

Η κυματική εξίσωση - Ταλαντώσεις ελαστικής χορδής

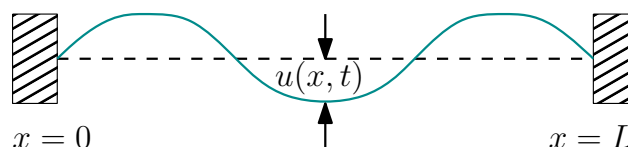
Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Δημήτρης Μητσούδης

Η εξίσωση της κύματος

Μια δεύτερη ΜΔΕ που εμφανίζεται συχνά στα εφαρμοσμένα μαθηματικά είναι η **κυματική εξίσωση**. Μορφές αυτής της εξίσωσης, ή γενικεύσεις της, εμφανίζονται σχεδόν σε κάθε μαθηματική ανάλυση φαινομένων που αφορούν κυματική διάδοση σε ένα συνεχές μέσο. Π.χ., η μελέτη ακουστικών, υδάτινων, ηλεκτρομαγνητικών και σεισμικών κυμάτων βασίζεται σε αυτή την εξίσωση.

Ας υποθέσουμε ότι μια ελαστική χορδή μήκους L είναι σφικτά τεντωμένη μεταξύ δύο στηριγμάτων στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, έτσι ώστε ο άξονας x να βρίσκεται κατά μήκος της χορδής.



Η χορδή τίθεται σε κίνηση έτσι ώστε η ταλάντωση να λαμβάνει χώρα σε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Ας συμβολίσουμε με $u(x, t)$ την κατακόρυφη μετατόπιση της χορδής στο σημείο x τη χρονική στιγμή t . Αν δεν λάβουμε υπ' όψιν φαινόμενα απόσβεσης, όπως η αντίσταση του αέρα, και αν το πλάτος της ταλάντωσης δεν είναι μεγάλο, τότε η $u(x, t)$ ικανοποιεί τη ΜΔΕ

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή ως μονοδιάστατη κυματική εξίσωση. Ο σταθερός συντελεστής c^2 δίνεται από τη σχέση $c^2 = T/\rho$, όπου T είναι η τάση (δύναμη) στη χορδή και ρ είναι η μάζα ανά μονάδα μήκους του υλικού της χορδής. Προκύπτει ότι το c έχει μονάδες μήκους/χρόνου, δηλαδή ταχύτητας.

Για να περιγράψουμε πλήρως την κίνηση της χορδής, είναι απαραίτητο να καθορίσουμε κατάλληλες **αρχικές** και **συνοριακές** συνθήκες για τη μετατόπιση $u(x, t)$.

- Τα άκρα υποτίθεται ότι παραμένουν σταθερά, άρα οι **συνοριακές συνθήκες** είναι

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

- Δεδομένου ότι η ΜΔΕ είναι δεύτερης τάξης ως προς t , είναι εύλογο να περιγραφούν **δύο αρχικές συνθήκες**. Αυτές είναι:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad \text{αρχική θέση της χορδής,}$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{αρχική ταχύτητα,}$$

όπου f και g είναι δεδομένες συναρτήσεις.

- Προκειμένου οι αρχικές και οι συνοριακές συνθήκες να είναι **συμβατές**, πρέπει:

$$f(0) = f(L) = 0, \quad g(0) = g(L) = 0.$$

Πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για την κυματική εξίσωση

Αναζητούμε u τ.ω.

