$$

Στον τελευταίο πίνακα κυκλώσαμε τους οδηγούς κάθε μη μηδενικής γραμμής του πίνακα K , που βρίσκονται στην πρώτη, τρίτη και τέταρτη στήλη του πίνακα K . Άρα τα διανύσματα u_1, u_3, u_4 αποτελούν βάση του χώρου V , δηλαδή το σύνολο $B = \{u_1, u_3, u_4\}$ είναι βάση του V που αποτελείται μόνο από κάποια από τα διανύσματα του αρχικού συνόλου $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ και ο V έχει διάσταση 3.

Εφαρμογή 5.7.14. Θέτουμε:

$$u_1 = (1, -2, 0, 3), \quad u_2 = (1, -1, -1, 4), \quad u_3 = (1, 0, -2, 5),$$

$S = \{u_1, u_2, u_3\}$ και $W = \text{span}(S)$.

Θα βρούμε ένα ομογενές σύστημα του οποίου ο W είναι το σύνολο λύσεών του.

Θυμίζουμε εδώ ότι στο παράδειγμα της σελίδας 112 είδαμε πώς λύνεται το αντίστροφο του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε εδώ.

Έστω τυχόν διάνυσμα $w_0 = (a, b, c, d) \in W \subseteq \mathbb{R}^4$. Αφού $w_0 \in W$, από τον ορισμό του

συνόλου $\text{span}(S)$ έχουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \\
 &\Leftrightarrow (a, b, c, d) = \lambda_1(1, -2, 0, 3) + \lambda_2(1, -1, -1, 4) + \lambda_3(1, 0, -2, 5) \\
 &\Leftrightarrow (a, b, c, d) = (\lambda_1, -2\lambda_1, 0, 3\lambda_1) + (\lambda_2, -\lambda_2, -\lambda_2, 4\lambda_2) + (\lambda_3, 0, -2\lambda_3, 5\lambda_3) \\
 &\Leftrightarrow (a, b, c, d) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, -2\lambda_1 - \lambda_2, -\lambda_2 - 2\lambda_3, 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = b \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = c \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 = d \end{cases} \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (5.34) είναι ο

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ -2 & -1 & 0 & b \\ 0 & -1 & -2 & c \\ 3 & 4 & 5 & d \end{pmatrix}.$$

Βρίσκουμε έναν γραμμοϊσοδύναμο με τον M κλιμακωτό πίνακα K . Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ -2 & -1 & 0 & b \\ 0 & -1 & -2 & c \\ 3 & 4 & 5 & d \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 3r_1 \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2a+b \\ 0 & -1 & -2 & c \\ 0 & 1 & 2 & -3a+d \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_2 \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b+c \\ 0 & 0 & 0 & -5a-b+d \end{pmatrix} = K.
 \end{aligned}$$

Από την υπόθεση το (5.34) έχει λύση. Άρα και το ισοδύναμό του σύστημα, έστω (Σ') που έχει ως επαυξημένο πίνακα τον K έχει λύση. Το ισοδύναμο σύστημα (Σ') έχει ως πίνακα του συστήματος τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

που έχει τάξη 2. Αφού το ισοδύναμο σύστημα (Σ') έχει λύση έπεται ότι και ο K έχει τάξη 2. Άρα θα πρέπει να ισχύουν:

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ -5a - b + d = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

Έστω L να είναι το σύνολο λύσεων του συστήματος (5.35). Δηλαδή έστω

$$L = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a + b + c = 0 \text{ και } -5a - b + d = 0\}.$$

Από τα παραπάνω δείξαμε ότι ισχύει $W \subseteq L$. Ακολουθώντας ακριβώς αντίστροφη πορεία έπεται εύκολα και ότι $L \subseteq W$. Άρα $W = L$.

Έτσι δεδομένου ενός υπόχωρου W βρήκαμε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα, το (5.35), το οποίο έχει σύνολο λύσεων τον υπόχωρο W .

Τώρα, με βάση την προηγούμενη εφαρμογή 5.7.14 θα περιγράψουμε μια μεθοδολογία με την οποία προσδιορίζουμε μια βάση της τομής δύο υποχώρων του $\mathbb{R}^n$, οι οποίοι παράγονται από δοσμένα διανύσματα.

