

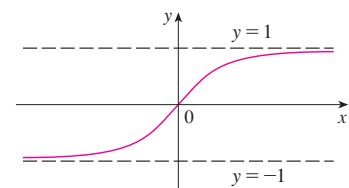
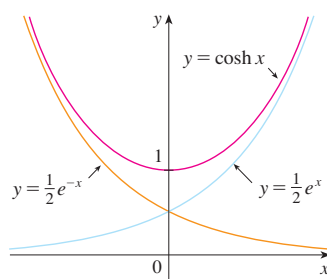
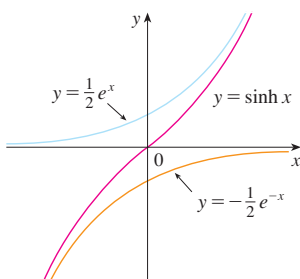
Η εξίσωση Laplace

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Δημήτρης Μητσούδης

Υπενθύμιση: Υπερβολικές συναρτήσεις

- **Υπερβολικό ημίτονο:** $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
(Προφανώς $\sinh 0 = 0$ και $\sinh(-x) = -\sinh x$.)
- **Υπερβολικό συνημίτονο:** $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
(Προφανώς $\cosh 0 = 1$ και $\cosh x = \cosh(-x)$.)
- **Υπερβολική εφαπτομένη:** $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.
(Προφανώς $\tanh 0 = 0$ και $\tanh(-x) = -\tanh x$.)



Υπενθύμιση: Ιδιότητες υπερβολικών συναρτήσεων

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x.$
- $\cosh 2x = (\cosh x)^2 + (\sinh x)^2.$
- $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x.$
- $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$

Για τις παραγώγους των υπερβολικών συναρτήσεων έχουμε:

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Τέλος, τα ολοκληρώματά τους είναι:

$$\begin{aligned}\int \sinh(ax) dx &= \frac{1}{a} \cosh(ax) + C. \\ \int \cosh(ax) dx &= \frac{1}{a} \sinh(ax) + C. \\ \int \tanh(ax) dx &= \frac{1}{a} \ln(\cosh(ax)) + C.\end{aligned}$$

Η εξίσωση Laplace

Μία από τις σημαντικότερες ΜΔΕ που εμφανίζονται στα εφαρμοσμένα μαθηματικά είναι η εξίσωση Laplace:

$$\text{2D : } u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

$$\text{3D : } u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Για παράδειγμα, σε ένα διδιάστατο πρόβλημα θερμικής αγωγιμότητας, η θερμοκρασία $u(x, y, t)$ πρέπει να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy})$, όπου α^2 είναι η θερμική διάχυση. Εάν είμαστε σε στάσιμη κατάσταση, η u είναι συνάρτηση μόνο των x και y και η χρονική παράγωγος εξαφανίζεται. Στην περίπτωση αυτή αναγόμεστε στη διδιάστατη εξίσωση Laplace.

Η εξίσωση Laplace εμφανίζεται και σε άλλους κλάδους της μαθηματικής φυσικής. Π.χ., η συνάρτηση δυναμικού ενός σωματιδίου στον ελεύθερο χώρο που επηρεάζεται μόνο από βαρυτικές δυνάμεις ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, η οποία για τον λόγο αυτό αναφέρεται συχνά ως εξίσωση δυναμικού.

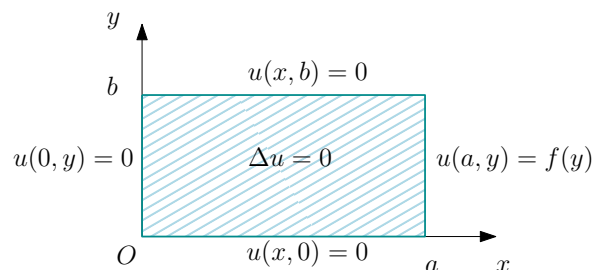
Δεδομένου ότι στην εξίσωση Laplace δεν υπάρχει χρονική εξάρτηση, δεν υπάρχουν και αρχικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται από τις λύσεις της. Πρέπει, ωστόσο, να ικανοποιούνται ορισμένες συνοριακές συνθήκες στο σύνορο της περιοχής στην οποία πρόκειται να επιλυθεί η ΔΕ.

