

Συστήματα Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Δημήτρης Μητσούδης

Εισαγωγή

Πολλά φυσικά προβλήματα περιλαμβάνουν έναν αριθμό ξεχωριστών στοιχείων που συνδέονται μεταξύ τους με κάποιο τρόπο.

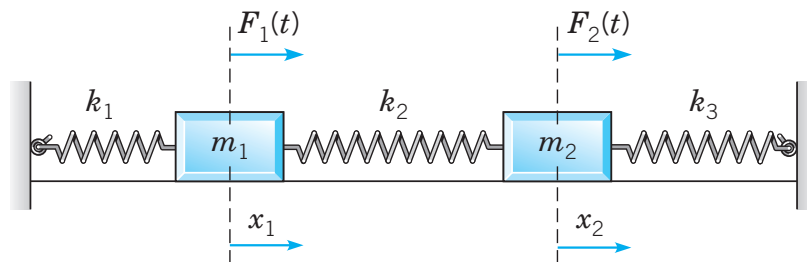
Π.χ., αυτό συμβαίνει στα ηλεκτρικά δίκτυα καθώς και σε πολλά προβλήματα στη μηχανική, κ.ά. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το αντίστοιχο μαθηματικό πρόβλημα αποτελείται από ένα **σύστημα δύο ή περισσότερων διαφορικών εξισώσεων**, οι οποίες **μπορούν πάντα να γραφούν ως εξισώσεις πρώτης τάξης**.

Έτσι θα εστιάσουμε σε **συστήματα γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξης**, και ειδικότερα σε εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

Συμβολισμός: Θα συμβολίζουμε με t την ανεξάρτητη μεταβλητή και με $x_1, x_2, x_3, \dots$, τις εξαρτημένες μεταβλητές που θα είναι συναρτήσεις του t .

Παράδειγμα

Θεωρήστε το σύστημα ελατηρίων-μαζών του ακόλουθου σχήματος.



Οι δύο μάζες κινούνται πάνω σε μια επιφάνεια χωρίς τριβές υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων $F_1(t)$ και $F_2(t)$, και συνδέονται με τα τρία ελατήρια των οποίων οι σταθερές είναι k_1 , k_2 και k_3 , αντίστοιχα. Το μαθηματικό μοντέλο για τις συντεταγμένες x_1 και x_2 των δύο μαζών περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 + F_1(t) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + F_1(t),$$
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t).$$

Ένας λόγος για τον οποίο τα **συστήματα εξισώσεων πρώτης τάξης** είναι ιδιαίτερα σημαντικά είναι ότι **οι εξισώσεις ανώτερης τάξης μπορούν πάντα να μετασχηματιστούν σε τέτοια συστήματα**.

Αυτό είναι συνήθως απαραίτητο αν σκοπεύουμε να χρησιμοποιήσουμε μια αριθμητική μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος, επειδή σχεδόν όλοι οι κώδικες για την εύρεση αριθμητικών προσεγγίσεων σε λύσεις διαφορικών εξισώσεων είναι γραμμένοι για συστήματα εξισώσεων πρώτης τάξης.

Παράδειγμα

Θεωρήστε τη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \quad (1)$$

Θέτουμε $x_1 = y$ και $x_2 = x'_1 = y'$ οπότε η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$x'_2 + p(t)x_2 + q(t)x_1 = g(t),$$

και έτσι η εξίσωση 2ης τάξης (1) μπορεί να παρασταθεί με το ακόλουθο σύστημα των δύο εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= -q(t)x_1 - p(t)x_2 + g(t) \end{aligned}$$

ή ως εξίσωση πινάκων:
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση

Για να μετασχηματίσουμε μια οποιαδήποτε ΔΕ n -τάξης

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

σ' ένα σύστημα n εξισώσεως πρώτης τάξης, επεκτείνουμε τη μέθοδο του προηγούμενου παραδείγματος και εισάγουμε τις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ που ορίζονται ως:

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}.$$

Έτσι καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα n εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n \\ x'_n &= F(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}.$$

Γενικό σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης

Τα προηγούμενα παραδείγματα είναι ειδικές περιπτώσεις του γενικότερου συστήματος:

$$\begin{aligned}x'_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x'_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\x'_n &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2}$$

Μια **λύση** του συστήματος (2) στο διάστημα I είναι ένα σύνολο n συναρτήσεων $x_1 = \phi_1(t)$, $x_2 = \phi_2(t)$, $\dots$, $x_n = \phi_n(t)$, που είναι παραγωγίσιμες σε όλα τα σημεία του διαστήματος I και ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων (2) σε όλα τα $t \in I$.