Εφαρμογή 5.7.15. Έστω $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, και δύο πεπερασμένα υποσύνολα $S_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ και $S_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τους υπόχωρους $V_1 = \text{span}(S_1)$ και $V_2 = \text{span}(S_2)$ του $\mathbb{R}^n$. Το πρόβλημα είναι να βρούμε μια βάση του χώρου $V_1 \cap V_2$. Αυτό είναι και το δυσκολότερο από τα προβλήματα που είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο. Για να το λύσουμε ακολουθούμε την παρακάτω μεθοδολογία:

Με βάση την προηγούμενη εφαρμογή 5.7.14 βρίσκουμε δύο ομογενή γραμμικά συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) τα οποία έχουν σύνολα λύσεων τους υπόχωρους V_1 και V_2 , αντίστοιχα.

Τότε το ομογενές γραμμικό σύστημα το οποίο αποτελείται από τις εξισώσεις των συστημάτων (Σ_1) και (Σ_2) μαζί έχει σύνολο λύσεων τον υπόχωρο $V_1 \cap V_2$, του οποίου μια βάση προσδιορίζεται όπως στο παράδειγμα της σελίδας 112.

Παράδειγμα. Έστω

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 3, -2, 2, 3), & u_2 &= (1, 4, -3, 4, 2), & u_3 &= (2, 3, -1, -2, 9), & S_1 &= \{u_1, u_2, u_3\}, \\ w_1 &= (1, 3, 0, 2, 1), & w_2 &= (1, 5, -6, 6, 3), & w_3 &= (2, 5, 3, 2, 1), & S_2 &= \{w_1, w_2, w_3\}, \end{aligned}$$

$V_1 = \text{span}(S_1)$ και $V_2 = \text{span}(S_2)$. Να προσδιοριστεί μια βάση του χώρου $V_1 \cap V_2$.

Έστω διάνυσμα $u_0 = (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) \in V_1 \subseteq \mathbb{R}^5$. Από τον ορισμό του V_1 υπάρχουν

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ e_1 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = a_1 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 = b_1 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = c_1 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = d_1 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 9\lambda_3 = e_1 \end{cases} & \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

Το σύστημα (5.36) έχει ως επαυξημένο τον πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ 3 & 4 & 3 & b_1 \\ -2 & -3 & -1 & c_1 \\ 2 & 4 & -2 & d_1 \\ 3 & 2 & 9 & e_1 \end{pmatrix}.$$

Κλιμακοποιούμε τον πίνακα A και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ 3 & 4 & 3 & b_1 \\ -2 & -3 & -1 & c_1 \\ 2 & 4 & -2 & d_1 \\ 3 & 2 & 9 & e_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 - 3r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + 2r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_1 \\ r_5 \leftarrow r_5 - 3r_1 \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ 0 & 1 & -3 & -3a_1 + b_1 \\ 0 & -1 & 3 & 2a_1 + c_1 \\ 0 & 2 & -6 & -2a_1 + d_1 \\ 0 & -1 & 3 & -3a_1 + e_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_2 \\ r_5 \leftarrow r_5 + r_2 \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ 0 & 1 & -3 & -3a_1 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 + b_1 + c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_1 - 2b_1 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & -6a_1 + b_1 + e_1 \end{pmatrix} = K_1.
 \end{aligned}$$

Άρα, όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή 5.7.14, προκύπτει ότι ο V_1 είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος

$$\begin{cases} -a_1 + b_1 + c_1 & = 0 \\ 4a_1 - 2b_1 & + d_1 = 0 \\ -6a_1 + b_1 & + e_1 = 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