Η πιο συνηθισμένη συνοριακή συνθήκη είναι όταν η τιμή της u καθορίζεται σε κάθε σημείο του συνόρου. Σε ορισμένα προβλήματα προσδιορίζεται αντ' αυτού η τιμή της παραγώγου ή του ρυθμού μεταβολής της u στην κάθετη διεύθυνση στο σύνορο. Το πρόβλημα της εύρεσης μιας λύσης της εξίσωσης Laplace που λαμβάνει δεδομένες συνοριακές τιμές είναι γνωστό ως **πρόβλημα Dirichlet**. Αν στο σύνορο καθορίζονται οι τιμές της παραγώγου στη διεύθυνση του εξωτερικού μοναδιαίου κάθετου διανύσματος, το πρόβλημα λέγεται **πρόβλημα Neumann**.

Το πρόβλημα Dirichlet για ορθογώνιο χωρίο

Αναζητούμε u τ.ω.

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, b) &= 0, & 0 < x < a, \\ u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= f(y), & 0 \leq y \leq b. \end{aligned}$$



Χωρισμός μεταβλητών: Υποθέτουμε ότι $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση Laplace και έχουμε:

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{συναρτ. του } x} = \underbrace{-\frac{Y''}{Y}}_{\text{συναρτ. του } y} = \lambda \quad (\text{σταθερά διαχωρισμού})$$

Άρα καταλήγουμε στις ΣΔΕ:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad 0 < x < a$$

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad 0 < y < b.$$

Από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0 \Rightarrow X(x)Y(0) = X(x)Y(b) = 0 \Rightarrow Y(0) = Y(b) = 0.$$

$$u(0, y) = 0 \Rightarrow X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0.$$

Έτσι, καταλήγουμε στο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, & 0 < y < b, \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

Οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του είναι:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad Y_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση:

$$X_n'' - \lambda_n X_n = 0 \Leftrightarrow X_n'' - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X_n = 0.$$

Οι λύσεις της είναι:

$$X_n(x) = k_1 e^{\frac{n\pi x}{b}} + k_2 e^{-\frac{n\pi x}{b}} \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad X_n(x) = k_1 \cosh \frac{n\pi x}{b} + k_2 \sinh \frac{n\pi x}{b}.$$

Από τη συνθήκη $X_n(0) = 0$ έχουμε: $k_1 = 0$, άρα (ξεχνώντας τις σταθερές) έχουμε ότι οι συναρτήσεις:

$$u_n(x, y) = \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{θεμελιώδεις λύσεις})$$

ικανοποιούν τη ΜΔΕ και τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.

Για να ικανοποιηθεί και η μη ομογενής συνοριακή συνθήκη, $u(a, y) = f(y)$, θα εξετάσουμε μια υπέρθεση των θεμελιωδών λύσεων με κατάλληλα επιλεγμένους συντελεστές. Έτσι, υποθέτουμε ότι η $u(x, y)$ έχει τη μορφή

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (1)$$

Από τη συνοριακή συνθήκη $u(a, y) = f(y)$ έχουμε:

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(y).$$

Άρα τα $c_n \sinh \frac{n\pi a}{b}$ είναι οι συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier της περιοδικής επέκτασης της f με περίοδο $2b$, δηλ.

$$c_n = \frac{2}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Παρατήρηση: Ο n -οστός όρος της λύσης περιέχει τον παράγοντα: $\frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi a}{b}}$.