Αν επιπλέον δοθούν αρχικές συνθήκες της μορφής

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0,\tag{3}$$

όπου $t_0 \in I$ και $x_1^0, \dots, x_n^0$ είναι δοσμένοι αριθμοί, τότε οι διαφορικές εξισώσεις (2) μαζί με τις αρχικές συνθήκες (3) αποτελούν ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών**.

Θεώρημα ύπαρξης - μοναδικότητας

Θεώρημα (1)

Έστω ότι κάθε μία από τις συναρτήσεις $F_1, \dots, F_n$ και όλες οι μερικές παράγωγοι $\partial F_1/\partial x_1, \dots, \partial F_1/\partial x_n, \dots, \partial F_n/\partial x_1, \dots, \partial F_n/\partial x_n$ είναι συνεχείς σε μια περιοχή R του $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ -χώρου που ορίζεται από $\alpha < t < \beta$, $\alpha_1 < x_1 < \beta_1, \dots, \alpha_n < x_n < \beta_n$, και έστω το σημείο $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ στο R .

Τότε υπάρχει ένα διάστημα $|t - t_0| < h$ στο οποίο **υπάρχει** μια **μοναδική** λύση $x_1 = \phi_1(t)$, $x_2 = \phi_2(t)$, $\dots$, $x_n = \phi_n(t)$ του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (2) που ικανοποιεί επίσης τις αρχικές συνθήκες (3).

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί και με ασθενέστερες αλλά πιο περίπλοκες υποθέσεις, οπότε το παραπάνω θεώρημα δεν είναι το πιο γενικό από τα γνωστά, και οι δεδομένες συνθήκες είναι ικανές, αλλά όχι αναγκαίες, για να ισχύει το συμπέρασμα.

Γενικό γραμμικό σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης

Εάν κάθε μία από τις συναρτήσεις $F_1, \dots, F_n$ στις εξισώσεις (2) είναι γραμμική συνάρτηση των εξαρτημένων μεταβλητών $x_1, \dots, x_n$, τότε το σύστημα εξισώσεων λέγεται γραμμικό. Διαφορετικά, είναι μη γραμμικό.

Έτσι, το γενικότερο σύστημα n γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξης έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}x'_1 &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\x'_2 &= p_{21}(t)x_1 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\&\vdots \\x'_n &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t)\end{aligned}\tag{4}$$

Αν κάθε μία από τις συναρτήσεις $g_1(t), \dots, g_n(t)$ είναι μηδέν για όλα τα t στο διάστημα I , τότε το σύστημα (4) λέγεται **ομογενές**, διαφορετικά, είναι μη ομογενές.

Το σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (4) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t),$$

όπου

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Αν $\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0}$, τότε το σύστημα (5) λέγεται **ομογενές**, διαφορετικά, είναι μη ομογενές.

Θεώρημα ύπαρξης - μοναδικότητας για το γραμμικό σύστημα (4)

Για το γραμμικό σύστημα (4), το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας είναι απλούστερο και έχει επίσης ένα ισχυρότερο συμπέρασμα.

Θεώρημα (2)

Αν οι συναρτήσεις $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}, g_1, \dots, g_n$ είναι **συνεχείς** σε ένα ανοικτό διάστημα I , τότε **υπάρχει μοναδική λύση** $x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (4) που ικανοποιεί επίσης τις αρχικές συνθήκες (3), όπου t_0 είναι οποιοδήποτε σημείο στο I , και $x_1^0, \dots, x_n^0$ είναι οποιοδήποτε δοσμένοι αριθμοί. Επιπλέον, η λύση υπάρχει σε όλο το διάστημα I .

Σε αντίθεση με την περίπτωση ενός μη γραμμικού συστήματος, η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης ενός γραμμικού συστήματος είναι εγγυημένες σε όλο το διάστημα στο οποίο ικανοποιούνται οι υποθέσεις.