Έστω διάνυσμα $w_0 = (a_2, b_2, c_2, d_2, e_2) \in V_2 \subseteq \mathbb{R}^5$. Από τον ορισμό του V_2 υπάρχουν $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} w_0 &= \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \mu_3 w_3 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ e_2 \end{pmatrix} &= \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 &= a_2 \\ 3\mu_1 + 5\mu_2 + 5\mu_3 &= b_2 \\ -6\mu_2 + 3\mu_3 &= c_2 \\ 2\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3 &= d_2 \\ \mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 &= e_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Το σύστημα (5.38) έχει ως επαυξημένο τον πίνακα:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_2 \\ 3 & 5 & 5 & b_2 \\ 0 & -6 & 3 & c_2 \\ 2 & 6 & 2 & d_2 \\ 1 & 3 & 1 & e_2 \end{pmatrix}.$$

Κλιμακοποιούμε τον πίνακα B και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_2 \\ 3 & 5 & 5 & b_2 \\ 0 & -6 & 3 & c_2 \\ 2 & 6 & 2 & d_2 \\ 1 & 3 & 1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 - 3r_1 \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_1 \\ r_5 \leftarrow r_5 - r_1 \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_2 \\ 0 & 2 & -1 & -3a_2 + b_2 \\ 0 & -6 & 3 & c_2 \\ 0 & 4 & -2 & -2a_2 + d_2 \\ 0 & 2 & -1 & -a_2 + e_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ r_3 \leftarrow r_3 + 3r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_2 \\ r_5 \leftarrow r_5 - r_2 \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_2 \\ 0 & 2 & -1 & -3a_2 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -9a_2 + 3b_2 + c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_2 - 2b_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_2 - b_2 + e_2 \end{pmatrix} = K_2.
 \end{aligned}$$

Άρα, ο V_2 είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος

$$\begin{cases} -9a_2 + 3b_2 + c_2 & = 0 \\ 4a_2 - 2b_2 & + d_2 = 0 \\ 2a_2 - b_2 & + e_2 = 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

Ο χώρος $V_1 \cap V_2$ είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος που αποτελείται από τις εξισώσεις των συστημάτων (5.37) και (5.39), δηλαδή αποτελείται από τα διανύσματα (a, b, c, d, e) του $\mathbb{R}^5$ που ικανοποιούν τόσο τις εξισώσεις του συστήματος (5.37) όσο και εκείνες του συστήματος (5.39), άρα του συστήματος:

$$\begin{cases} -a + b + c & = 0 \\ 4a - 2b & + d = 0 \\ -6a + b & + e = 0 \\ -9a + 3b + c & = 0 \\ 4a - 2b & + d = 0 \\ 2a - b & + e = 0 \end{cases} \quad (5.40)$$

Το σύστημα (5.40) έχει ως πίνακα του συστήματος τον ακόλουθο πίνακα C τον οποίο και

Άρα το αρχικό σύστημα (5.40) είναι ισοδύναμο με το σύστημα:

$$\begin{cases} -a + b + c & = 0 \\ b + 2c & + e = 0 \\ 4c & + 6e = 0 \\ d - 2e & = 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

Το σύστημα (5.41) είναι ένα σύστημα των 5 αγνώστων a, b, c, d, e με 4 εξισώσεις. Το λύνουμε κατά τα γνωστά με οπισθοδρόμηση. Κρατάμε ως ελεύθερο άγνωστο τον e και το (5.41) γράφεται ως εξής:

$$\begin{cases} -a + b + c & = 0 \\ b + 2c & = -e \\ 4c & = -6e \\ d & = 2e \end{cases} \quad (5.42)$$

Από την τρίτη εξίσωση του (5.42) παίρνουμε:

$$c = -\frac{3}{2}e.$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη και βρίσκουμε:

$$b = -2c - e = -2\left(-\frac{3}{2}e\right) - e = 2e.$$

Τέλος, αντικαθιστούμε τις τιμές των b και c που βρήκαμε στην πρώτη και έχουμε:

$$a = b + c = 2e + \left(-\frac{3}{2}e\right) \Rightarrow a = \frac{1}{2}e.$$

Άρα έχουμε:

$$(a, b, c, d, e) = \left(\frac{1}{2}e, 2e, -\frac{3}{2}e, 2e, e\right) = \frac{e}{2}(1, 4, -3, 4, 2).$$

Άρα αν θέσουμε $v_0 = (1, 4, -3, 4, 2)$, έχουμε ότι $V_1 \cap V_2 = \text{span}\{v_0\}$ και πετύχαμε να βρούμε μια βάση του χώρου $V_1 \cap V_2$ ο οποίος έχει διάσταση 1.