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad \text{για κάθε } t > 0, x \in (0, L)$$

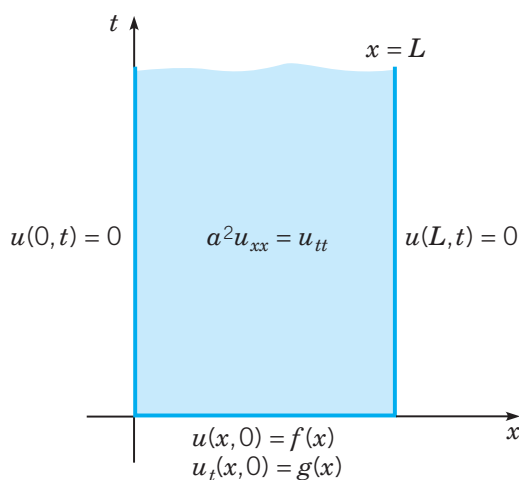
$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in [0, L] \quad \text{Αρχική συνθήκη}$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad \text{για κάθε } x \in [0, L] \quad \text{Αρχική συνθήκη}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \quad \text{Συνοριακές συνθήκες Dirichlet}$$

t : χρονική παράμετρος

x : χωρική παράμετρος



Ελαστική χορδή με μη μηδενική αρχική μετατόπιση

Αναζητούμε u τ.ω.

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad \text{για κάθε } t > 0, x \in (0, L)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad \text{για κάθε } x \in [0, L] \quad \text{Αρχικές συνθήκες}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{για κάθε } t > 0. \quad \text{Συνοριακές συνθ. Dirichlet}$$

(Συμβιβαστικότητα αρχικών/συνοριακών συνθηκών $\rightsquigarrow f(0) = f(L) = 0$.)

Χωρισμός μεταβλητών: Υποθέτουμε ότι $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του κύματος $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ και έχουμε:

$$XT'' = c^2 X''T.$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $c^2 XT$ και παίρνουμε:

$$\underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T}}_{\text{συναρτ. του } t} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{συναρτ. του } x} = -\lambda \quad (\text{σταθερά διαχωρισμού})$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα καταλήγουμε στις ΣΔΕ:} \quad & X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L \\ & T'' + c^2 \lambda T = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Από τις συνοριακές συνθ. έχουμε:

$$\begin{cases} u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(L, t) = X(L)T(t) = 0 \end{cases}, \text{ ισχύουν για κάθε } t \Rightarrow X(0) = 0 \text{ και } X(L) = 0.$$

Επίσης, από την αρχική συνθήκη έχουμε: $u_t(x, 0) = 0 \Rightarrow X(x)T'(0) = 0 \Rightarrow T'(0) = 0$.

Έτσι, καταλήγουμε στο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}$$

Οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του είναι:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση:

$$T_n'' + c^2 \lambda_n T_n = 0 \Rightarrow T_n(t) = k_1 \cos \frac{n\pi ct}{L} + k_2 \sin \frac{n\pi ct}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Όμως από την αρχική συνθήκη έχουμε: $T_n'(0) = 0$.

$$T_n'(t) = -k_1 \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} + k_2 \frac{n\pi c}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} \xrightarrow{T_n'(0)=0} k_2 = 0.$$

Άρα (ξεχνώντας τις σταθερές) έχουμε ότι οι συναρτήσεις:

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{θεμελιώδεις λύσεις})$$

ικανοποιούν τη ΜΔΕ, τις συνοριακές συνθήκες, και την ομογενή αρχική συνθήκη $u_t(x, 0) = 0$.

Για να ικανοποιηθεί και η μη ομογενής αρχική συνθήκη, $u(x, 0) = f(x)$, θα εξετάσουμε μια υπέρθεση των θεμελιωδών λύσεων με κατάλληλα επιλεγμένους συντελεστές.

Έτσι, υποθέτουμε ότι η $u(x, t)$ έχει τη μορφή

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L}. \quad (1)$$

Από την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = f(x)$ έχουμε:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

Άρα τα a_n είναι οι συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier της περιοδικής επέκτασης της f με περίοδο $2L$, δηλ.