Για μεγάλα x ισχύει η προσέγγιση: $\sinh x \approx \frac{1}{2}e^x$. Άρα για μεγάλα n έχουμε:

$$\frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \approx \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{n\pi x}{b}}}{\frac{1}{2}e^{\frac{n\pi a}{b}}} = e^{-n\pi \frac{a-x}{b}}, \quad \text{που φθίνει γρήγορα εκτός όταν } a - x \approx 0.$$

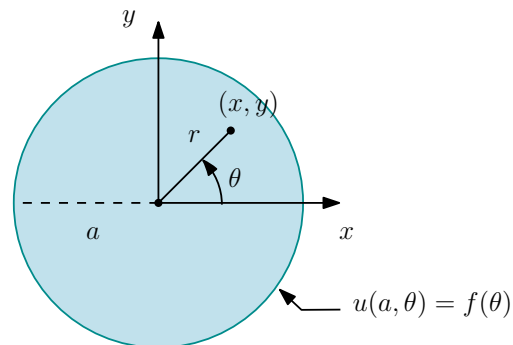
Άρα αναμένουμε η σειρά να συγκλίνει αρκετά γρήγορα.

Η εξίσωση Laplace σε δίσκο ακτίνας a

Θεωρούμε την εξίσωση Laplace σε έναν δίσκο ακτίνας a με συνοριακή συνθήκη Dirichlet στον κύκλο:

$$u = f, \quad \text{για } x^2 + y^2 = a^2,$$

όπου f δοσμένη συνάρτηση.



Πολικές συντεταγμένες: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Η εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες έχει τη μορφή:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Έτσι το πρόβλημά μας σε πολικές συντεταγμένες γράφεται:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$
$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Επιπλέον, επιβάλλουμε **περιοδικές συνοριακές συνθήκες**

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi) \quad \text{και} \quad u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, 2\pi), \quad 0 < r < a \quad (3)$$

ώστε η λύση $u(r, \theta)$ να είναι 2π -περιοδική ως προς θ .

Τέλος, απαιτούμε η $u(r, \theta)$ να παραμένει φραγμένη για $r \leq a$ (κάτι που όπως θα δούμε στη συνέχεια έχει μεγάλη σημασία).

Χωρισμός μεταβλητών

Αναζητούμε λύση της μορφής $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$.

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση Laplace $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ και έχουμε:

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \Rightarrow r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0$$
$$\Rightarrow \underbrace{r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R}}_{\text{συναρτ. του } r} = \underbrace{-\frac{\Theta''}{\Theta}}_{\text{συναρτ. του } \theta} = \lambda \quad (\text{σταθερά διαχωρισμού})$$

Άρα καταλήγουμε στις ΣΔΕ: $r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad (4)$

$$\Theta'' + \lambda \Theta = 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (5)$$

Λόγω των περιοδικών σ.σ. (3) έχουμε ότι: $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ και $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$. Έτσι καταλήγουμε στο περιοδικό πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0, & 0 < \theta < 2\pi, \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases} \quad (6)$$

Επίλυση του περιοδικού προβλήματος ιδιοτιμών (6)

Και πάλι μπορεί να αποδειχθεί ότι $\lambda \in \mathbb{R}$. Οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(1) Έστω $\lambda = -\mu^2 < 0$, ($\mu > 0$).

Γενική λύση της ΔΕ $\Theta'' - \mu^2\Theta = 0$:

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{\mu\theta} + c_2 e^{-\mu\theta} \Rightarrow \Theta'(\theta) = \mu c_1 e^{\mu\theta} - \mu c_2 e^{-\mu\theta}.$$

Επιπλέον,

$$\blacktriangleright \Theta(0) = \Theta(2\pi) \Rightarrow c_1 + c_2 = c_1 e^{2\mu\pi} + c_2 e^{-2\mu\pi}.$$

$$\blacktriangleright \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \Rightarrow c_1 \mu - c_2 \mu = c_1 \mu e^{2\mu\pi} - c_2 \mu e^{-2\mu\pi}.$$

Απαλείφουμε από τη δεύτερη εξίσωση το $\mu > 0$ και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε $c_1(1 - e^{2\mu\pi}) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$.

Άρα και $c_2(1 - e^{-2\mu\pi}) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$.

Άρα το πρόβλημα αυτό δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές.

(2) Έστω $\lambda = 0$.

