

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Δημήτρης Μητσούδης

ΜΔΕ - Εισαγωγή

Σε μια Μερική Διαφορική Εξίσωση (ΜΔΕ) υπάρχουν περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές: $x, y, \dots$

Επίσης, υπάρχει και μια εξαρτημένη μεταβλητή που είναι μια άγνωστη συνάρτηση αυτών: $u(x, y, \dots)$.

Συμβολισμός: $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Μια ΜΔΕ είναι μια εξίσωση που συνδέει τις ανεξάρτητες μεταβλητές, την εξαρτημένη μεταβλητή u , και μερικές παραγώγους της u .

Τάξη μιας εξίσωσης λέγεται η υψηλότερη τάξη μερικής παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Π.χ. η γενικότερη μορφή μιας ΜΔΕ 1ης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι:

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1)$$

όπου F : δεδομένη, u : άγνωστη.

Η γενικότερη μορφή μιας ΜΔΕ 2ης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \quad (2)$$

Λύση μιας ΜΔΕ είναι μια συνάρτηση $u(x, y, \dots)$ που ικανοποιεί την εξίσωση (τουλάχιστον σε κάποιο χωρίο των μεταβλητών $x, y, \dots$).

Θα αναφερθούμε κυρίως σε **κλασσικές** λύσεις, δηλ. η συνάρτηση u θα είναι αρκούντως ομαλή ώστε όλες οι παράγωγοι που εμφανίζονται στην εξίσωση να είναι συνεχείς.

Παραδείγματα ΜΔΕ

1. Έστω $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto u(x, y)$. Η εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{μεταφορά}$$

είναι ΜΔΕ 1ης τάξης στον $\mathbb{R}^2$ σε δύο διαστάσεις.

2. Έστω $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto u(x, y)$. Η εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{κρουστικό κύμα}$$

είναι ΜΔΕ 1ης τάξης στον $\mathbb{R}^2$ σε δύο διαστάσεις.

3. Έστω $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto u(t, x)$. Η εξίσωση

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad \text{κύμα με διασπορά}$$

είναι ΜΔΕ 3ης τάξης στον $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ σε δύο διαστάσεις.

Παραδείγματα ΜΔΕ

4. Έστω $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto u(x, y, z)$. Η εξίσωση

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \text{εξ. Laplace}$$

είναι ΜΔΕ 2ης τάξης στον $\mathbb{R}^3$ σε τρεις διαστάσεις.

5. Έστω $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, x, y) \mapsto u(t, x, y)$. Η εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (= \Delta u), \quad \text{εξ. θερμότητας}$$

είναι ΜΔΕ 2ης τάξης στον $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^2$ σε τρεις διαστάσεις.

6. Έστω $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (t, x, y, z) \mapsto u(t, x, y, z)$. Η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} (= \Delta u), \quad \text{εξ. κύματος}$$

είναι ΜΔΕ 2ης τάξης στον $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ σε 4 διαστάσεις.

7. Έστω $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto u(t, x)$. Η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad \text{ταλαντούμενη ράβδος}$$

είναι ΜΔΕ 4ης τάξης στον $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ σε δύο διαστάσεις.

Γραμμικότητα

Λέμε ότι τα παραδείγματα 1, 4, 5, 6, 7 είναι **γραμμικά**, ενώ τα 2, 3 είναι **μη γραμμικά**.

Έστω ότι η ΜΔΕ γράφεται στη μορφή $Lu = 0$, όπου L είναι ένας **τελεστής**.

(Τελεστής: Αν u συνάρτηση, τότε Lu είναι μια νέα συνάρτηση.)

Π.χ. για την (1): $L \cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial x} + \frac{\partial \cdot}{\partial y}$.

$$\therefore Lu = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Αν ισχύουν οι ιδιότητες:

$$L(u + v) = L(u) + L(v), \quad L(cu) = cL(u),$$

για οποιεσδήποτε συναρτήσεις u, v και οποιαδήποτε σταθερά c , λέμε ότι ο τελεστής L είναι **γραμμικός**.

Γραμμικές εξισώσεις

Αν ο L είναι γραμμικός τελεστής,

- τότε η εξίσωση $Lu = 0$ λέγεται **ομογενής γραμμική** εξίσωση,
- και η εξίσωση $Lu = g$, με $g \neq 0$ γνωστή συνάρτηση, λέγεται **μη ομογενής** γραμμική εξίσωση.

Άσκηση:

Ελέγξτε ότι οι εξισώσεις στα παραδείγματα 1, 4, 5, 6, 7 είναι γραμμικές, ενώ στα 2, 3 είναι μη γραμμικές.

Ιδιότητες γραμμικών εξισώσεων

1. Αν $u_1, u_2, \dots, u_n$ λύσεις της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης $Lu = 0$, τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n, \quad c_i \text{ σταθερές}$$

θα είναι λύση. (**Αρχή της υπέρθεσης ή αρχή της επαλληλίας.**)

2. Αν u είναι μια λύση της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης $Lu = 0$ και w είναι μια λύση της μη ομογενούς γραμμικής εξίσωσης $Lw = g$, τότε η $u + w$ είναι λύση της μη ομογενούς, δηλ.

$$L(u + w) = g.$$

Παραδείγματα επίλυσης (απλών) ΜΔΕ

- ❶ Θεωρήστε την $u_{xx} = 0$. Ολοκληρώνοντας μια φορά ως προς x έχουμε:

$$u_x(x, y) = f(y) \quad \text{όπου } f \text{ αυθαίρετη συνάρτηση.}$$

$$\int \frac{dx}{\Rightarrow} u(x, y) = f(y)x + g(y).$$

(Παρατηρήστε ότι υπάρχουν δύο αυθαίρετες συναρτήσεις στη λύση.)

- ❷ Θεωρήστε την $u_{xy} = 0$. Ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς y (θεωρώντας το x σταθερό):

$$u_x(x, y) = f(x) \quad \text{όπου } f \text{ αυθαίρετη συνάρτηση.}$$

$$\int \frac{dx}{\Rightarrow} u(x, y) = F(x) + G(y), \quad \text{όπου } F' = f.$$

(Παρατηρήστε ότι και πάλι υπάρχουν αυθαίρετες συναρτήσεις στη λύση.)

ΜΔΕ 2ης τάξης – Ταξινόμηση

Θεωρούμε τη γενική μορφή γραμμικής ΜΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές σε δύο ανεξ. μεταβλητές, έστω x, y :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = f, \quad (3)$$

όπου $a_{ij}, a_i \in \mathbb{R}$ και f είναι συνάρτηση των (x, y) .

Υπενθύμιση: Η καμπύλη $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ του xy -επιπέδου είναι:

- έλλειψη αν: $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$
- υπερβολή αν: $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$
- παραβολή αν: $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$

Ορισμός

Η εξίσωση (3) λέγεται

- **ελλειπτική** αν: $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$
- **υπερβολική** αν: $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$
- **παραβολική** αν: $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$

Η ποσότητα $\mathcal{D} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ λέγεται **διακρίνουσα** (σε αντιστοιχία με το τριώνυμο).

Στην περίπτωση που οι συντελεστές $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0$ είναι συναρτήσεις των (x, y) η εξίσωση (3) θα είναι ελλειπτική, υπερβολική ή παραβολική στο σημείο (x, y) ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας $\mathcal{D}$, αλλά η εξίσωση μπορεί να αλλάζει τύπο σε διάφορες περιοχές του επιπέδου.

