

Χωρισμός μεταβλητών – Διάδοση θερμότητας σε ράβδο

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Δημήτρης Μητσούδης

Χωρισμός μεταβλητών - Εισαγωγή

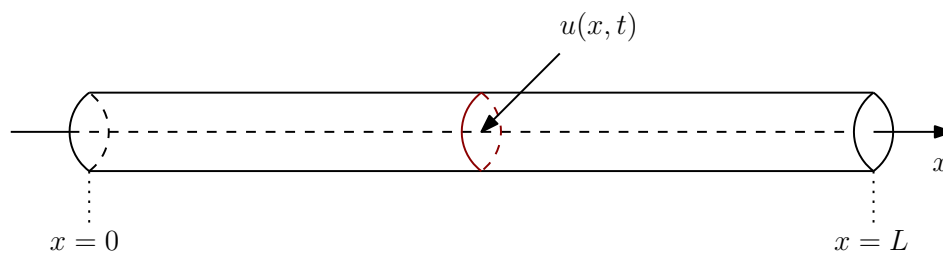
Οι βασικές μερικές διαφορικές εξισώσεις της **διάδοσης θερμότητας**, της **διάδοσης κυμάτων**, και της **θεωρίας δυναμικού**, που θα δούμε στη συνέχεια, συνδέονται με τρία διαφορετικά είδη φυσικών φαινομένων: τη **διάχυση**, τις **ταλαντώσεις** και τα **ανεξάρτητα από τον χρόνο (ή στάσιμα) φαινόμενα**. Κατά συνέπεια, οι εξισώσεις αυτές έχουν θεμελιώδη σημασία σε πολλούς κλάδους της φυσικής.

Επιπλέον, έχουν μεγάλη σημασία και από μαθηματική άποψη. Οι ΜΔΕ των οποίων η θεωρία έχει αναπτυχθεί καλύτερα και οι οποίες έχουν πολλές και σημαντικές εφαρμογές είναι οι γραμμικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Όλες αυτές οι εξισώσεις μπορούν να ταξινομηθούν σε μία από τρεις κατηγορίες: **παραβολικές**, **υπερβολικές**, και **ελλειπτικές**. Η εξίσωση μεταφοράς θερμότητας, η κυματική εξίσωση και η εξίσωση δυναμικού, αντίστοιχα, αποτελούν τα πρότυπα των κατηγοριών αυτών. Έτσι, η μελέτη των τριών αυτών εξισώσεων παρέχει πολλές πληροφορίες και για πιο γενικές γραμμικές ΜΔΕ δεύτερης τάξης.

Η μέθοδος του **χωρισμού των μεταβλητών** είναι η παλαιότερη συστηματική μέθοδος για την επίλυση ΜΔΕ. Χρησιμοποιήθηκε από τους D' Alembert, Daniel Bernoulli και Euler περί το 1750 στις έρευνές τους για τα κύματα και τις δονήσεις. Στο μεταξύ έχει βελτιωθεί και γενικευθεί σημαντικά και παραμένει και σήμερα μια μέθοδος μεγάλης σημασίας και συχνής χρήσης.

Η εξίσωση της θερμότητας

Θεωρούμε τώρα ένα πρόβλημα διάδοσης θερμότητας σε ευθύγραμμη ράβδο σταθερής διατομής και ομοιογενούς υλικού. Ο άξονας x επιλέγεται κατά μήκος του άξονα της ράβδου και έστω $x = 0$ και $x = L$ τα άκρα της ράβδου. Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι πλευρές της ράβδου είναι τέλεια μονωμένες ώστε να μην έχουμε μεταφορά θερμότητας δια μέσου αυτών. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι διαστάσεις της διατομής είναι τόσο μικρές ώστε η θερμοκρασία u να μπορεί να θεωρηθεί σταθερή σε κάθε δεδομένη διατομή. Τότε η u είναι συνάρτηση μόνο της αξονικής συντεταγμένης x και του χρόνου t .



Η μεταβολή της θερμοκρασίας στη ράβδο διέπεται από την ΜΔΕ:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (\alpha^2 : \text{συντελεστής θερμικής διάχυσης.})$$

Η σταθερά α^2 εξαρτάται μόνο από το υλικό κατασκευής της ράβδου.