Γενική λύση της ΔΕ $\Theta'' = 0$: $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta \Rightarrow \Theta'(\theta) = c_2$.

$$\blacktriangleright \Theta(0) = \Theta(2\pi) \Rightarrow c_1 + 0 = c_1 + 2\pi c_2 \Rightarrow c_2 = 0.$$

Άρα $\Theta(\theta) = c_1$, που ικανοποιεί και την $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi) (= 0)$.

Επομένως, η τιμή $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση τη σταθερή συνάρτηση $\Theta(\theta) = 1$.

(3) Έστω $\lambda = \mu^2 > 0$, ($\mu > 0$).

Γενική λύση της ΔΕ $\Theta'' + \mu^2\Theta = 0$:

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos(\mu\theta) + c_2 \sin(\mu\theta) \Rightarrow \Theta'(\theta) = -\mu c_1 \sin(\mu\theta) + \mu c_2 \cos(\mu\theta).$$

$$\blacktriangleright \Theta(0) = \Theta(2\pi) \Rightarrow c_1 = c_1 \cos(2\mu\pi) + c_2 \sin(2\mu\pi).$$

$$\blacktriangleright \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \Rightarrow c_2 \mu = -c_1 \mu \sin(2\mu\pi) + c_2 \mu \cos(2\mu\pi).$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} (1 - \cos(2\mu\pi)) c_1 - \sin(2\mu\pi) c_2 &= 0 \\ \sin(2\mu\pi) c_1 + (1 - \cos(2\mu\pi)) c_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \cos(2\mu\pi) & -\sin(2\mu\pi) \\ \sin(2\mu\pi) & 1 - \cos(2\mu\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Για να έχει το σύστημα μη τετριμμένη λύση θα πρέπει:

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos(2\mu\pi) & -\sin(2\mu\pi) \\ \sin(2\mu\pi) & 1 - \cos(2\mu\pi) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \cos(2\mu\pi))^2 + \sin^2(2\mu\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\cos(2\mu\pi) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\mu\pi) = 1 \Leftrightarrow 2\mu\pi = 2n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow \mu_n = n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Άρα ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta), \quad n = 1, 2, \dots$$

Τελικά, το περιοδικό πρόβλημα ιδιοτιμών (6) έχει ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Τώρα η R -εξίσωση (4), για $\lambda_n = n^2$ γίνεται: $r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

• Για $n = 0$:

$$r^2 R'' + rR' = 0 \Rightarrow r(rR'' + R') = 0, \quad \forall r \in (0, a) \Rightarrow (rR')' = 0$$

$$\xRightarrow{\int dr} rR' = c \text{ (σταθ.)} \Rightarrow R' = \frac{c}{R} \xRightarrow{\int dr} R_0(r) = c \ln r + d, \quad (c, d, \text{ σταθ.})$$

• Για $n \geq 1$: $r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$. Εξίσωση Euler

Έστω $R = r^s \Rightarrow R' = sr^{s-1} \Rightarrow R'' = s(s-1)r^{s-2}$. Τότε

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0 \Rightarrow s(s-1)r^s + sr^s - n^2 r^s = 0$$

$$\Rightarrow (s^2 - n^2)r^s = 0, \quad \forall r \in (0, a) \Rightarrow s^2 = n^2 \Rightarrow s = \pm n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow R_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Τελικά,

$$u_0(r, \theta) = R_0(r)\Theta_0(\theta) = A_0(c \ln r + d)$$

$$u_n(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = (a_n r^n + b_n r^{-n})(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Όμως η u ορίζεται στο $r = 0$ (παραμένει φραγμένη καθώς $r \rightarrow 0$) άρα θα πρέπει

- στην u_0 να επιλέξουμε $c = 0$, και
- στις u_n να επιλέξουμε $b_n = 0, n \geq 1$.