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Παρατηρήσεις

- Για μια σταθερή τιμή του n , η παράσταση $\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L}$ είναι περιοδική ως προς t με περίοδο $2L/(nc)$. Επομένως αναπαριστά μια ταλάντωση της χορδής με αυτή την περίοδο ή με συχνότητα $n\pi c/L$.
Οι ποσότητες $n\pi c/L$, $n = 1, 2, \dots$ είναι οι **ιδιοσυχνότητες** της χορδής, δηλαδή οι συχνότητες στις οποίες η χορδή θα εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση.
- Ο παράγοντας $\sin(n\pi x/L)$ αντιπροσωπεύει τη μορφή της μετατόπισης που εμφανίζεται στη χορδή όταν εκτελεί ταλαντώσεις με τη δοθείσα συχνότητα. Κάθε τέτοιο μοτίβο μετατόπισης ονομάζεται φυσικός τρόπος ταλάντωσης ή ιδιοταλάντωση ή ιδιομορφή και είναι περιοδικός ως προς τη χωρική μεταβλητή x . Η χωρική περίοδος $2L/n$ ονομάζεται **μήκος κύματος** της ταλάντωσης με συχνότητα $n\pi c/L$. Έτσι, οι ιδιοτιμές $n^2\pi^2/L^2$ του προβλήματος είναι ανάλογες με τα τετράγωνα των φυσικών συχνοτήτων και οι ιδιοσυναρτήσεις $\sin(n\pi x/L)$ δίνουν τους φυσικούς τρόπους.
- Η συνολική κίνηση της χορδής, που δίνεται από τη συνάρτηση $u(x, t)$, είναι επομένως ένας συνδυασμός των ιδιομορφών ταλάντωσης και είναι, επίσης, μια περιοδική συνάρτηση του χρόνου με περίοδο $2L/c$.

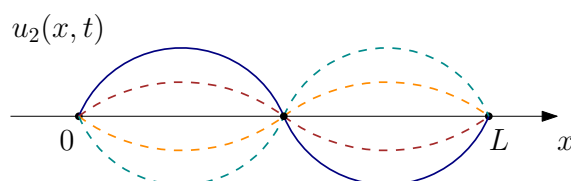
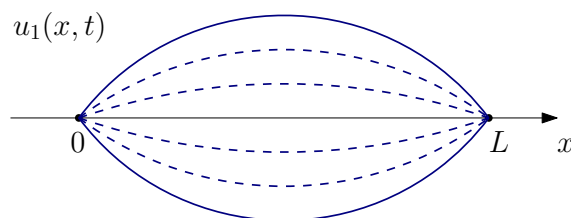
Οι δύο πρώτες θεμελιώδεις λύσεις

$$u_1(x, t) = \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi ct}{L}$$

Μήκος κύματος: $2L$,

$$u_2(x, t) = \sin \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{2\pi ct}{L}$$

Μήκος κύματος: L .



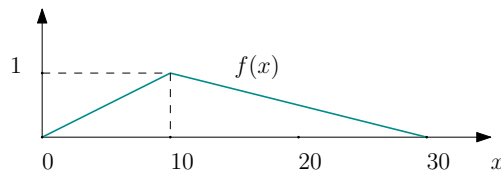
Παράδειγμα

$$u_{tt}(x, t) = 4 u_{xx}(x, t), \quad t > 0, x \in (0, 30)$$

$$u(0, t) = u(30, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} x, & 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{30-x}{20} x, & 10 < x \leq 30 \end{cases},$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 30.$$



Άρα $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{30} \cos \frac{2n\pi t}{30}$, όπου

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{30} \int_0^{30} f(x) \sin \frac{n\pi x}{30} dx = \frac{2}{30} \int_0^{10} \frac{x}{10} \sin \frac{n\pi x}{30} dx + \frac{2}{30} \int_{10}^{30} \frac{30-x}{20} \sin \frac{n\pi x}{30} dx \\ &= \dots = \frac{9}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

Όπως και στην περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας, έτσι κι εδώ, η παράσταση (1) με τους συντελεστές a_n να δίνονται από την (2) είναι μια **τυπική (formal) λύση** του προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση του κύματος που μελετήσαμε. Για να βεβαιωθούμε ότι πράγματι η (1) είναι λύση του συγκεκριμένου προβλήματος απαιτείται περαιτέρω δουλειά.