Παραδείγματα

- **Εξίσωση Laplace:** $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0 \quad \therefore \text{Ελλειπτική.}$$

- **Εξίσωση του κύματος:** $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1 \cdot (-1) = 1 > 0 \quad \therefore \text{Υπερβολική.}$$

- **Εξίσωση της θερμότητας:** $u_t - u_{xx} = 0$.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1 \cdot 0 = 0 \quad \therefore \text{Παραβολική.}$$

- **Εξίσωση Tricomi:** $u_{yy} - yu_{xx} = 0$.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - (-y) \cdot 1 = y.$$

Άρα: **Ελλειπτική** αν $y < 0$, **Υπερβολική** αν $y > 0$, και **Παραβολική** αν $y = 0$.

Άσκηση:

Βρείτε τον τύπο των εξισώσεων: (α) $u_{xx} + 2yu_{xy} + xu_{yy} - u_x + u = 0$

(β) $2xyu_{xy} + xu_y + yu_x = 0$.

Θεώρημα

Θεωρήστε την εξίσωση (3) με $f = 0$. Τότε με μια γραμμική αλλαγή μεταβλητών $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$, $U(\xi, \eta) = u(x, y)$, η εξίσωση μπορεί να αναχθεί σε έναν από τους ακόλουθους τρεις τύπους:

- ❶ Αν $\mathcal{D} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (ελλειπτικού τύπου):

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \text{όροι χαμηλότερης τάξης} = 0.$$

- ❷ Αν $\mathcal{D} > 0$ (υπερβολικού τύπου):

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + \text{όροι χαμηλότερης τάξης} = 0.$$

- ❸ Αν $\mathcal{D} = 0$ (παραβολικού τύπου):

$$U_{\xi\xi} + \text{όροι χαμηλότερης τάξης} = 0.$$

Απόδειξη: Η εξίσωση είναι 2ης τάξης, συνεπώς θα είναι $a_{11} \neq 0$, ή $a_{22} \neq 0$, ή $a_{12} \neq 0$.

Επειδή ο τύπος της εξίσωσης καθορίζεται από τις παραγώγους δεύτερης τάξης μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $a_1 = a_2 = a_0 = 0$.

Περίπτωση Α': Έστω $a_{11} \neq 0$ ή $a_{22} \neq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $a_{11} = 1$.

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = 0. \quad (4)$$

Συμβολίζουμε με $\partial_x u = \frac{\partial u}{\partial x}$ και με $\partial_x^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Τότε η (4) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} & (\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2)u = 0 \quad (\text{Προσθαφαιρούμε τον όρο: } a_{12}^2\partial_y^2) \\ \Rightarrow & (\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + \color{red}{a_{12}^2}\partial_y^2 + a_{22}\partial_y^2 - \color{red}{a_{12}^2}\partial_y^2)u = 0 \\ \Rightarrow & (\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{12}^2\partial_y^2)u + (a_{22}\partial_y^2 - a_{12}^2\partial_y^2)u = 0 \\ \Rightarrow & (\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 u + (a_{22} - a_{12}^2)\partial_y^2 u = 0. \end{aligned}$$

1) Στην ελλειπτική περίπτωση: $a_{12}^2 < a_{22}$. Έστω $b = \sqrt{a_{22} - a_{12}^2}$.

Τότε η (4) γράφεται:

$$\underbrace{(\partial_x + a_{12}\partial_y)^2}_{:=\partial_\xi} u + \underbrace{(b\partial_y)^2}_{:=\partial_\eta} u = 0.$$

Θέτουμε

$$\partial_\xi := \partial_x + a_{12}\partial_y \quad \text{και} \quad \partial_\eta := b\partial_y,$$

όπου βεβαίως πρέπει να ορίσουμε κατάλληλα τις μεταβλητές ξ και η .

Θα πρέπει (κανόνας αλυσίδας):

$$\partial_\xi = \partial_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \partial_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{και} \quad \partial_\eta = \partial_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \partial_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

$$\text{Συγκρίνοντας έχουμε:} \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = a_{12}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = b.$$

$$\text{Άρα θα πρέπει: } x = \xi \quad \text{και} \quad y = a_{12}\xi + b\eta \Rightarrow \xi = x \quad \text{και} \quad \eta = \frac{1}{b}y - \frac{a_{12}}{b}x.$$

Με αυτή την αλλαγή μεταβλητής αν ορίσουμε $U(\xi, \eta) = u(x, y)$, η (4) γράφεται στη μορφή:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0.$$

2) Στην υπερβολική περίπτωση: $a_{12}^2 > a_{22}$. Τώρα η (4) γράφεται:

$$(\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 u - (\sqrt{a_{12}^2 - a_{22}} \partial_y)^2 u = 0.$$

Θέτουμε $b := \sqrt{a_{12}^2 - a_{22}} > 0$ και εργαζόμενοι όπως πριν, αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$x = \xi \quad \text{και} \quad y = a_{12}\xi + b\eta,$$

καταλήγουμε ότι η (4) γράφεται στη μορφή:

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0.$$

3) Στην παραβολική περίπτωση: $a_{12}^2 = a_{22}$. Τώρα η (4) γράφεται:

$$(\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 u = 0.$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών: $x = \xi$ και $y = a_{12}\xi + \eta$, και καταλήγουμε ότι η (4) γράφεται στη μορφή:

$$U_{\xi\xi} = 0.$$

Περίπτωση Β': Έστω $a_{11} = a_{22} = 0$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$u_{xy} = 0. \quad (5)$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών: $\xi = x + y$ και $\eta = x - y$.

Τότε αν $u(x, y) = U(\xi, \eta)$, έχουμε:

$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi + U_\eta.$$

Στη συνέχεια,

$$\begin{aligned} u_{xy} &= (U_\xi + U_\eta)_y = (U_\xi + U_\eta)_\xi \xi_y + (U_\xi + U_\eta)_\eta \eta_y \\ &= (U_{\xi\xi} + U_{\eta\xi}) \cdot (1) + (U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) \cdot (-1) = U_{\xi\xi} + U_{\eta\xi} - U_{\xi\eta} - U_{\eta\eta} \\ &= U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Άρα η (5) γράφεται στη μορφή:

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0.$$

Παρατηρήσεις

Η εξίσωση του κύματος: $u_{tt} - u_{xx} = 0$ με την αλλαγή μεταβλητών $\xi = x + t$, $\eta = x - t$, γράφεται στη μορφή: $U_{\xi\eta} = 0$.

Εφαρμογή: Να λυθεί η εξίσωση του κύματος: $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

Θέτουμε $\xi = x + t$, $\eta = x - t$, οπότε η εξίσωση γίνεται: $U_{\xi\eta} = 0$.

Ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς η (θεωρώντας το ξ σταθερό):

$$\begin{aligned} U_\xi &= \tilde{f}(\xi), \quad \text{όπου } \tilde{f} \text{ αυθαίρετη συνάρτηση.} \\ \Rightarrow U(\xi, \eta) &= f(\xi) + g(\eta), \quad \text{όπου } f' = \tilde{f}. \end{aligned}$$

Άρα η λύση της εξίσωσης του κύματος $u_{tt} - u_{xx} = 0$ είναι:

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t),$$

όπου f και g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις.