Επιπλέον, για ένα γραμμικό σύστημα οι αρχικές τιμές $x_1^0, \dots, x_n^0$ στο $t = t_0$ είναι εντελώς αυθαίρετες, ενώ στη μη γραμμική περίπτωση το αρχικό σημείο πρέπει να βρίσκεται στην περιοχή R όπως την ορίσαμε.

Βασική θεωρία συστημάτων γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξης

Είδαμε ήδη ότι το σύστημα γραμμικών εξισώσεων (4) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$\mathbf{x}' = P(t) \mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (5)$$

όπου

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Για τη συνέχεια υποθέτουμε ότι **οι $P(t)$ και $\mathbf{g}(t)$ είναι συνεχείς σε κάποιο διάστημα I** , δηλαδή κάθε μία από τις βαθμωτές συναρτήσεις $p_{11}, \dots, p_{nn}, g_1, \dots, g_n$ είναι συνεχείς στο I . Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα αυτό είναι αρκετό για να εγγυηθεί την ύπαρξη λύσεων της εξίσωσης (5) στο διάστημα I .

Αρχικά, θα θεωρήσουμε την ομογενή εξίσωση

$$\mathbf{x}' = P(t) \mathbf{x}. \quad (6)$$

Αφού λύσουμε την ομογενή εξίσωση, υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για την επίλυση της μη ομογενούς.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

για να ορίσουμε συγκεκριμένες λύσεις του συστήματος (6).

Σημειώστε ότι το $x_{ij}(t) = x_i^{(j)}(t)$ δηλώνει την i -συνιστώσα της j -λύσης $x^{(j)}(t)$.

Υπενθύμιση από Γραμμική Άλγεβρα

Αν A είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Ο A είναι αντιστρέψιμος.
- Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μόνον τη μηδενική λύση ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
- Η ορίζουσα του A είναι διάφορη του μηδενός.
- Οι στήλες (γραμμές) του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Βασικά αποτελέσματα για τη δομή των λύσεων του συστήματος (6)

Αρχή της υπέρθεσης

Θεώρημα (3)

Αν οι διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{x}^{(1)}$ και $\mathbf{x}^{(2)}$ είναι λύσεις του συστήματος (6), τότε και ο γραμμικός τους συνδυασμός $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ αποτελεί λύση για οποιεσδήποτε σταθερές c_1 και c_2 .

Απόδειξη: Απλώς παραγωγίστε την $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ και χρησιμοποιήστε ότι $\mathbf{x}^{(1)}$ και $\mathbf{x}^{(2)}$ είναι λύσεις του συστήματος (6) □

Επαγωγικά, μπορούμε ν.δ.ο. αν $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ είναι λύσεις της (6), τότε

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \dots + c_k\mathbf{x}^{(k)},$$

είναι λύση της (6) για οποιεσδήποτε σταθερές $c_1, \dots, c_k$. Δηλαδή

Κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων της (6) είναι επίσης λύση.

Ερώτηση: Μπορούμε με αυτόν τον τρόπο να βρούμε **όλες** τις λύσεις της (6);

Έστω $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ είναι n λύσεις του συστήματος (6). Θεωρούμε τον πίνακα $X(t)$ με στήλες τα διανύσματα $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Οι στήλες του $X(t)$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητες** για μια δοθείσα τιμή του $t \Leftrightarrow$ η ορίζουσα $|X(t)| \neq 0$ για αυτή την τιμή του t .

Η ορίζουσα του πίνακα $X(t)$ λέγεται ορίζουσα Wronski των λύσεων $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ και συμβολίζεται με $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$.

Επομένως, οι λύσεις $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε ένα σημείο αν και μόνον αν η ορίζουσα Wronski $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ είναι διάφορη του μηδενός στο σημείο αυτό.

Θεώρημα (4)

Αν οι διανυσματικές συναρτήσεις $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος (6) για κάθε σημείο του διαστήματος I , τότε κάθε λύση $x = \phi(t)$ του συστήματος (6) μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$

$$\phi(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t) \quad (8)$$

με μοναδικό τρόπο.