Αν προσπαθήσουμε να το δείξουμε άμεσα αντικαθιστώντας την (1) στην εξίσωση του κύματος, τότε κατά τον τυπικό υπολογισμό του όρου u_{xx} , π.χ., έχουμε

$$u_{xx}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L}.$$

Λόγω της παρουσίας του όρου n^2 στον αριθμητή, η σειρά αυτή ενδέχεται να μην συγκλίνει.

Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η σειρά (1) είναι λανθασμένη, αλλά μόνον ότι η σειρά αυτή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των u_{xx} και u_{tt} .

Παρατηρήσεις

Μια βασική διαφορά μεταξύ των λύσεων της κυματικής εξίσωσης και αυτών της εξίσωσης της θερμότητας είναι ότι οι τελευταίες περιέχουν αρνητικούς εκθετικούς όρους που πλησιάζουν το μηδέν πολύ γρήγορα καθώς το n αυξάνει. Αυτό εξασφαλίζει τη σύγκλιση της λύσης της σειράς και των παραγώγων της. Αντίθετα, η λύση σε μορφή σειράς της κυματικής εξίσωσης περιέχει μόνο ταλαντωτικούς όρους που δεν φθίνουν καθώς το n αυξάνει. Ωστόσο, υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος για να διαπιστώσουμε ότι ισχύει η (1). Ταυτόχρονα, θα αποκτήσουμε και κάποιες πληροφορίες σχετικά με τη δομή της λύσης. Αρχικά, θ.δ.ο. η (1) είναι ισοδύναμη με

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (h(x-ct) + h(x+ct)), \quad (3)$$

όπου h είναι η συνάρτηση που προκύπτει θεωρώντας αρχικά την περιττή επέκταση των αρχικών δεδομένων f στο $(-L, 0)$ και, στη συνέχεια, την περιοδική της επέκταση με περίοδο $2L$. Δηλαδή,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad 0 \leq x \leq L \\ -f(-x) & , \quad -L < x < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad h(x+2L) = h(x).$$

Για να αποδείξουμε την (3) παρατηρήστε ότι η h αναπτύσσεται στην ημιτονική σειρά Fourier

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

όπου οι συντελεστές a_n δίνονται από την (2).

(Υπενθύμιση: $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$.)

Άρα

$$\begin{aligned} h(x-ct) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} - \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} \right), \\ h(x+ct) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} \right), \end{aligned}$$

οπότε προσθέτοντας κατά μέλη καταλήγουμε στην (3).

Από την (3) βλέπουμε ότι η $u(x, t)$ είναι συνεχής για $0 < x < L, t > 0$, υπό την προϋπόθεση ότι η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αυτό απαιτεί η f να είναι συνεχής στο $[0, L]$.

Ομοίως, η u είναι C^2 ως προς x και t στην ημιάπειρη λωρίδα $0 < x < L, t > 0$, υπό την προϋπόθεση ότι $h \in C^2(\mathbb{R})$. Αυτό απαιτεί η f' και η f'' να είναι συνεχείς στο $[0, L]$.

Επιπλέον, δεδομένου ότι η h'' είναι η περιττή επέκταση της f'' , πρέπει επίσης να έχουμε $f''(0) = f''(L) = 0$. (Για την f δεν απαιτούνται περαιτέρω συνθήκες μιας και η h' είναι η άρτια επέκταση της f' .)

Αν πληρούνται αυτές οι συνθήκες, οι u_{xx} και u_{tt} μπορούν να υπολογιστούν από την (3), και μετά είναι εύκολο ν.δ.ο. αυτές οι παράγωγοι ικανοποιούν την κυματική εξίσωση.