Παράδειγμα 1

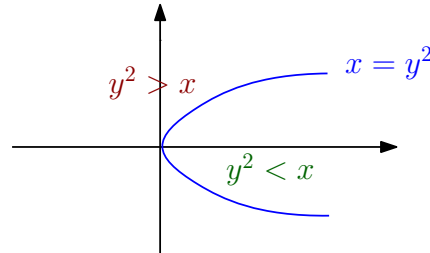
Να βρεθεί ο τύπος των εξισώσεων:

$$(α) \quad u_{xx} + 2yu_{xy} + xu_{yy} - u_x + u = 0.$$

$$(β) \quad 2xyu_{xy} + xu_y + yu_x = 0.$$

$$(α) \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2 - 1 \cdot x = y^2 - x. \text{ Άρα}$$

- Αν $y^2 > x$ είναι υπερβολική.
- Αν $y^2 = x$ είναι παραβολική.
- Αν $y^2 < x$ είναι ελλειπτική.



$$(β) \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2 \geq 0. \text{ Άρα}$$

- Υπερβολική αν $xy \neq 0$.
- Πρώτης τάξης αν $xy = 0$.

Παράδειγμα 2

Να μετατραπεί η εξίσωση $4u_{xx} + 12u_{xy} + 9u_{yy} - 2u_x + u = 0$ στην πρότυπη μορφή.

$$\text{Εδώ: } a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0 \Rightarrow \text{παραβολικού τύπου.}$$

$$\text{Τη γράφουμε στη μορφή: } u_{xx} + 2 \cdot \frac{3}{2}u_{xy} + \frac{9}{4}u_{yy} - \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{4}u = 0 \quad (\text{ώστε } a_{11} = 1).$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$x = \xi, \quad y = a_{12}\xi + \eta \quad \Leftrightarrow \quad x = \xi, \quad y = \frac{3}{2}\xi + \eta \quad \Leftrightarrow \quad \xi = x, \quad \eta = -\frac{3}{2}x + y$$

Τότε η εξίσωση γράφεται ως:

$$\begin{aligned} & \left(\partial_x^2 + 2\frac{3}{2}\partial_x\partial_y + \frac{9}{4}\partial_y^2 \right) u - \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{4}u = 0 \\ \Rightarrow & \left(\partial_x + \frac{3}{2}\partial_y \right)^2 u - \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{4}u = 0. \end{aligned}$$

Με την αλλαγή μεταβλητής που κάναμε $\partial_x + \frac{3}{2}\partial_y = \partial_\xi$.

Επίσης, αν $u(x, y) = U(\xi, \eta)$ (από κανόνα αλυσίδας): $u_x = U_\xi\xi_x + U_\eta\eta_x = U_\xi - \frac{3}{2}U_\eta$.

∴ Πρότυπη μορφή της εξίσωσης:

$$U_{\xi\xi} - \frac{1}{2}(U_\xi - \frac{3}{2}U_\eta) + \frac{1}{4}U = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{\xi\xi} - \frac{1}{2}U_\xi + \frac{3}{4}U_\eta + \frac{1}{4}U = 0.$$

Πρότυπα εξισώσεων κάθε τύπου

- Υπερβολική: Εξίσωση του κύματος, $u_{tt} - \Delta u = 0$.

$\mathbb{R}$	(1-χωρική διάσταση):	$u_{tt} - u_{xx} = 0$
$\mathbb{R}^3$	(3-χωρικές διαστάσεις):	$u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$

- Παραβολική: Εξίσωση της θερμότητας, $u_t - \Delta u = 0$.

$\mathbb{R}$	(1-χωρική διάσταση):	$u_t - u_{xx} = 0$
$\mathbb{R}^3$	(3-χωρικές διαστάσεις):	$u_t - (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$

- Ελλειπτική: Εξίσωση Laplace, $\Delta u = 0$.

$\mathbb{R}^2$:	$u_{xx} + u_{yy} = 0$
$\mathbb{R}^3$:	$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

W. Strauss, ΜΔΕ: Μια εισαγωγή (2η έκδοση), Παν. Εκδ. Ε.Μ.Π.

Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Γενικά, οι ΜΔΕ έχουν πολλές λύσεις. Για να επιλέξουμε κάποια από αυτές θα πρέπει επιπλέον να καθορίσουμε βοηθητικές συνθήκες. Αυτές προέρχονται συνήθως από τη φυσική του προβλήματος και είναι δύο ειδών:

α) αρχικές συνθήκες, και β) συνοριακές συνθήκες.

Μια **αρχική συνθήκη** προσδιορίζει την κατάσταση του συστήματος που περιγράφει η ΜΔΕ σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 . Π.χ.

- Για την εξίσωση της θερμότητας $u_t - \Delta u = 0$, η αρχική συνθήκη είναι της μορφής

$$u(\mathbf{x}, t_0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \text{όπου } \varphi \text{ είναι δοσμένη συνάρτηση του } \mathbf{x} = (x, y, z).$$

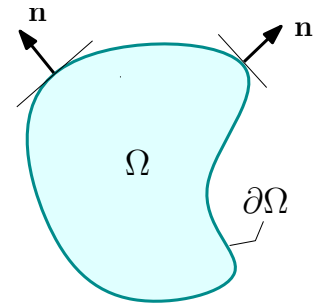
- Για την εξίσωση του κύματος χρειαζόμαστε ένα ζεύγος αρχικών συνθηκών:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t_0) &= \varphi(\mathbf{x}), && \leftarrow \text{(αρχική θέση)} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0) &= \psi(\mathbf{x}), && \leftarrow \text{(αρχική ταχύτητα)} \end{aligned}$$

Σε κάθε φυσικό πρόβλημα μια ΜΔΕ αναφέρεται σε ένα χωρίο Ω .

Θα συμβολίζουμε με $\partial\Omega$ το **σύνορο του Ω** .

Τα τρία σημαντικότερα είδη **συνοριακών συνθηκών** είναι τα εξής:



- Συνθήκες **Dirichlet**: $u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \geq t_0$.

Δηλ. καθορίζονται οι τιμές της u πάνω στο σύνορο του Ω .

- Συνθήκες **Neumann**: $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \geq t_0$.

Δηλ. καθορίζονται οι τιμές της κατά κατεύθυνσης παραγώγου της u στην κατεύθυνση του **εξωτερικού μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{n}$** σε κάθε σημείο του συνόρου του Ω .

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} \right).$$

- Συνθήκες **Robin ή μεικτές**: $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) + a(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \geq t_0$.

Καλώς τεθειμένα προβλήματα (well-posed problems)

Καλώς τεθειμένα λέγονται προβλήματα που συνίστανται από μια ΜΔΕ που ισχύει σε ένα χωρίο, καθώς και από αρχικές ή/και συνοριακές συνθήκες (ή και άλλες βοηθητικές συνθήκες) και έχουν τις εξής ιδιότητες:

1. **Υπαρξη λύσης**: Υπάρχει τουλάχιστον μια λύση που ικανοποιεί την εξίσωση και τις βοηθητικές συνθήκες.
2. **Μοναδικότητα λύσης**: Υπάρχει το πολύ μία λύση του προβλήματος.
3. **Ευστάθεια**: Η μοναδική λύση εξαρτάται «συνεχώς» από τα δεδομένα του προβλήματος υπό την έννοια ότι «μικρή» μεταβολή των δεδομένων επιφέρει «μικρή» μεταβολή στη λύση.

Προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων

Μέχρι τώρα στις ΣΔΕ ασχοληθήκαμε με **προβλήματα αρχικών τιμών**, που αποτελούνται από μια διαφορική εξίσωση (ΔΕ) μαζί με κατάλληλες αρχικές συνθήκες (ΑΣ) σε ένα δεδομένο σημείο. Ένα τυπικό παράδειγμα, αποτελεί η ΔΕ, $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, με τις ΑΣ $y(t_0) = b_0, y'(t_0) = b_1$.