Παρατηρήσεις: Οι παραπάνω εφαρμογές μας βοηθούν να απαντήσουμε και στα ακόλουθα προβλήματα:

- 1) Όπως γνωρίζουμε από τη Β' Λυκείου μια ευθεία του επιπέδου, που περνά από την αρχή των αξόνων, έχει «καρτεσιανή εξίσωση» της μορφής $ax + by = 0$, για κάποια σταθεροποιημένα $a, b \in \mathbb{R}$ με $a^2 + b^2 \neq 0$.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε μια ευθεία ε του επιπέδου με καρτεσιανή εξίσωση $ax + by = 0$ για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$ με $a^2 + b^2 \neq 0$. Τότε η ευθεία ε είναι το εξής υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$:

$$\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}.$$

Με άλλα λόγια η ε είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$\{ax + by = 0, \quad (5.43)$$

που αποτελείται από μία μόνο εξίσωση και έχει δύο αγνώστους τους x και y .

Με αυτόν τον τρόπο εντάσσουμε μια ευθεία του επιπέδου, που περνά από την αρχή των αξόνων, στην ορολογία της Γραμμικής Άλγεβρας με σκοπό να μελετήσουμε τις ευθείες του επιπέδου «μέσω» της Γραμμικής Άλγεβρας. Έτσι για την ευθεία ε με καρτεσιανή εξίσωση $ax + by = 0$ βρίσκουμε το σύνολο λύσεων του γραμμικού συστήματος (5.43) όπως στο παράδειγμα της σελίδας 112 και έτσι βρίσκουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα που παράγει την ευθεία ε του $\mathbb{R}^2$.

Αντίστροφα, αν έχουμε μια ευθεία του επιπέδου που παράγεται από το μη μηδενικό διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^2$, τότε όπως στην εφαρμογή 5.7.14 βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση αυτής της ευθείας.

- 2) Όπως μια ευθεία του επιπέδου, έτσι και ένα επίπεδο του τριδιάστατου χώρου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχει «καρτεσιανή εξίσωση» της μορφής $ax + by + cz = 0$ για κάποια σταθεροποιημένα $a, b, c, \in \mathbb{R}$ με $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Έστω λοιπόν Π να είναι ένα επίπεδο του τριδιάστατου χώρου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Τότε το Π είναι το εξής υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$:

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\},$$

όπου $a, b, c, \in \mathbb{R}$, σταθερά με $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Επομένως μπορούμε να δούμε το Π ως το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$\{ax + by + cz = 0, \quad (5.44)$$

το οποίο αποτελείται από μια εξίσωση με τρεις αγνώστους x, y, z .

Έτσι αν έχουμε το παραπάνω επίπεδο Π με καρτεσιανή εξίσωση $ax + by + cz = 0$, τότε όπως στο παράδειγμα της σελίδας 112 βρίσκουμε μια βάση $B = \{u_1, u_2\}$ του Π , αφού ένα επίπεδο είναι εξ' ορισμού ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Αντίστροφα, αν $\Pi = \text{span}\{u_1, u_2\}$ είναι ένα επίπεδο που παράγεται από τα διανύσματα u_1, u_2 του $\mathbb{R}^3$, τότε όπως στην εφαρμογή 5.7.14 βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου.

- 3) Όπως στο 2) αποδεικνύεται ότι μια ευθεία ε του τριδιάστατου χώρου, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχει δύο «καρτεσιανές εξισώσεις» που την καθορίζουν της μορφής $ax + by + cz = 0$ και $dx + ey + fz = 0$, όπου $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ και $d^2 + e^2 + f^2 \neq 0$. Ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία όπως στην παρατήρηση 2 αν έχουμε τις καρτεσιανές εξισώσεις της ευθείας βρίσκουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα u του χώρου που την παράγει και αντίστροφα.

- 4) Όπως έχουμε πει η τομή υποχώρων είναι υπόχωρος του χώρου που εξετάζουμε. Αυτό όμως δεν συμβαίνει με την ένωση υποχώρων.