Π.χ., χαλκός: $\alpha^2 = 1.14 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$, γρανίτης: $\alpha^2 = 0.011 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$.

Βοηθητικές συνθήκες:

- Η αρχική κατανομή θερμοκρασίας στη ράβδο είναι γνωστή:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

- Τα άκρα της ράβδου έχουν γνωστές και σταθερές θερμοκρασίες. (Θερμοκρασία T_1 στο άκρο $x = 0$ και θερμοκρασία T_2 στο $x = L$.) Αρχικά θα θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση ότι η u είναι πάντα μηδενική όταν $x = 0$ ή $x = L$:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Πρόβλημα Αρχικών/Συνοριακών Τιμών για την εξίσωση της θερμότητας

Αναζητούμε u τ.ω.

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad \text{για κάθε } t > 0, x \in (0, L)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in [0, L]$$

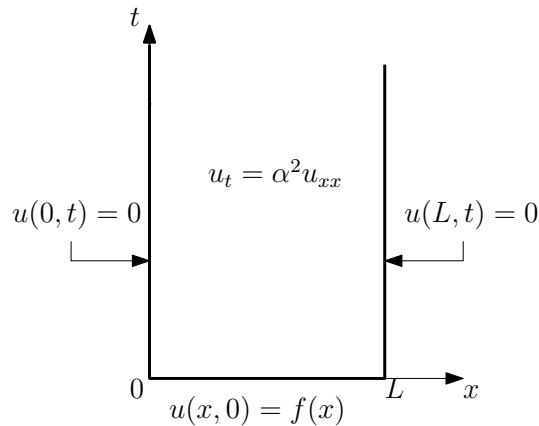
Αρχική συνθήκη

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{για κάθε } t > 0.$$

Συνοριακές συνθήκες Dirichlet

t : χρονική παράμετρος

x : χωρική παράμετρος



Υποθέτουμε ότι: $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Τότε $u_t = XT'$ (όπου $T' = \frac{dT}{dt}$) και $u_{xx} = X''T$ (όπου $X'' = \frac{d^2X}{dx^2}$).

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της θερμότητας $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ και έχουμε:

$$XT' = \alpha^2 X''T.$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $\alpha^2 XT$ και παίρνουμε:

$$\underbrace{\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T}}_{\text{συναρτ. του } t} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{συναρτ. του } x} = -\lambda \quad (\text{σταθερά διαχωρισμού})$$

Άρα καταλήγουμε στις ΣΔΕ:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L$$

$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0, \quad t > 0.$$

Από τις συνορ. συνθήκες έχουμε:

$$\begin{cases} u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(L, t) = X(L)T(t) = 0 \end{cases}, \text{ ισχύουν για κάθε } t \Rightarrow X(0) = 0 \text{ και } X(L) = 0.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Για το πρόβλημα αυτό είδαμε ότι οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του δίνονται από τους τύπους:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση:

$$T'_n + \alpha^2 \lambda_n T_n = 0 \Rightarrow \frac{T'_n}{T_n} = -\alpha^2 \lambda_n \Rightarrow T_n(t) = c e^{-\alpha^2 \lambda_n t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Άρα ξεχνώντας τις σταθερές έχουμε ότι οι συναρτήσεις:

$$u_n(x, t) = e^{-\alpha^2 \lambda_n t} X_n(x) = e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

που συχνά ονομάζονται **θεμελιώδεις λύσεις**, ικανοποιούν τόσο την εξίσωση της θερμότητας όσο και τις συνοριακές συνθήκες.

Αρκετές φορές λύσαμε ΠΑΤ χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης, δηλαδή σχηματίσαμε έναν γραμμικό συνδυασμό ενός συνόλου θεμελιωδών λύσεων της ΔΕ και στη συνέχεια επιλέξαμε τους συντελεστές ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες. Το ανάλογο βήμα στο παρόν πρόβλημα είναι να σχηματίσουμε έναν γραμμικό συνδυασμό των άπειρων συναρτήσεων u_n και στη συνέχεια να επιλέξουμε τους συντελεστές έτσι ώστε να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη. Έτσι υποθέτουμε ότι

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι η σειρά συγκλίνει.