Συχνά οι εφαρμογές μας οδηγούν σε ένα άλλο είδος προβλήματος, στο οποίο η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής y ή η παράγωγος της **καθορίζεται σε δύο διαφορετικά σημεία**. Τέτοιες συνθήκες ονομάζονται **συνοριακές συνθήκες**.

Μια ΔΕ και κατάλληλες συνοριακές συνθήκες σχηματίζουν ένα **πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) δύο σημείων**.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η ΔΕ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (6)$$

με τις συνοριακές συνθήκες

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1. \quad (7)$$

Για να λύσουμε το ΠΣΤ, πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση $y(x)$ που να ικανοποιεί τη ΔΕ (6) στο διάστημα $a < x < b$ και να παίρνει τις καθορισμένες τιμές y_0 και y_1 στα άκρα του διαστήματος a και b , αντίστοιχα.

Συνήθως, αναζητούμε πρώτα τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις οριακές συνθήκες για να καθορίσουμε τις τιμές των αυθαίρετων σταθερών.

Εάν η συνάρτηση g στην (6) έχει την τιμή μηδέν για κάθε x και εάν οι συνοριακές τιμές y_0 και y_1 είναι επίσης μηδέν, τότε το ΠΣΤ (6), (7) ονομάζεται **ομογενές**. Διαφορετικά, το πρόβλημα λέγεται **μη ομογενές**.

Παρόλο που το ΠΑΤ και το ΠΣΤ (6), (7), μπορεί επιφανειακά να μοιάζουν αρκετά, στην πραγματικότητα διαφέρουν σημαντικά. Τα ΠΑΤ, υπό ήπιες συνθήκες για τους συντελεστές, είναι βέβαιο ότι έχουν μοναδική λύση. Από την άλλη μεριά, τα ΠΣΤ υπό παρόμοιες συνθήκες **μπορεί να έχουν μοναδική λύση**, αλλά **μπορεί επίσης να μην έχουν καμία λύση** ή, σε ορισμένες περιπτώσεις, **να έχουν άπειρες λύσεις**. Από αυτή την άποψη, τα γραμμικά ΠΣΤ θυμίζουν τη συμπεριφορά των συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

Παρατήρηση

Το μη ομογενές ΠΣΤ (6), (7), έχει ένα αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (8)$$

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (9)$$

Φυσικά, το πρόβλημα αυτό έχει πάντα τη λύση $y \equiv 0$, ανεξάρτητα από το τι είναι οι $p(x)$ και $q(x)$.

Επομένως έχει νόημα να εξετάσουμε κατά πόσον υπάρχουν και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής.

Παράδειγμα 1

Θεωρήστε το ΠΣΤ

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της ΔΕ:

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x).$$

Επιπλέον,

- $y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1.$
- $y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 \cos(\sqrt{2}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{2}\pi) = 0 \xrightarrow{c_1=1} c_2 = -\cot(\sqrt{2}\pi)$

Άρα το ΠΣΤ έχει μοναδική λύση

$$y(x) = \cos(\sqrt{2}x) - \cot(\sqrt{2}\pi) \sin(\sqrt{2}x).$$

Παράδειγμα 2

Θεωρήστε το ΠΣΤ

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = \alpha, \quad \alpha \text{ δοθείς αριθμός.}$$

Γενική λύση της ΔΕ:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Επιπλέον,

- $y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1.$
- $y(\pi) = \alpha \Rightarrow -c_1 = \alpha.$

Επομένως,

- αν $\alpha \neq -1$ οι δύο συνθήκες είναι **ασύμβατες**, επομένως **το ΠΣΤ δεν έχει λύση**.
- Αν όμως $\alpha = -1$, τότε ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες ανεξάρτητα της τιμής του c_2 . Οπότε το ΠΣΤ έχει **άπειρες λύσεις** της μορφής:

$$y(x) = \cos x + c_2 \sin x.$$

Παράδειγμα 3 (ομογενές αντίστοιχο του Παραδ. 1)

Θεωρήστε το ΠΣΤ

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της ΔΕ:

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x).$$

Τώρα,

- $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$
- $y(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\sqrt{2}\pi) = 0 \Rightarrow c_2 = 0. \quad (\text{Επειδή } \sin(\sqrt{2}\pi) \neq 0.)$

Άρα το ΠΣΤ έχει μοναδική λύση τη μηδενική.

Παράδειγμα 4 (ομογενές αντίστοιχο του Παραδ. 2)

Θεωρήστε το ΠΣΤ

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της ΔΕ:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Επιπλέον,

- $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$
- $y(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \underbrace{\sin \pi}_{=0} = 0.$

Άρα η δεύτερη σ.σ. ικανοποιείται ανεξάρτητα της τιμής του c_2 .

Επομένως το ΠΣΤ έχει **άπειρες λύσεις** της μορφής:

$$y(x) = c_2 \sin x.$$

Παρατήρηση

Τα Παραδείγματα 1–4 μας δίνουν μια ένδειξη ότι η σχέση μεταξύ ομογενών και μη ομογενών γραμμικών ΠΣΤ μοιάζει με τη σχέση μεταξύ ομογενών και μη ομογενών γραμμικών (αλγεβρικών) συστημάτων.

Το μη ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow$ το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει μόνον τη μηδενική λύση $x = 0$.

Συγκεκριμένα, είδαμε ότι το μη ομογενές ΠΣΤ του Παραδείγματος 1 έχει μοναδική λύση, ενώ το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα του Παραδείγματος 3 έχει μόνο τη μηδενική λύση.

Το μη ομογενές ΠΣΤ του Παραδείγματος 2 είτε δεν έχει λύση ή έχει άπειρες λύσεις, ενώ το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα του Παραδείγματος 4 έχει και άλλες λύσεις εκτός από τη μηδενική.

Προβλήματα ιδιοτιμών

Θεωρήστε το ΠΣΤ

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, \pi) \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Οι τιμές του λ για τις οποίες προκύπτουν μη τετριμμένες λύσεις του ΠΣΤ (10) λέγονται **ιδιοτιμές** και οι αντίστοιχες μη τετριμμένες λύσεις λέγονται **ιδιοσυναρτήσεις**.

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις για το λ .

1η περίπτωση: $\lambda < 0$

Έστω $\lambda = -\mu^2 < 0$.

Γενική λύση της ΔΕ:

$$y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}.$$

Επιπλέον,

- $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$.
- $y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\mu\pi} + c_2 e^{-\mu\pi} = 0 \xrightarrow{c_2 = -c_1} c_1 (e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}) = 0$.

Επειδή $\mu \neq 0$ θα πρέπει αναγκαστικά $c_1 = 0$ άρα και $c_2 = 0$.

Άρα το πρόβλημα (10) δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές.

2η περίπτωση: $\lambda = 0$

Έστω $\lambda = 0$.

Γενική λύση της ΔΕ:

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

Επιπλέον,

- $y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$.
- $y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 \pi + c_2 = 0 \xrightarrow{c_2 = 0} c_1 = 0$.

Άρα το $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του προβλήματος (10).

3η περίπτωση: $\lambda > 0$

Έστω $\lambda = \mu^2 > 0$ (για $\mu > 0$).