Συγκεκριμένα, έστω V να είναι ένας δ.χ. και V_1, V_2 να είναι υπόχωροι του V . Τότε, γενικά, το σύνολο $V_1 \cup V_2$ **δεν είναι υπόχωρος** του V . Ισχύει εδώ το εξής: Το $V_1 \cup V_2$ είναι υπόχωρος του V μόνον αν ισχύει $V_1 \subseteq V_2$ ή $V_2 \subseteq V_1$, οπότε τότε ισχύει $V_1 \cup V_2 = V_2$ ή $V_1 \cup V_2 = V_1$, αντίστοιχα.

Για την ένωση δύο υποχώρων όμως ισχύει η εξής πρόταση (την οποία έχουμε ήδη αναφέρει, βλ. Πρόταση 5.5.10).

Πρόταση 5.7.16. Έστω V να είναι ένας δ.χ. και V_1, V_2 να είναι υπόχωροι του V . Τότε $\text{span}(V_1 \cup V_2) = V_1 + V_2$.

Αυτή η πρόταση, που συνδέει την ένωση με το άθροισμα υποχώρων, μας βοηθά για να βρίσκουμε τη βάση ενός αθροίσματος υποχώρων ως εξής: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $V_1 \leq \mathbb{R}^n$ και $V_2 \leq \mathbb{R}^n$, όπου $V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_{m_1}\}$ και $V_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_{m_2}\}$, δηλαδή θεωρούμε δύο ορισμένους υπόχωρους του $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται με βάση κάποια συγκεκριμένα διανύσματά τους. Θέλουμε να βρούμε μια βάση του χώρου $V_1 + V_2$. Από την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι ισχύει:

$$V_1 + V_2 = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_{m_1}, w_1, w_2, \dots, w_{m_2}\}.$$

Έτσι, ακολουθώντας τη μεθοδολογία του παραδείγματος της σελίδας 135 προσδιορίζουμε μια βάση του $V_1 + V_2$.

Γενικότερα, αν έχουμε πολλούς υπόχωρους $V_1, V_2, \dots, V_k$ ενός δ.χ. V , τότε έχουμε από την Πρόταση 5.5.10 ότι ισχύει: $V_1 + V_2 + \dots + V_n = \text{span}(V_1 \cup \dots \cup V_n)$. Επομένως, αν $V_1 = \text{span}\{u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1m_1}\}$, $V_2 = \text{span}\{u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2m_2}\}, \dots, V_k =$

$\text{span}\{u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{km_k}\}$, τότε:

$$\begin{aligned} & V_1 + V_2 + \dots + V_k \\ &= \text{span}\{u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1m_1}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2m_2}, \dots, u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{km_k}\}, \end{aligned}$$

και βρίσκουμε μια βάση του $V_1 + V_2 + \dots + V_k$ ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία με αυτήν του παραδείγματος της σελίδας 135.

- 5) Στο παράδειγμα της σελίδας 140 είδαμε πώς βρίσκουμε τη βάση της τομής δύο υποχώρων του $\mathbb{R}^n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αν έχουμε να βρούμε μια βάση της τομής περισσότερων από δύο υποχώρων του $\mathbb{R}^n$, προχωράμε επαγωγικά.

Συγκεκριμένα, έστω $V_1, V_2, \dots, V_k$, $k \geq 3$, υποχώροι του $\mathbb{R}^n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, οι οποίοι παράγονται από ορισμένα διανύσματα ο καθένας. Εργαζόμενοι όπως στο παράδειγμα της σελίδας 140 βρίσκουμε αρχικά μια βάση του $V_1 \cap V_2$. Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και βρίσκουμε μια βάση του $(V_1 \cap V_2) \cap V_3$, και προχωρώντας κατ' αυτόν τον τρόπο επαγωγικά βρίσκουμε τελικά μια βάση του χώρου $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_k$.