Για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη πρέπει:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

Άρα τα c_n είναι οι συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier της αρχικής κατανομής θερμοκρασίας $f(x)$. Επομένως

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (2)$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος διάδοσης θερμότητας δίνεται από τη σειρά (1) με τους συντελεστές να υπολογίζονται από την (2).

Παρατηρήσεις

- Τονίζουμε ότι, σε αυτό το στάδιο, η λύση (1) έχει προκύψει με τυπικούς (formal) υπολογισμούς. Δηλαδή δεν έχουμε θεμελιώσει αυστηρά όλα τα βήματα που εμπλέκουν την έννοια του ορίου. Παρόλα αυτά, από τη στιγμή που βρήκαμε την έκφραση (1) είναι δυνατόν να δείξουμε ότι:
 - ▶ στο διάστημα $0 < x < L, t > 0$, συγκλίνει σε μια συνεχή συνάρτηση,
 - ▶ οι παράγωγοι u_{xx} και u_t μπορούν να υπολογιστούν παραγωγίζοντας τη σειρά στην (1) όρο προς όρο,
 - ▶ ικανοποιείται η εξίσωση της θερμότητας.

Όλα αυτά βασίζονται με ουσιαστικό τρόπο στο γεγονός ότι κάθε όρος της σειράς στην (1) περιέχει έναν αρνητικό εκθετικό παράγοντα που επιτρέπει στη σειρά να συγκλίνει σχετικά γρήγορα. Ένα περαιτέρω επιχείρημα αποδεικνύει ότι η συνάρτηση u που δίνεται από την εξίσωση (1) ικανοποιεί επίσης τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες - αυτό ολοκληρώνει την αιτιολόγηση της τυπικής λύσης.

- Είναι ενδιαφέρον ότι παρόλο που η f ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος σύγκλισης Fourier, μπορεί να έχει σημεία ασυνέχειας. Στην περίπτωση αυτή, η αρχική κατανομή θερμοκρασίας $u(x, 0) = f(x)$ μπορεί να είναι ασυνεχής σε ένα ή περισσότερα σημεία. Παρόλα αυτά, η λύση $u(x, t)$ είναι συνεχής για αυθαίρετα μικρές τιμές του $t > 0$. Αυτό υποδηλώνει ότι η **μετάδοση θερμότητας είναι μια διαδικασία με διάχυση που εξομαλύνει αμέσως τις ασυνέχειες που μπορεί να υπάρχουν στην αρχική κατανομή θερμοκρασίας**.
- Τέλος, εφόσον η f είναι φραγμένη, από την εξίσωση (2) προκύπτει άμεσα ότι οι συντελεστές c_n είναι επίσης φραγμένοι. Συνεπώς, η παρουσία του αρνητικού εκθετικού παράγοντα σε κάθε όρο της σειράς στην (1) εγγυάται ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$, για όλα τα x ανεξάρτητα από την αρχική συνθήκη. Αυτό είναι συμβατό με τη φυσική διαίσθηση.

Παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \alpha^2 u_{xx}(x, t), & \text{για κάθε } t > 0, x \in (0, 50), \\ u(x, 0) &= 20, & \text{για κάθε } x \in [0, 50], \\ u(0, t) &= u(50, t) = 0, & \text{για κάθε } t > 0. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με ότι είδαμε προηγουμένως η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{50^2} t} \sin \frac{n\pi x}{50},$$

Λόγω της αρχικής συνθήκης $u(x, 0) = 20$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{50} = 20,$$

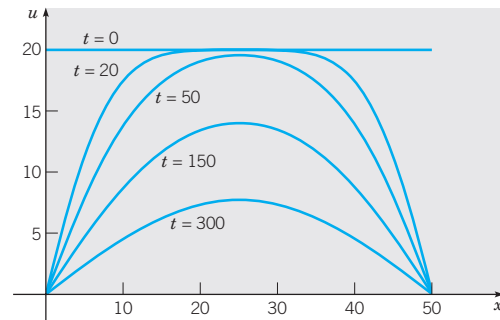
άρα τα c_n είναι οι συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier της σταθερής συνάρτησης $f(x) = 20$, οπότε

$$c_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} 20 \sin \frac{n\pi x}{50} dx = \frac{4}{5} \int_0^{50} \sin \frac{n\pi x}{50} dx = \frac{4}{5} \frac{50}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi x}{50} \right]_0^{50}$$

$$= \frac{40}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{40}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{80}{n\pi} & , \quad n : \text{περιττός} \\ 0 & , \quad n : \text{άρτιος} \end{cases}$$