Γενική λύση της ΔΕ:

$$y(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x).$$

Επιπλέον,

- $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$
- $y(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\mu\pi) = 0.$

Επειδή αναζητούμε μη τετριμμένες λύσεις θα πρέπει $c_2 \neq 0$, επομένως θα πρέπει

$$\sin(\mu\pi) = 0 \Leftrightarrow \mu\pi = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Οι αντίστοιχες τιμές του λ είναι

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{ιδιοτιμές})$$

ενώ οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι:

$$y_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

Συμπεράσματα

Δείξαμε ότι το ΠΣΤ (10) έχει μια άπειρη ακολουθία θετικών ιδιοτιμών $\lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $y_n = \sin(nx), n = 1, 2, \dots$

Φυσικά, απομένει η περίπτωση το πρόβλημα να έχει μιγαδικές ιδιοτιμές. Παρόλα αυτά το πρόβλημα (10) ανήκει σε μια γενικότερη κατηγορία προβλημάτων (προβλήματα τύπου Sturm-Liouville) για τα οποία μπορούμε να αποδείξουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές τους είναι πραγματικές.

Άσκηση:

Αποδείξτε ότι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του ΠΣΤ

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \quad (11)$$

δίνονται από τους τύπους

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 / L^2, \quad y_n(x) = \sin(n\pi x / L), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Σειρές Fourier

Μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα ΜΔΕ υπό την προϋπόθεση ότι μπορούμε να εκφράσουμε μια δοθείσα συνάρτηση ως άπειρο άθροισμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων (ημιτόνων ή/και συνημιτόνων).

Θεωρούμε μια σειρά της μορφής:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right).$$

Στα σημεία που η σειρά αυτή συγκλίνει, ορίζεται μια συνάρτηση f που η τιμή της σε κάθε σημείο x είναι το άθροισμα της σειράς για τη δεδομένη αυτή τιμή του x . Τότε η σειρά αυτή λέγεται **σειρά Fourier της f** .

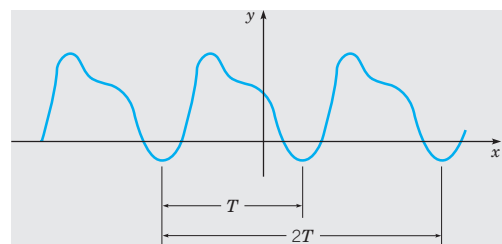
Θέλουμε να δούμε τι είδους συναρτήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω σειρών Fourier και να βρούμε έναν τρόπο υπολογισμού των συντελεστών της σειράς όταν μας δίνεται μια συγκεκριμένη συνάρτηση f .

Για τον σκοπό αυτό θα πρέπει να μελετήσουμε συγκεκριμένες ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sin(m\pi x/L)$ και $\cos(m\pi x/L)$.

Περιοδικότητα των συναρτήσεων $\sin(m\pi x/L)$ και $\cos(m\pi x/L)$

Υπενθύμιση: Μια συνάρτηση f λέγεται **περιοδική** με περίοδο $T > 0$, αν το πεδίο ορισμού της περιέχει το $x + T$ όταν περιέχει το x και, επιπλέον,

$$f(x + T) = f(x). \quad (*)$$



Η μικρότερη τιμή της T για την οποία ισχύει η $(*)$ λέγεται **θεμελιώδης περίοδος της f** .

Οι συναρτήσεις $\sin(m\pi x/L)$ και $\cos(m\pi x/L)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, είναι περιοδικές με θεμελιώδη περίοδο

$$T = \frac{2L}{m}.$$

Ορθογωνιότητα των συναρτήσεων $\sin(m\pi x/L)$ και $\cos(m\pi x/L)$

Υπενθύμιση: Ορίζουμε ως **εσωτερικό γινόμενο** δύο πραγματικών συναρτήσεων u και v στο διάστημα $[a, b]$ τον αριθμό:

$$(u, v) := \int_a^b u(x)v(x) dx.$$

Οι συναρτήσεις u και v θα λέγονται **ορθογώνιες** ($u \perp v$) στο διάστημα $[a, b]$ αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με 0, δηλ.

$$(u, v) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b u(x)v(x) dx = 0.$$

Ένα σύνολο συναρτήσεων θα λέγεται ορθογώνιο, αν κάθε διακεκριμένο ζεύγος συναρτήσεων του συνόλου αυτού είναι ορθογώνιο.

Ορθογωνιότητα των συναρτήσεων $\sin(m\pi x/L)$ και $\cos(m\pi x/L)$

Οι συναρτήσεις $\sin(m\pi x/L)$ και $\cos(m\pi x/L)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, αποτελούν ένα ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων στο διάστημα $[-L, L]$.

Συγκεκριμένα, ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις ορθογωνιότητας:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases} \\ \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= 0 \quad \text{για κάθε } m, n \\ \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases} \end{aligned}$$

(Η απόδειξη των σχέσεων αυτών γίνεται με απ' ευθείας ολοκλήρωση.)

Υπολογισμός των συντελεστών a_m, b_m – Τύποι Euler-Fourier

Έστω ότι η σειρά συγκλίνει και

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right). \quad (12)$$

Θα συσχετίσουμε τους συντελεστές a_m, b_m με την f με τη βοήθεια των προηγούμενων σχέσεων ορθογωνιότητας.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (12) επί $\cos \frac{n\pi x}{L}$, με $n > 0$ συγκεκριμένο ακέραιο, και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε ως προς x από $-L$ έως L .

Υποθέτουμε ότι επιτρέπεται να εναλλάξουμε τη σειρά των αθροισμάτων με τα ολοκληρώματα, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx}_{=0} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx}_{=L, \text{ αν } m=n, \quad =0, \text{ αν } m \neq n} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \underbrace{\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx}_{=0}. \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = L a_n \Rightarrow a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1.$$

Για να βρούμε το a_0 ολοκληρώνουμε την (12) ως προς x από $-L$ έως L :

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-L}^L dx}_{=2L} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx}_{=0} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \underbrace{\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx}_{=0}.$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Άρα

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

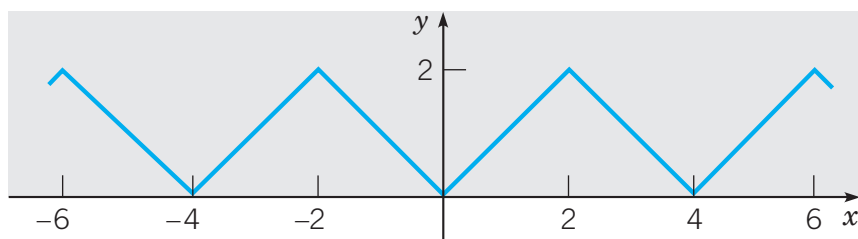
Ανάλογα αποδεικνύεται ότι:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Παράδειγμα

Έστω ότι $\exists$ σειρά Fourier που συγκλίνει στην f :

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}, \quad f(x+4) = f(x).$$



Προσδιορίστε τους συντελεστές της σειράς αυτής.

Η σειρά Fourier θα έχει τη μορφή:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{2} + b_m \sin \frac{m\pi x}{2} \right).$$

Για το συντελεστή a_0 έχουμε:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Για τους συντελεστές $a_m, m > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 f(x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{m\pi x}{2} dx \\ &\vdots \\ &= \begin{cases} -\frac{8}{(m\pi)^2}, & \text{αν } m \text{ περιττός} \\ 0, & \text{αν } m \text{ άρτιος} \end{cases}. \end{aligned}$$

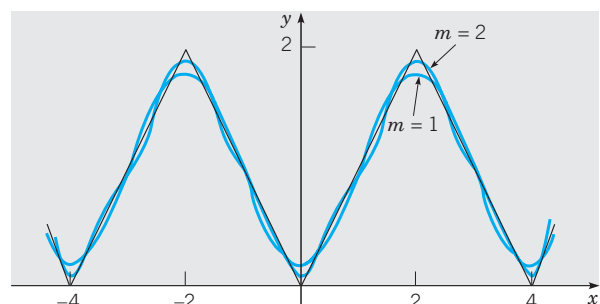
Για τους συντελεστές $b_m, m > 0$, προκύπτει ότι $b_m = 0$.