Αν κάποια από τις συνθήκες αυτές για την f δεν ικανοποιείται, τότε η u μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμη σε κάποια σημεία της ημιάπειρης λωρίδας $0 < x < L, t > 0$, και η λύση θα ορίζεται με μια ιδιαίτερη έννοια. Άρα αν υπάρχουν ασυνέχειες στα αρχικά δεδομένα αυτές διατηρούνται στη λύση $u(x, t)$ για κάθε t . Αυτή είναι μια ουσιώδης διαφορά με την εξίσωση της θερμότητας.

Ελαστική χορδή με μη μηδενική αρχική ταχύτητα

Αναζητούμε u τ.ω.

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad \text{για κάθε } t > 0, x \in (0, L)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad \text{για κάθε } x \in [0, L] \quad \text{Αρχικές συνθήκες}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{για κάθε } t > 0. \quad \text{Συνοριακές συνθ. Dirichlet}$$

(Συμβιβαστότητα αρχικών/συνοριακών συνθηκών $\rightsquigarrow g(0) = g(L) = 0$.)

Κάνουμε, όπως και πριν, χωρισμό μεταβλητών $u(x, t) = X(x)T(t)$ και καταλήγουμε στο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases} \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

και στην εξίσωση:

$$T_n'' + c^2 \lambda_n T_n = 0 \Rightarrow T_n(t) = k_1 \cos \frac{n\pi ct}{L} + k_2 \sin \frac{n\pi ct}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Τώρα από την αρχική συνθήκη έχουμε: $T_n(0) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$.

Άρα (ξεχνώντας τις σταθερές) έχουμε ότι οι συναρτήσεις:

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{θεμελιώδεις λύσεις})$$

ικανοποιούν τη ΜΔΕ, τις συνοριακές συνθ., και την ομογενή αρχική συνθ. $u(x, 0) = 0$.

Για να ικανοποιήσουμε και τη μη ομογενή αρχική συνθήκη, υποθέτουμε ότι η $u(x, t)$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των θεμελιωδών λύσεων

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L}. \quad (4)$$

Τώρα $u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L}$, οπότε από την αρχική συνθήκη $u_t(x, 0) = g(x)$ έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x).$$

Άρα τα $\frac{n\pi c}{L} a_n$ είναι οι συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier της περιοδικής επέκτασης της g με περίοδο $2L$, δηλ.

$$a_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Το γενικό πρόβλημα

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών που αποτελείται από την **κυματική εξίσωση**, τις **ομογενείς συνοριακές συνθήκες** και τις γενικές αρχικές συνθήκες $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, $0 < x < L$, όπου $f(x)$ και $g(x)$ είναι η δεδομένη αρχική μετατόπιση και ταχύτητα, αντίστοιχα, της χορδής. Και το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με χωρισμό μεταβλητών, αλλά μπορεί επίσης να λυθεί απλώς προσθέτοντας τις δύο λύσεις που βρήκαμε παραπάνω.

Έστω v λύση του

$$\begin{aligned}v_{tt} &= c^2 v_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\v(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\v_t(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L, \\v(0, t) &= v(L, t) = 0, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

και w λύση του

$$\begin{aligned}w_{tt} &= c^2 w_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\w(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L, \\w_t(x, 0) &= g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\w(0, t) &= w(L, t) = 0, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Θέτουμε $u = v + w$. Τότε

- $u_{tt} = v_{tt} + w_{tt} = c^2(v_{xx} + w_{xx}) = c^2(v + w)_{xx} = c^2 u_{xx}$ για $t > 0$, $0 < x < L$.
- $u(x, 0) = v(x, 0) + w(x, 0) = f(x) + 0 = f(x)$, $0 < x < L$.
- $u_t(x, 0) = v_t(x, 0) + w_t(x, 0) = 0 + g(x) = g(x)$, $0 < x < L$.
- $u(0, t) = v(0, t) + w(0, t) = 0$ και $u(L, t) = v(L, t) + w(L, t) = 0$, $t > 0$.

Έτσι η λύση του γενικού προβλήματος είναι:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

όπου

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{και} \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$n = 1, 2, \dots$$