Άρα, τελικά, η λύση σε κάθε σημείο x της ράβδου και σε κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο:

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{2500} t} \sin \frac{n\pi x}{50}.$$



Τα αποτελέσματα στο σχήμα είναι για $\alpha^2 = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$, που αντιστοιχεί σε μια ράβδο από ένα υλικό του οποίου οι θερμικές ιδιότητες είναι κάπου μεταξύ χαλκού και αλουμινίου. Στο σχήμα παρουσιάζεται η κατανομή της θερμοκρασίας στη ράβδο σε διάφορες χρονικές στιγμές. Παρατηρήστε ότι η θερμοκρασία μειώνεται σταθερά καθώς ο χρόνος αυξάνεται.

Ένα πρόβλημα με πιθανό πρακτικό ενδιαφέρον είναι η εκτίμηση της χρονικής στιγμής τ κατά την οποία ολόκληρη η ράβδος θα έχει ψυχθεί σε μια συγκεκριμένη θερμοκρασία.

Π.χ., τότε η θερμοκρασία σε ολόκληρη τη ράβδο θα είναι $\leq 1^\circ\text{C}$;

Λόγω της συμμετρίας της κατανομής της αρχικής θερμοκρασίας και των συνοριακών συνθηκών, το θερμότερο σημείο της ράβδου είναι πάντα το κέντρο. Έτσι, ο χρόνος τ βρίσκεται επιλύοντας την $u(25, \tau) = 1$ ως προς τ .

Χρησιμοποιώντας έναν όρο ($n = 1$) στο ανάπτυγμα της σειράς, έχουμε την εκτίμηση:

$$1 = u(25, \tau) = \frac{80}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{2500} \tau} \underbrace{\sin \frac{25\pi}{50}}_{=1} \Rightarrow e^{\frac{\pi^2}{2500} \tau} = \frac{80}{\pi} \Rightarrow \tau = \frac{2500}{\pi^2} \ln\left(\frac{80}{\pi}\right) \approx 820 \text{ s.}$$

Συνθήκες Neumann – Ράβδος με μονωμένα άκρα

Ένα ελαφρώς διαφορετικό πρόβλημα εμφανίζεται εάν θεωρήσουμε ότι τα άκρα της ράβδου είναι **μονωμένα**, ώστε να μην υπάρχει ροή θερμότητας μέσω αυτών. Ο ρυθμός ροής θερμότητας σε μια διατομή είναι ανάλογος του ρυθμού μεταβολής της θερμοκρασίας κατά τη διεύθυνση x . Έτσι, στην περίπτωση που δεν υπάρχει ροή θερμότητας, οι συνοριακές συνθήκες είναι **τύπου Neumann**

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Επομένως, τώρα αναζητούμε u τ.ω.

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad \text{για κάθε } t > 0, x \in (0, L)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in [0, L]$$

Αρχική συνθήκη

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad \text{για κάθε } t > 0.$$

Συνοριακές συνθήκες Neumann

Και το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών.

Υποθέτουμε ότι: $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της θερμότητας $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ και (όπως πριν) βρίσκουμε:

$$\underbrace{\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T}}_{\text{συναρτ. του } t} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{συναρτ. του } x} = -\lambda \quad (\text{σταθερά διαχωρισμού})$$

Άρα, και πάλι, καταλήγουμε στις ΣΔΕ: $X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L$

$$T'' + \alpha^2 \lambda T = 0, \quad t > 0.$$

Από τις συνορ. συνθήκες έχουμε:

$$\begin{cases} u_x(0, t) = X'(0)T(t) = 0 \\ u_x(L, t) = X'(L)T(t) = 0 \end{cases}, \text{ ισχύουν για κάθε } t \Rightarrow X'(0) = 0 \text{ και } X'(L) = 0.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < L \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

Επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών: $X'' + \lambda X = 0$, $0 < x < L$, $X'(0) = X'(L) = 0$

Υποθέτουμε ότι $\lambda \in \mathbb{R}$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(1) Έστω $\lambda = -\mu^2 < 0$, ($\mu > 0$).