Άρα η σειρά Fourier θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{2} \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} \end{aligned}$$

Ακολουθία μερικών αθροισμάτων:

$$s_m(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^m \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}}{(2n-1)^2}$$



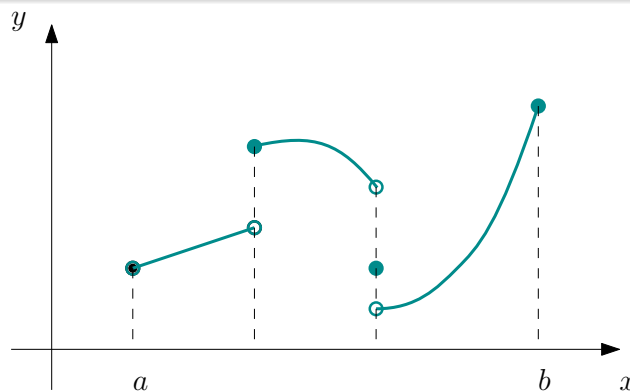
Υπενθύμιση

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέγεται **κατά τμήματα συνεχής** σε ένα κλειστό διάστημα $I = [a, b]$, αν το διάστημα I μπορεί να διαμεριστεί από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ έτσι ώστε:

- Η f να είναι συνεχής σε κάθε (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.
- Η f να τείνει σε πεπερασμένο όριο καθώς τα άκρα κάθε υποδιαστήματος προσεγγίζονται από το εσωτερικό του υποδιαστήματος.



Το θεώρημα σύγκλισης Fourier

Θεώρημα

Έστω ότι οι f και f' είναι κατά τμήματα συνεχείς στο διάστημα $[-L, L]$.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η f ορίζεται εκτός του διαστήματος $[-L, L]$ έτσι ώστε να είναι περιοδική με περίοδο $2L$.

Τότε η f έχει τη σειρά Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right). \quad (15)$$

με συντελεστές που δίνονται από τις εξισώσεις (13) και (14).

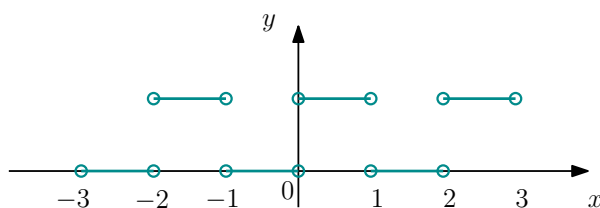
Η σειρά Fourier

- συγκλίνει στην $f(x)$ σε όλα τα σημεία στα οποία η f είναι συνεχής,
- ενώ συγκλίνει στην τιμή $(f(x^+) + f(x^-))/2$ σε όλα τα σημεία στα οποία η f είναι ασυνεχής.

Παράδειγμα (τετραγωνικό κύμα)

Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases},$$



και έστω ότι η f ορίζεται για $x \notin (-1, 1)$ έτσι ώστε $f(x+2) = f(x)$.

Αφήνουμε ανοικτό προς το παρόν το πώς ορίζεται η f στα σημεία $x = 0, \pm 1$.

- Στο $(0, 1)$: $f(x) = 1$, $f'(x) = 0$. Συνεχείς και έχουν όρια όταν $x \rightarrow 0^+$ και $x \rightarrow 1^-$.
- Στο $(-1, 0)$: $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$. Συνεχείς και έχουν όρια όταν $x \rightarrow -1^+$ και $x \rightarrow 0^-$.

Άρα f , f' κατά τμήματα συνεχείς στο διάστημα $[-1, 1)$ άρα ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος. Συνεπώς, αν υπολογίσουμε τους συντελεστές a_m , b_m της σειράς Fourier, η σύγκλισή της θα είναι εξασφαλισμένη σε όλα τα σημεία όπου η f είναι συνεχής.

Παρατηρήστε ότι οι τιμές των a_m , b_m θα είναι οι ίδιες ανεξάρτητα από τον ορισμό της f στα σημεία ασυνέχειας της, γιατί η τιμή ενός ολοκληρώματος δεν επηρεάζεται από την αλλαγή της τιμής της συνάρτησης που ολοκληρώνουμε σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων.

Για τους συντελεστές έχουμε από τις (13) και (14):

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 1 dx = 1.$$

Για τους συντελεστές a_m , $m > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} a_m &= \int_{-1}^1 f(x) \cos(m\pi x) dx = \int_0^1 \cos(m\pi x) dx = \frac{1}{m\pi} [\sin(m\pi x)]_0^1 \\ &= \frac{1}{m\pi} [\sin(m\pi) - 0] = 0. \end{aligned}$$

Για τους συντελεστές b_m , $m > 0$, έχουμε:

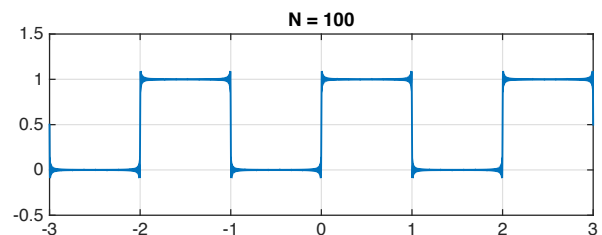
$$\begin{aligned} b_m &= \int_{-1}^1 f(x) \sin(m\pi x) dx = \int_0^1 \sin(m\pi x) dx = -\frac{1}{m\pi} [\cos(m\pi x)]_0^1 \\ &= -\frac{1}{m\pi} [\cos(m\pi) - 1] = \frac{1}{m\pi} [1 - \cos(m\pi)] = \begin{cases} \frac{2}{m\pi}, & \text{αν } m \text{ περιττός} \\ 0, & \text{αν } m \text{ άρτιος} \end{cases}. \end{aligned}$$

Άρα η σειρά Fourier θα έχει τη μορφή:

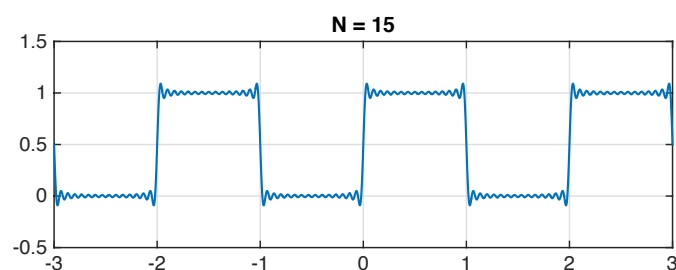
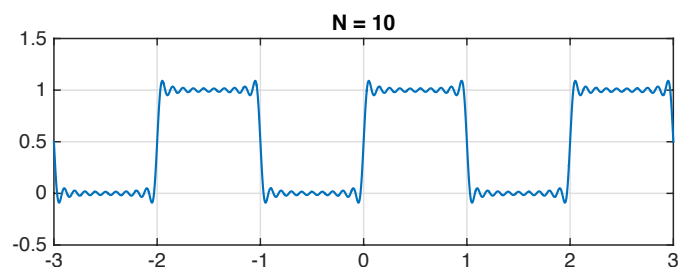
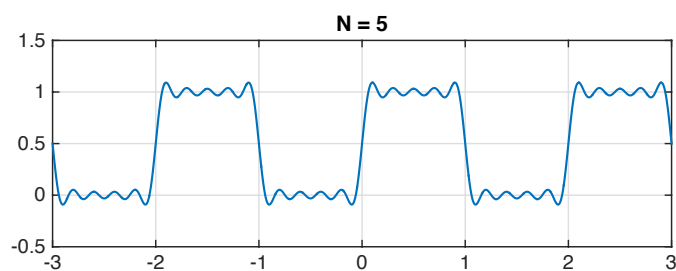
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(\pi x) + \frac{1}{3} \sin(3\pi x) + \frac{1}{5} \sin(5\pi x) + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin(m\pi x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\pi x). \end{aligned}$$

Ακολουθία μερικών αθροισμάτων:

$$s_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{(2n-1)}.$$



Το μερικό άθροισμα $s_N(x)$ της σειράς Fourier ...