Παρατήρηση: Σύμφωνα με το Θεώρημα 3, όλες οι εκφράσεις της μορφής (8) είναι λύσεις του συστήματος (6), ενώ σύμφωνα με το Θεώρημα 4 όλες οι λύσεις της (6) μπορούν να γραφούν στη μορφή (8). Εάν οι σταθερές $c_1, \dots, c_n$ θεωρηθούν αυθαίρετες, τότε η εξίσωση (8) περιλαμβάνει όλες τις λύσεις του συστήματος (6) και ονομάζεται **γενική λύση**.

Κάθε σύνολο λύσεων $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ της (6) που είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε κάθε σημείο του διαστήματος I λέγεται **θεμελιώδες σύνολο λύσεων** για το διάστημα αυτό.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4

Έστω ϕ οποιαδήποτε λύση της (6) και κάποιο σημείο $t_0 \in I$, και έστω $\xi = \phi(t_0)$.

Αναζητούμε αν υπάρχει λύση της μορφής $x = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$ με $x(t_0) = \xi$.

$$\Leftrightarrow \exists c_1, \dots, c_n \text{ τ.ω. } c_1 x^{(1)}(t_0) + \dots + c_n x^{(n)}(t_0) = \xi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 x_{11}(t_0) + \dots + c_n x_{1n}(t_0) = \xi_1, \\ \vdots \\ c_1 x_{n1}(t_0) + \dots + c_n x_{nn}(t_0) = \xi_n, \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση $c_1, \dots, c_n \Leftrightarrow W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t_0) \neq 0 \Leftrightarrow x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις στο t_0 . (Ισχύει λόγω της υπόθεσης.)

Τέλος, λόγω της μοναδικότητας της λύσης του ΠΑΤ από το Θεώρημα 2, έχουμε ότι οι λύσεις $x(t)$ και $\phi(t)$ ταυτίζονται, και άρα $\phi(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$. □

Θεώρημα (5)

Αν οι συναρτήσεις $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ είναι λύσεις του συστήματος (6) στο διάστημα I , τότε η ορίζουσα Wronski $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ είτε είναι ταυτοτικά μηδέν στο I ή δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I .

Λόγω του Θεωρήματος 5 δεν χρειάζεται να εξετάσουμε την $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ σε όλα τα σημεία του διαστήματος που μας ενδιαφέρει και μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε αν οι $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων υπολογίζοντας απλώς την ορίζουσα Wronski σε οποιοδήποτε βολικό σημείο του διαστήματος.

Θεώρημα (6)

Έστω

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

και έστω $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ είναι λύσεις του (6) που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες

$$x^{(1)}(t_0) = e^{(1)}, \quad x^{(2)}(t_0) = e^{(2)}, \quad \dots, \quad x^{(n)}(t_0) = e^{(n)}, \quad (9)$$

αντίστοιχα, όπου t_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος I . Τότε οι $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων του συστήματος (6).

Απόδειξη: Η ύπαρξη και η μοναδικότητα των λύσεων $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ εξασφαλίζονται από το Θεώρημα 2. Επιπλέον, άμεσα βλέπουμε ότι $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t_0) = 1$. Άρα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων. $\square$

Τέλος, μπορεί να συμβεί (όπως και για τις γραμμικές εξισώσεις 2ης τάξης) ένα σύστημα του οποίου οι συντελεστές είναι όλοι πραγματικοί να έχει μιγαδικές λύσεις. Το ακόλουθο θεώρημα μας επιτρέπει να βρούμε λύσεις με πραγματικές τιμές.

Θεώρημα (7)

Θεωρήστε το σύστημα (6)

$$x' = P(t)x,$$

όπου κάθε στοιχείο του πίνακα P είναι μια πραγματική συνεχής συνάρτηση. Αν $x = u(t) + iv(t)$ είναι μια λύση της εξίσωσης (6) με μιγαδική τιμή, τότε το πραγματικό μέρος $u(t)$ και το φανταστικό μέρος $v(t)$ είναι επίσης λύσεις αυτής της εξίσωσης.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} x' - P(t)x = 0 &\Leftrightarrow u'(t) + i v'(t) - P(t)(u(t) + i v(t)) = 0 \\ &\Leftrightarrow u'(t) + P(t)u(t) + i(v'(t) + P(t)v(t)) = 0 \\ &\Leftrightarrow u'(t) + P(t)u(t) = 0 \quad \text{και} \quad v'(t) + P(t)v(t) = 0. \end{aligned}$$

Σύνοψη

- 1 Κάθε σύνολο n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων του συστήματος $x' = P(t)x$ αποτελεί θεμελιώδες σύνολο λύσεων.
- 2 Υπό τις συνθήκες που υποθέσαμε σε αυτή την ενότητα, τέτοια θεμελιώδη σύνολα υπάρχουν πάντα.
- 3 Κάθε λύση του συστήματος $x' = P(t)x$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως γραμμικός συνδυασμός οποιουδήποτε θεμελιώδους συνόλου λύσεων.