Γενική λύση της ΔΕ $X'' - \mu^2 X = 0$:

$$X(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} \Rightarrow X'(x) = \mu c_1 e^{\mu x} - \mu c_2 e^{-\mu x}.$$

Επιπλέον,

$$\triangleright X'(0) = 0 \Rightarrow \mu c_1 - \mu c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2.$$

$$\triangleright X'(L) = 0 \Rightarrow \mu c_1 (e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0.$$

Επειδή $\mu > 0$ θα πρέπει αναγκαστικά $c_1 = 0$ άρα και $c_2 = 0$.

Άρα το πρόβλημα αυτό δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές.

(2) Έστω $\lambda = 0$.

Γενική λύση της ΔΕ $X'' = 0$: $X(x) = c_1 x + c_2 \Rightarrow X'(x) = c_1$.

$$\triangleright X'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

$$\triangleright X'(L) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Άρα $X(x) = c_2$ είναι μη τετριμμένη λύση και, επομένως, η τιμή $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση τη σταθερή συνάρτηση $X(x) = 1$.

(3) Έστω $\lambda = \mu^2 > 0$, ($\mu > 0$).

Γενική λύση της ΔΕ $X'' + \mu^2 X = 0$:

$$X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x) \Rightarrow X'(x) = -\mu c_1 \sin(\mu x) + \mu c_2 \cos(\mu x).$$

$$\triangleright X'(0) = 0 \Rightarrow \mu c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

$$\triangleright X'(L) = 0 \Rightarrow -\mu c_1 \sin \mu L = 0 \Rightarrow \sin \mu L = 0 \Rightarrow \mu L = n\pi \Rightarrow \mu_n = \frac{n\pi}{L}, \\ n = 1, 2, \dots$$

Άρα το πρόβλημα ιδιοτιμών: $X'' + \lambda X = 0$, $0 < x < L$, $X'(0) = X'(L) = 0$, έχει ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_n} x = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση:

$$T'_n + \alpha^2 \lambda_n T_n = 0 \Rightarrow T_n(t) = c e^{-\alpha^2 \lambda_n t}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Συνεπώς (παραλείποντας τις σταθερές) έχουμε ότι οι συναρτήσεις:

$$u_0(x, t) = 1 \quad \text{και} \quad u_n(x, t) = e^{-\alpha^2 \lambda_n t} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

ικανοποιούν τόσο την εξίσωση της θερμότητας όσο και τις συνοριακές συνθήκες Neumann.

Άρα

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} u_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t} \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (3)$$

Για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη πρέπει:

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Άρα τα c_n είναι οι συντελεστές της συνημιτονικής σειράς Fourier της αρχικής κατανομής θερμοκρασίας $f(x)$. Επομένως

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος διάδοσης θερμότητας δίνεται από τη σειρά (3) με τους συντελεστές c_n να υπολογίζονται από την (4).

Παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), & \text{για κάθε } t > 0, x \in (0, 25), \\u(x, 0) &= x, & \text{για κάθε } x \in [0, 25], \\u_x(0, t) &= u_x(25, t) = 0, & \text{για κάθε } t > 0. \text{ Μονωμένα άκρα}\end{aligned}$$

Σύμφωνα με ότι είδαμε προηγουμένως η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{25^2} t} \cos \frac{n\pi x}{25},$$

Λόγω της αρχικής συνθήκης $u(x, 0) = x$, έχουμε ότι

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{25} = x,$$

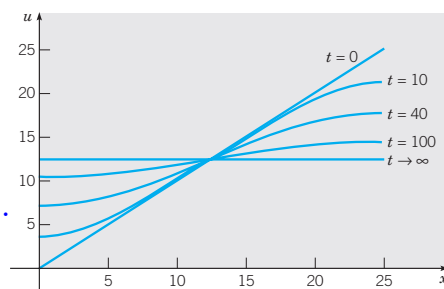
άρα τα c_n είναι οι συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier της $f(x) = x$, οπότε

$$c_0 = \frac{2}{25} \int_0^{25} x \, dx = \frac{2}{25} \frac{25^2}{2} = 25.$$

$$c_n = \frac{2}{25} \int_0^{25} x \cos \frac{n\pi x}{25} \, dx = \dots = \begin{cases} -\frac{100}{n^2 \pi^2} & , \quad n : \text{περιττός} \\ 0 & , \quad n : \text{άρτιος} \end{cases}$$