Έτσι καταλήγουμε στη λύση:

$$u(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta).$$

Λόγω της σ.σ. $u(a, \theta) = f(\theta)$ έχουμε:

$$u(a, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε τη συνάρτηση f έξω από το $[0, 2\pi)$ έτσι ώστε να είναι περιοδική με περίοδο 2π και, επομένως, να έχει σειρά Fourier της παραπάνω μορφής. Εφόσον η επεκταθείσα συνάρτηση έχει περίοδο 2π , μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier ολοκληρώνοντας σε οποιαδήποτε περίοδο της συνάρτησης. Είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε το αρχικό διάστημα $(0, 2\pi)$, οπότε

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Άρα

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{1}{\pi a^n} \left[\left(\int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi \right) \cos n\theta + \left(\int_0^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi \right) \sin n\theta \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \int_0^{2\pi} f(\phi) (\cos n\phi \cos n\theta + \sin n\phi \sin n\theta) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n(\theta - \phi) d\phi. \end{aligned}$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος δίνεται από τον τύπο:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos n(\theta - \phi) \right) d\phi. \quad (9)$$

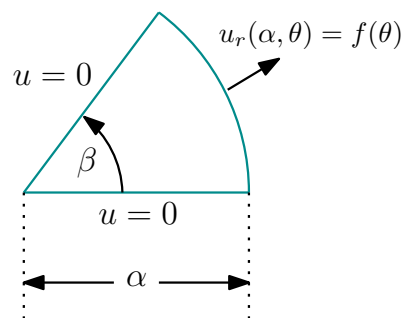
Χωρ. μεταβλ. για την εξίσωση Laplace σε άλλα χωρία. (1) «Σφήνα»

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών στο σφηνοειδές χωρίο D του σχήματος:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, \quad \text{στο } D,$$

$$u(r, 0) = u(r, \beta) = 0, \quad 0 < r < \alpha,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(\alpha, \theta) = f(\theta), \quad 0 < \theta < \beta,$$



όπου f δοσμένη συνάρτηση.

Κάνουμε όπως και πριν χωρισμό μεταβλητών υποθέτοντας ότι: $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, και καταλήγουμε στις ΣΔΕ:

$$r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0, \quad 0 < r < \alpha, \quad \text{και} \quad \Theta'' + \lambda \Theta = 0, \quad 0 < \theta < \beta.$$

Λόγω των ομογενών σ.σ. Dirichlet $u(r, 0) = u(r, \beta) = 0$ έχουμε ότι:

$$R(r)\Theta(0) = R(r)\Theta(\beta) = 0 \Rightarrow \Theta(0) = \Theta(\beta) = 0,$$

οπότε καταλήγουμε στο γνωστό πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, & 0 < \theta < \beta, \\ \Theta(0) = \Theta(\beta) = 0. \end{cases}$$

Ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2, \quad \Theta_n(\theta) = \sin \frac{n\pi\theta}{\beta}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Η R -εξίσωση γίνεται: $r^2 R'' + rR' - \lambda_n R = 0$. Πριν είδαμε ότι οι λύσεις της είναι της μορφής:

$$R_n(r) = a_n r^{\sqrt{\lambda_n}} + b_n r^{-\sqrt{\lambda_n}} = a_n r^{\frac{n\pi}{\beta}} + b_n r^{-\frac{n\pi}{\beta}}.$$

Επειδή η λύση πρέπει να παραμένει φραγμένη καθώς $r \rightarrow 0$, επιλέγουμε $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Άρα

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin \frac{n\pi\theta}{\beta}. \quad (10)$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τη μη ομογενή συνθήκη Neumann $\frac{\partial u}{\partial r}(\alpha, \theta) = f(\theta)$ παραγωγίζουμε την (10) και έχουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{\beta} r^{\frac{n\pi}{\beta}-1} \sin \frac{n\pi\theta}{\beta}.$$

Επομένως

$$\frac{\partial u}{\partial r}(\alpha, \theta) = f(\theta) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{\beta} \alpha^{\frac{n\pi}{\beta}-1} \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} = f(\theta).$$

Συνεπώς, τα $A_n \frac{n\pi}{\beta} \alpha^{\frac{n\pi}{\beta}-1}$ υπολογίζονται ως οι συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier της f , δηλαδή

$$A_n \frac{n\pi}{\beta} \alpha^{\frac{n\pi}{\beta}-1} = \frac{2}{\beta} \int_0^\beta f(\phi) \sin \frac{n\pi\phi}{\beta} d\phi$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{n\pi} \alpha^{1-\frac{n\pi}{\beta}} \int_0^\beta f(\phi) \sin \frac{n\pi\phi}{\beta} d\phi. \quad (11)$$

Έτσι, τελικά, η λύση του προβλήματος δίνεται από την (10) και οι συντελεστές A_n δίνονται από την (11).