Ομογενή γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές

Θα ασχοληθούμε κυρίως με συστήματα ομογενών γραμμικών εξισώσεων με **σταθερούς συντελεστές**, δηλαδή συστήματα της μορφής

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad (10)$$

όπου A είναι ένας **σταθερός** $n \times n$ πίνακας. Θα υποθέσουμε (εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά) ότι όλα τα στοιχεία του A είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παράδειγμα 1

Θεωρήστε το σύστημα $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1' = 2x_1 \\ x_2' = -3x_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = c_1 e^{2t} \\ x_2 = c_2 e^{-3t} \end{matrix}$$

Άρα:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{-3t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-3t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Ορίζουμε: $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$ και $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$.

$$\text{Επίσης: } W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{vmatrix} = e^{-t} \neq 0$$

Άρα $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων, επομένως η γενική λύση γράφεται:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$



Για να λύσουμε το σύστημα (10): $x' = Ax$, ας δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής

$$x = ue^{\lambda t},$$

όπου ο εκθέτης λ και το διάνυσμα u πρέπει να προσδιοριστούν.

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$x' = Ax \Leftrightarrow \lambda ue^{\lambda t} = A(ue^{\lambda t}) \Leftrightarrow Au = \lambda u \Leftrightarrow (A - \lambda I)u = 0$$

πρόβλημα εύρεσης ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων του A

Άρα, η διανυσματική συνάρτηση $x(t) = ue^{\lambda t}$ είναι λύση της (10)
 $\Leftrightarrow$ το λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και το u το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Επανάληψη: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα

Έστω A ένας μη μηδενικός, τετραγωνικός $n \times n$ πραγματικός πίνακας. Αν $u \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα διάνυσμα, τότε το Au είναι και αυτό ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Άρα μπορώ να θεωρήσω έναν πίνακα ως μια απεικόνιση από το $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$.

Στην περίπτωση που υπάρχει κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα u που είναι παράλληλο στο Au , τότε αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει μια μη μηδενική σταθερά λ τέτοια ώστε

$$Au = \lambda u \Leftrightarrow (A - \lambda I)u = 0.$$

Ορισμός

Έστω A ένας μη μηδενικός, τετραγωνικός $n \times n$ πραγματικός πίνακας. Τότε ορίζουμε ως **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A το πολυώνυμο

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|.$$

Είναι σχετικά εύκολο να δείξουμε ότι το p είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n , συνεπώς, από ένα θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας γνωρίζουμε ότι έχει το πολύ n διακριτές ρίζες, που κάποιες από αυτές θα είναι μιγαδικές.

Επανάληψη: ... Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα

Τώρα, αν λ είναι μια ρίζα του p , δηλ. $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$, που σημαίνει ότι το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ θα έχει και μη μηδενικές λύσεις $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Ορισμός

- Αν p είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A , τότε οι ρίζες του p λέγονται **ιδιοτιμές** του πίνακα A .
- Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A και $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ένα διάνυσμα που ικανοποιεί

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

τότε λέμε ότι το $\mathbf{u}$ είναι ένα **ιδιοδιάνυσμα** που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

- λ είναι ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$.

Στη συνέχεια, για να υπολογίσουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

- λύνουμε το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Επανάληψη: Παράδειγμα εύρεσης ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων - 1

Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

$$\therefore p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = 2.$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = 3$ και $\lambda = 2$.

Για να βρω ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3 λύνω το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} (A - 3I)\mathbf{u} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow 2u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = -2u_1. \end{aligned}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 3 είναι της μορφής $\begin{pmatrix} u_1 \\ -2u_1 \end{pmatrix}$.