- 6) Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, έτσι και σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε όλες τις βασικές εφαρμογές ακολουθώντας μια ορισμένη μεθοδολογία και όχι περιπτωσιολογικά, ως μεμονωμένες περιπτώσεις την καθεμία, έτσι ώστε να παρουσιάζεται η σύνδεση και ομοιογένεια των εννοιών της Γραμμικής Άλγεβρας και το οποίο είναι και διδακτικά προσφορότερο για τους φοιτητές για να αφομοιώσουν τις διάφορες έννοιες.

Από τις περιπτώσεις παραγωγής νέων υποχώρων έχουμε παρουσιάσει μόνο δύο: την τομή και το άθροισμα υποχώρων. Υπάρχουν βέβαια και άλλοι τρόποι παραγωγής νέων υποχώρων, όπως το καρτεσιανό γινόμενο υποχώρων και το πηλίκιο υποχώρων. Λόγω έλλειψης χρόνου δεν αναφερόμαστε στα θέματα αυτά.

- 7) Όπως θα παρατηρήσει ο φοιτητής, οι εφαρμογές μας σε αυτό το κεφάλαιο αφορούν υπόχωρους του $\mathbb{R}^n$ για $n \in \mathbb{N}$. Φυσικά, υπάρχουν και άλλοι διανυσματικοί χώροι, όπως χώροι πινάκων, χώροι πολωνύμων, χώροι ακολουθιών, χώροι συναρτήσεων, κλπ, στους οποίους δεν αναφερόμαστε σε αυτό το κεφάλαιο. Αυτό το κάναμε μεθοδολογικά για δύο λόγους:

1ον: Για να εξοικονομήσουμε χρόνο, παρουσιάζοντας όλες τις βασικές (κατά τη γνώμη μας) εφαρμογές πάνω στους σημαντικότερους χώρους πεπερασμένης διάστασης που είναι βέβαια οι χώροι $\mathbb{R}^n$, και

2ον: Επειδή κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης «ταυτίζεται» με κάποια έννοια που θα δούμε αργότερα με τον $\mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Σε αυτό θα μας βοηθήσουν πολύ οι γραμμικές απεικονίσεις που θα δούμε αργότερα και ιδιαίτερα οι γραμμικοί ισομορφισμοί.

5.8 Συμπληρωματικό υλικό

1. Ας θεωρήσουμε έναν τυχαίο $m \times n$ πίνακα A , για $m, n \in \mathbb{N}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$ και $j = 1, 2, \dots, n$. Θεωρούμε τις n στήλες του A

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Οι στήλες c_j , $j = 1, 2, \dots, n$ είναι n το πλήθος διανύσματα του χώρου πινάκων $\mathbb{R}^{m \times 1}$, τον οποίο ταυτίζουμε με τον χώρο $\mathbb{R}^m$, όπως έχουμε πει.

Οι στήλες c_j , $j = 1, 2, \dots, n$, παράγουν τον υπόχωρο $V = \text{span}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ του $\mathbb{R}^{m \times 1}$. Ο V ονομάζεται **χώρος στηλών του πίνακα A** και αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\dim V = r(A).$$

2. Έχουμε δει ότι το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος με m εξισώσεις και n αγνώστους είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 5.8.1. Το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς $m \times n$ γραμμικού συστήματος είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, διάστασης $n - r$, όπου $r = r(A)$ είναι η τάξη του πίνακα A του συστήματος.

Σημειώνουμε ότι έχουμε ήδη δείξει πώς βρίσκουμε μια βάση του συνόλου των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος στο παράδειγμα της σελίδας 112.

Βιβλιογραφία

- [1] G. Strang, *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015.
- [2] Δ.Α. Βάρσος, Δ.Ι. Δεριζιώτης, Ι.Π. Εμμανουήλ, Μ.Π. Μαλιάκας, Α.Δ. Μελάς, Ο.Π. Ταλέλλη, *Μια εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, Εκδ. Σοφία, 2008.
- [3] E. Kreyszig, *Ανώτερα Μαθηματικά για Μηχανικούς*, Εκδ. Τζιόλα, 2018.
- [4] Θ. Μήτσης, *Μαθηματικά II για το Τμήμα Χημείας, Σημειώσεις Παραδόσεων*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.