(2) Δακτύλιος

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών στον δακτύλιο

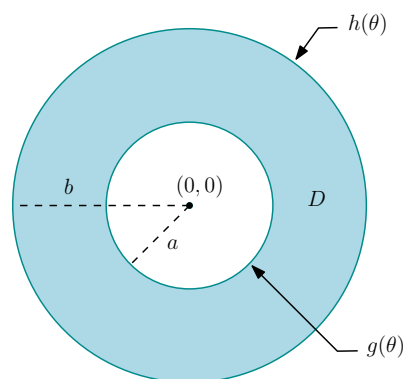
$$D = \{(x, y) : 0 < a^2 < x^2 + y^2 < b^2\}:$$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, \quad \text{στο } D,$$

$$u(a, \theta) = g(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

$$u(b, \theta) = h(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

όπου g, h δοσμένες συναρτήσεις.



Με χωρισμό μεταβλητών καταλήγουμε και πάλι στις εξισώσεις

$$r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0, \quad a < r < b, \quad \text{και} \quad \Theta'' + \lambda \Theta = 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση του δίσκου, η λύση γράφεται στη μορφή:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}(C_0 + D_0 \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) \cos n\theta + (A_n r^n + B_n r^{-n}) \sin n\theta.$$

Εδώ οι λύσεις $\ln r$ και r^{-n} **δεν αποκλείονται** αφού είναι πεπερασμένες για $0 < a < r < b$.

Οι συντελεστές προσδιορίζονται από τις σ.σ. $u(a, \theta) = g(\theta)$ και $u(b, \theta) = h(\theta)$. **(Άσκηση)**

(3) Ένα εξωτερικό πρόβλημα

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών στο εξωτερικό του δίσκου:

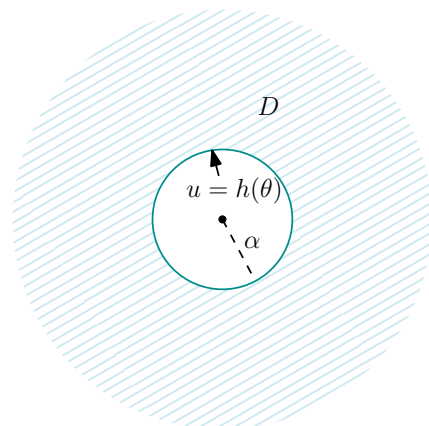
$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 > \alpha^2\}:$$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad \text{στο } D,$$

$$u(\alpha, \theta) = h(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

u φραγμένη καθώς $r \rightarrow \infty$. **Συνθήκη ακτινοβολίας**

(h δοσμένη συνάρτηση.)



Όπως και στην περίπτωση του εσωτερικού προβλήματος στον δίσκο, με χωρισμό μεταβλητών ($u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$) καταλήγουμε στο περιοδικό πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, & 0 < \theta < 2\pi, \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi), \end{cases}$$

που έχει ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

και για την R στην εξίσωση του Euler: $r^2 R'' + rR' - \lambda_n R = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, που έχει λύσεις

- Για $n = 0$: $R_0(r) = c_0 \ln r + d_0$.
- Για $n \geq 1$: $R_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$

Τώρα, για να παραμένει η u φραγμένη καθώς $r \rightarrow \infty$, πρέπει $c_0 = 0$ και $c_n = 0$, $n \geq 1$.

Έτσι καταλήγουμε στη λύση:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Λόγω της σ.σ. $u(\alpha, \theta) = h(\theta)$ έχουμε:

$$u(\alpha, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = h(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha^n}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) \cos n\phi d\phi, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{\alpha^n}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) \sin n\phi d\phi, & n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$