Παίρνοντας, π.χ., $u_1 = 1$ βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Στη συνέχεια, για να βρω ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2 λύνω το ομογενές σύστημα:

$$(A - 2I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = -u_1.$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 2 είναι της μορφής $\begin{pmatrix} u_1 \\ -u_1 \end{pmatrix}$.

Παίρνοντας, π.χ., $u_1 = 1$ βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(Φυσικά και κάθε πολλαπλάσιό του είναι και αυτό ιδιοδιάνυσμα.)

Επανάληψη: Παράδειγμα εύρεσης ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων - 2

Ελέγξτε αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ έχει πραγματικές ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \quad \therefore \quad p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = i \text{ ή } \lambda = -i.$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = i$ και $\lambda = -i \notin \mathbb{R} !!$

Για να βρω ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή i λύνω το ομογενές σύστημα:

$$(A - iI)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -iu_1 + u_2 = 0 \text{ και } -u_1 - iu_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -iu_2 \quad (*).$$

Προφανώς, αν $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ η (*) είναι αδύνατη!

Αν όμως, π.χ., πάρουμε $u_2 = i$, τότε $u_1 = 1$ και το $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ είναι ένα (μιγαδικό) ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή i . (Ελέγξτε ότι $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.)

Παράδειγμα 2

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

Αναζητούμε ιδιοτιμές/ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -1.$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = -1$.

Για να βρούμε ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$, λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$(A - 3I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = 2u_1.$$

Άρα, παίρνοντας, π.χ., $u_1 = 1$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Για να βρούμε ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$, λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$(A + I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = -2u_1.$$

Άρα, παίρνοντας, π.χ., $u_1 = 1$ βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ορίζουμε: $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$ και $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Τότε: $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{2t} \neq 0$

Άρα $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων, επομένως η γενική λύση γράφεται:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Παράδειγμα 3

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

Αναζητούμε ιδιοτιμές/ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = 4.$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 4$.

Για να βρούμε ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$, λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$(A - 2I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = -u_1.$$

Άρα, παίρνοντας, π.χ., $u_1 = 1$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Για να βρούμε ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$, λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$(A - 4I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = 0.$$

Άρα, παίρνοντας, π.χ., $u_1 = 1$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ορίζουμε: $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$ και $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t}$.

Τότε: $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ -e^{2t} & 0 \end{vmatrix} = e^{6t} \neq 0$

Άρα $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων, επομένως η γενική λύση γράφεται:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Επιστροφή στο γενικό ομογενές γραμμικό σύστημα (10)

Για να βρούμε λύσεις της (10), πρέπει να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A . Οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (οι οποίες δεν είναι κατ' ανάγκην όλες διαφορετικές) είναι ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης n -οστού βαθμού

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Η φύση των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων καθορίζει τη φύση της γενικής λύσης του συστήματος (10). Αν υποθέσουμε ότι ο A είναι ένας πραγματικός πίνακας, τότε πρέπει να εξετάσουμε τις ακόλουθες δυνατότητες για τις ιδιοτιμές του A :

- 1 Όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και διαφορετικές ανά δύο.
- 2 Ορισμένες ιδιοτιμές εμφανίζονται σε μιγαδικά συζυγή ζεύγη.
- 3 Ορισμένες ιδιοτιμές, είτε πραγματικές είτε μιγαδικές, επαναλαμβάνονται.

Αν οι n ιδιοτιμές είναι όλες πραγματικές και διαφορετικές, όπως στα παραδείγματα που είδαμε, τότε σε κάθε ιδιοτιμή λ_i αντιστοιχεί ένα πραγματικό ιδιοδιάνυσμα $u^{(i)}$ και τα n ιδιοδιανύσματα $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Οι αντίστοιχες λύσεις του συστήματος (10) είναι:

$$x^{(1)} = u^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad x^{(n)} = u^{(n)} e^{\lambda_n t} \quad (11)$$

Για να δείξουμε ότι αυτές οι λύσεις αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο, υπολογίζουμε την αντίστοιχη ορίζουσα Wronski:

$$\begin{aligned} W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t) &= \begin{vmatrix} u_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} & \dots & u_1^{(n)} e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^{(1)} e^{\lambda_1 t} & \dots & u_n^{(n)} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}}_{\neq 0} \begin{vmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^{(1)} & \dots & u_n^{(n)} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ορίζουσα είναι μη μηδενική επειδή τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς η ορίζουσα Wronski δεν είναι ποτέ μηδέν $\Rightarrow$ οι $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων.