Άρα, τελικά, η λύση σε κάθε σημείο x της ράβδου και σε κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο:

$$u(x, t) = \frac{25}{2} - \frac{100}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{625} t} \cos \frac{n\pi x}{25}.$$



Στο σχήμα παρουσιάζεται η κατανομή της θερμοκρασίας στη ράβδο σε διάφορες χρονικές στιγμές. Παρατηρήστε ότι η θερμοκρασία καθώς περνάει ο χρόνος τείνει προς την τιμή $12.5 = \frac{1}{25} \int_0^{25} x \, dx$, που μπορεί να ερμηνευθεί ως η μέση τιμή της αρχικής κατανομής θερμοκρασίας.

Μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet

Θεωρούμε το κάπως γενικότερο πρόβλημα όπου τα άκρα της ράβδου έχουν γνωστές και σταθερές θερμοκρασίες. (Θερμοκρασία T_1 στο άκρο $x = 0$ και θερμοκρασία T_2 στο $x = L$.)
Δηλαδή

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad \text{για κάθε } t > 0, x \in (0, L)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in [0, L] \quad \text{Αρχική συνθήκη}$$

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2, \quad \text{για κάθε } t > 0. \quad \text{Μη ομογενείς σ.σ. Dirichlet}$$

Θα λύσουμε το πρόβλημα αυτό ανάγοντάς το σε ένα πρόβλημα με ομογενείς σ.σ. Η τεχνική που θα ακολουθήσουμε βασίζεται στο ακόλουθο φυσικό επιχείρημα:

Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα (καθώς $t \rightarrow \infty$) αναμένουμε ότι η όλη διαδικασία θα καταλήξει σε μια σταθερή κατανομή θερμοκρασίας $v(x)$, που θα είναι ανεξάρτητη του χρόνου t και της αρχικής συνθήκης. Τότε η εξίσωση της θερμότητας για την v γίνεται:

$$\underbrace{v_t}_{=0} = \alpha^2 v_{xx} \Rightarrow v''(x) = 0 \Rightarrow v(x) = ax + b.$$

Η $v(x)$ πρέπει να ικανοποιεί τις σ.σ. $v(0) = T_1, v(L) = T_2$, που ισχύουν ακόμη και όταν $t \rightarrow \infty$.

Τώρα, $v(0) = T_1 \Rightarrow b = T_1$ και $v(L) = T_2 \Rightarrow a = (T_2 - T_1)/L$. Δηλαδή η v είναι η γραμμική συνάρτηση:

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1.$$

Επιστρέφουμε στο αρχικό πρόβλημα και εκφράζουμε την u ως εξής:

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t).$$

Επομένως,

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \Rightarrow (v + w)_t = \alpha^2 (v + w)_{xx} \Rightarrow \underbrace{v_t}_{=0} + w_t = \alpha^2 \underbrace{v_{xx}}_{=0} + \alpha^2 w_{xx} \Rightarrow w_t = \alpha^2 w_{xx}$$

$$w(0, t) = u(0, t) - v(0) = T_1 - T_1 = 0.$$

$$w(L, t) = u(L, t) - v(L) = T_2 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}L + T_1 \right) = 0.$$

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x) = f(x) - v(x).$$

Άρα η w ικανοποιεί το πρόβλημα:

$$w_t(x, t) = \alpha^2 w_{xx}(x, t), \quad \text{για κάθε } t > 0, x \in (0, L)$$

$$w(x, 0) = f(x) - v(x), \quad \text{για κάθε } x \in [0, L] \quad \text{με } v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1.$$

$$w(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad \text{για κάθε } t > 0. \quad \text{Ομογενείς σ.σ. Dirichlet}$$

Άρα

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

με

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L (f(x) - v(x)) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \frac{T_2 - T_1}{L}x - T_1 \right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Τελικά,

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

με c_n όπως παραπάνω.