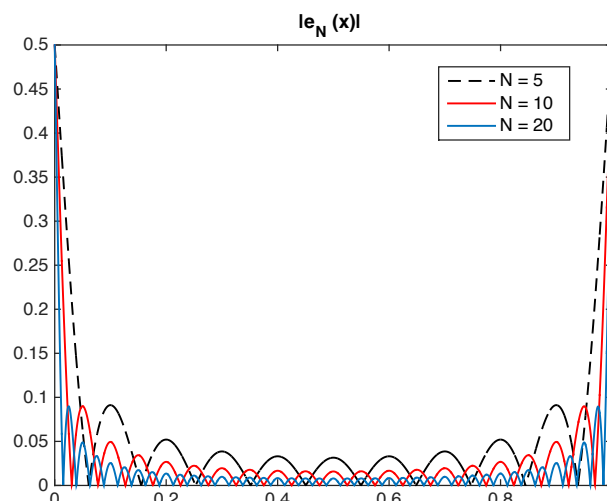
Παρατηρήσεις

Ο τρόπος με τον οποίο τα μερικά αθροίσματα $s_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{(2n-1)}$ της σειράς Fourier συγκλίνουν στην $f(x)$ φαίνεται στα προηγούμενα σχήματα.

- Στα σημεία όπου η f είναι συνεχής, τα μερικά αθροίσματα πλησιάζουν την $f(x)$ καθώς αυξάνεται το N .
- Ωστόσο, στη γειτονιά των σημείων ασυνέχειας, όπως $x = 0$ και $x = 1$, τα μερικά αθροίσματα δεν συγκλίνουν ομαλά στη μέση τιμή. Αντίθετα, τείνουν να υπερπηδούν το σημείο σε κάθε άκρο του άλματος, σαν να μην μπορούν να προσαρμοστούν στην απότομη μεταβολή που απαιτείται σε αυτό το σημείο.

Αυτή η συμπεριφορά είναι τυπική για τις σειρές Fourier **σε σημεία ασυνέχειας** και είναι γνωστή ως **φαινόμενο Gibbs**.

Για να καταλάβουμε λίγο καλύτερα τι συμβαίνει ας εξετάσουμε το **σφάλμα** $e_N(x) = f(x) - s_N(x)$. Στο ακόλουθο σχήμα σχεδιάζουμε το $|e_N(x)|$ για $x \in [0, 1]$ και $N = 5, 10$ και 20 . Το ελάχιστο άνω φράγμα του $|e_N(x)|$ είναι 0.5 και προσεγγίζεται καθώς $x \rightarrow 0$ και καθώς $x \rightarrow 1$. Καθώς το N μεγαλώνει, το σφάλμα μειώνεται στο εσωτερικό του διαστήματος (όπου η $f(x)$ είναι συνεχής), αλλά το ελάχιστο άνω φράγμα δεν μειώνεται καθώς το N μεγαλώνει. Επομένως, δεν μπορούμε να μειώσουμε ομοιόμορφα το σφάλμα σε όλο το διάστημα αυξάνοντας τον αριθμό των όρων.

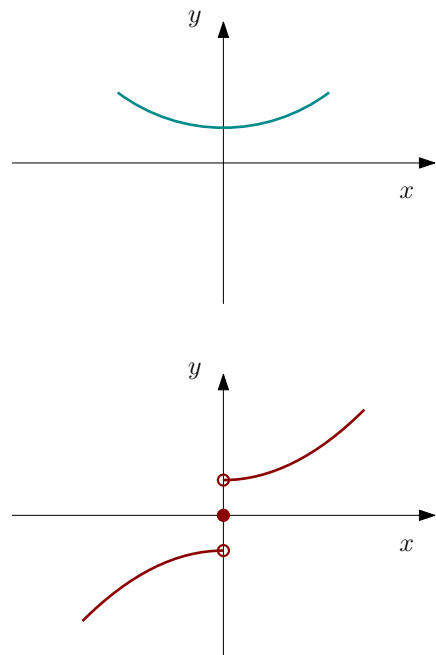


Ορισμός: Μια συνάρτηση f λέγεται **άρτια** αν το πεδίο ορισμού της περιέχει το σημείο $-x$ όταν περιέχει το x και

$$f(-x) = f(x).$$

Η f λέγεται **περιττή** αν το πεδίο ορισμού της περιέχει το σημείο $-x$ όταν περιέχει το x και

$$f(-x) = -f(x).$$



Ιδιότητες άρτιων & περιττών συναρτήσεων

- ❶ Το άθροισμα (διαφορά) και το γινόμενο (πηλίκο) δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.
- ❷ Το άθροισμα (διαφορά) δύο περιττών συναρτήσεων είναι περιττή συνάρτηση.
- ❸ Το γινόμενο (πηλίκο) δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.
- ❹ Το άθροισμα (διαφορά) μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή συνάρτηση, ενώ το γινόμενο (πηλίκο) μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση.

- ❺ Αν η f είναι άρτια συνάρτηση τότε

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

- ❻ Αν η f είναι περιττή συνάρτηση τότε

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0.$$

Συνημιτονική σειρά Fourier

Έστω ότι οι f και f' είναι κατά τμήματα συνεχείς στο διάστημα $[-L, L]$ και ότι η f είναι **άρτια** περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2L$.

Τότε η $f(x) \cos(n\pi x/L)$ είναι **άρτια** και η $f(x) \sin(n\pi x/L)$ είναι **περιττή**.

Άρα οι συντελεστές Fourier της f ικανοποιούν:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{και} \quad b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Επομένως, αν η f είναι **άρτια**, τότε έχει τη σειρά Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Ημιτονική σειρά Fourier

Έστω ότι οι f και f' είναι κατά τμήματα συνεχείς στο διάστημα $[-L, L]$ και ότι η f είναι **περιττή** περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2L$.

Τότε η $f(x) \cos(n\pi x/L)$ είναι **περιττή** και η $f(x) \sin(n\pi x/L)$ είναι **άρτια**.

Άρα οι συντελεστές Fourier της f ικανοποιούν:

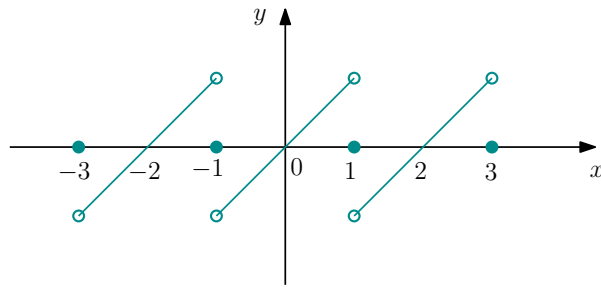
$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{και} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Επομένως, αν η f είναι **περιττή**, τότε έχει τη σειρά Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Παράδειγμα (πριονωτό κύμα)

Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = x$,
για $-1 < x < 1$, $f(-1) = f(1) = 0$.



Έστω ότι η f ορίζεται παντού αλλού έτσι ώστε να είναι περιοδική με περίοδο 2.

Η f είναι **περιττή** $\Rightarrow a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$

Για τους συντελεστές $b_n, n > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \sin \frac{n\pi x}{1} dx = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = -\frac{2}{n\pi} \int_0^1 x [\cos(n\pi x)]' dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left[x \cos(n\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} + \frac{2}{n^2\pi^2} \underbrace{[\sin(n\pi x)]_0^1}_{=0} = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

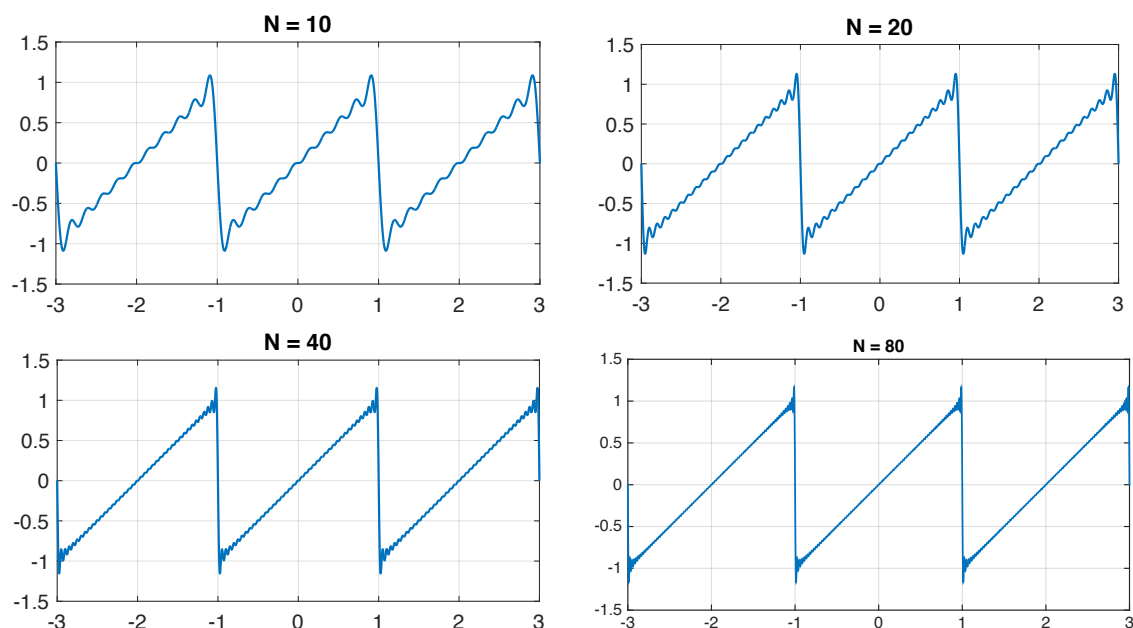
Άρα η σειρά Fourier για την f είναι:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x).$$

Επιπλέον, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς έχει όρους:

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x).$$

Το μερικό άθροισμα $s_N(x)$ της σειράς Fourier ...



Παρατηρήσεις

Η περιοδική συνάρτηση f του προηγούμενου παραδείγματος είναι ασυνεχής στα σημεία $\pm 1, \pm 3, \dots$. Στα σημεία αυτά η σειρά Fourier συγκλίνει στον μέσο όρο των ορίων από αριστερά ($+1$) και από δεξιά (-1), δηλαδή στο μηδέν. Στα προηγούμενα σχήματα μπορούμε να δούμε ότι το φαινόμενο Gibbs εμφανίζεται και πάλι κοντά στα σημεία ασυνέχειας.

Σημειώστε ότι σε αυτό το παράδειγμα $f(-1) = f(1) = 0$, καθώς και $f(0) = 0$. Αυτό απαιτείται αν η συνάρτηση f πρέπει να είναι περιττή και περιοδική με περίοδο 2.

Όταν μιλάμε για την κατασκευή μιας σειράς ημιτόνων για μια συνάρτηση που ορίζεται στο $0 \leq x \leq L$, εννοείται ότι, εάν είναι απαραίτητο, πρέπει πρώτα να επαναπροσδιορίσουμε τη συνάρτηση ώστε να είναι μηδέν στο $x = 0$ και $x = L$.

Παρατηρήσεις

Κατά την επίλυση προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων, είναι συχνά χρήσιμο να αναπτύξουμε σε μια σειρά Fourier, περιόδου $2L$, μια συνάρτηση f που αρχικά είχε οριστεί μόνο στο διάστημα $[0, L]$. Για τον σκοπό αυτό, υπάρχουν διάφορες εναλλακτικές λύσεις:

- Ορίζουμε μια συνάρτηση g περιόδου $2L$, τέτοια ώστε

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση g είναι επομένως η **άρτια περιοδική επέκταση της f** . Η σειρά Fourier της, η οποία είναι συνημιτονική σειρά, αναπαριστά την f στο $[0, L]$.

- Ορίζουμε μια συνάρτηση h περιόδου $2L$, τέτοια ώστε

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L, \\ 0, & x = 0, L, \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση h είναι η **περιττή περιοδική επέκταση της f** . Η σειρά Fourier της, η οποία τώρα είναι ημιτονική σειρά, αναπαριστά, και πάλι, την f στο $[0, L]$.

Παρατηρήσεις

- Ορίζουμε μια συνάρτηση k περιόδου $2L$, τέτοια ώστε

$$k(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

και έστω ότι η $k(x)$ ορίζεται για $(-L, 0)$ με οποιονδήποτε τρόπο είναι συμβατός με τις συνθήκες του θεωρήματος σύγκλισης της σειράς Fourier. Μερικές φορές είναι βολικό να ορίζεται η $k(x)$ ίση με μηδέν για $-L < x < 0$. Η σειρά Fourier για την k , η οποία περιλαμβάνει τόσο ημιτονοειδείς όσο και συνημιτονοειδείς όρους, αναπαριστά επίσης την f στο $[0, L]$, ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται η $k(x)$ στο $(-L, 0)$.

Έτσι υπάρχουν άπειρες τέτοιες σειρές, οι οποίες συγκλίνουν όλες στην $f(x)$ στο αρχικό διάστημα.

Ένα σχόλιο

Στο μάθημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις σειρές Fourier κυρίως ως μέσο επίλυσης ορισμένων προβλημάτων στις ΜΔΕ.

Ωστόσο, οι σειρές αυτές έχουν πολύ ευρύτερες εφαρμογές στην επιστήμη και την τεχνολογία, και αποτελούν, εν γένει, πολύτιμα εργαλεία για τη διερεύνηση περιοδικών φαινομένων.

Ένα βασικό πρόβλημα είναι η ανάλυση ενός εισερχόμενου σήματος στις αρμονικές του συνιστώσες, η οποία ισοδυναμεί με την κατασκευή της αναπαράστασης της σειράς Fourier.

Σε ορισμένες περιοχές συχνότητων, οι ξεχωριστοί όροι αντιστοιχούν σε διαφορετικά χρώματα ή σε διαφορετικούς ήχους. Το μέγεθος του συντελεστή καθορίζει το πλάτος κάθε συνιστώσας. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως [φασματική ανάλυση](#).