Άρα η γενική λύση της (10) είναι:

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \mathbf{u}^{(n)} e^{\lambda_n t}. \quad (12)$$

Στην ειδική περίπτωση που ο $\mathbf{A}$ είναι πραγματικός και συμμετρικός αποδεικνύεται ότι όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι πραγματικές.

Επιπλέον, ακόμη και αν κάποιες από τις ιδιοτιμές επαναλαμβάνονται, υπάρχει πάντα ένα πλήρες σύνολο n ιδιοδιανυσμάτων $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα (στην πραγματικότητα, ορθογώνια).

Συνεπώς, οι αντίστοιχες λύσεις του συστήματος (10) που δίνονται από την (11) αποτελούν και πάλι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων, και η γενική λύση δίνεται και πάλι από την (12).

Παράδειγμα 4

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

Ο πίνακας συντελεστών είναι πραγματικός και συμμετρικός.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \text{ ή } \lambda_{2,3} = -1.$$

Άρα ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = -1$ (διπλή ιδιοτιμή ή με αλγεβρική πολλαπλότητα 2).

Για να βρούμε ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$, λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$(A - 2I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\text{απαλ. Gauss}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = u_3 \text{ και } u_1 = u_3.$$

Άρα, παίρνοντας, π.χ., $u_3 = 1$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Για να βρούμε ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην **διπλή** ιδιοτιμή $\lambda_{2,3} = -1$, λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$(A + I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Άρα, μπορούμε να επιλέξουμε δύο από τα u_1, u_2, u_3 αυθαίρετα και το τρίτο καθορίζεται από την εξίσωση $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.

Π.χ., αν $u_1 = c_1$ και $u_2 = c_2$, τότε $u_3 = -c_1 - c_2$. Δηλαδή

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, αν επιλέξουμε, π.χ., $c_1 = 1$ και $c_2 = 0$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα

$$\mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Κάθε μη μηδενικό πολλαπλάσιο του $\mathbf{u}^{(2)}$ είναι επίσης ένα ιδιοδιάνυσμα, αλλά ένα δεύτερο **ανεξάρτητο** ιδιοδιάνυσμα μπορεί να βρεθεί κάνοντας άλλη επιλογή των c_1 και c_2 , π.χ., $c_1 = 0$ και $c_2 = 1$. Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε:

$$\mathbf{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

που είναι γραμμικά ανεξάρτητο του $\mathbf{u}^{(2)}$.

Άρα βρήκαμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην (διπλή) ιδιοτιμή -1 .

Επομένως οι συναρτήσεις

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων και η γενική λύση είναι:

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Το παράδειγμα αυτό υποδεικνύει ότι, παρόλο που μια ιδιοτιμή ($\lambda = -1$) έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2, μπορεί να είναι δυνατόν να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{u}^{(1)}$ και $\mathbf{u}^{(2)}$ και, κατά συνέπεια, να κατασκευάσουμε τη γενική λύση.

Παρατηρήσεις

- Εάν ορισμένες από τις ιδιοτιμές εμφανίζονται σε μιγαδικά συζυγή ζεύγη, τότε εξακολουθούν να υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της μορφής (11), υπό την προϋπόθεση ότι **όλες οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές**. Φυσικά, οι λύσεις που προκύπτουν από μιγαδικές ιδιοτιμές είναι μιγαδικές. Ωστόσο, όπως θα δούμε στη συνέχεια, μπορούμε να βρούμε ένα πλήρες σύνολο πραγματικών λύσεων.
- Σοβαρότερες δυσκολίες μπορεί να προκύψουν εάν **μία ιδιοτιμή επαναλαμβάνεται**. Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των αντίστοιχων γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων μπορεί να είναι μικρότερος από την αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής. Αν είναι έτσι, ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της μορφής $ue^{\lambda t}$ θα είναι μικρότερος από n . Τότε για να κατασκευαστεί ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων πρέπει να αναζητηθούν πρόσθετες λύσεις άλλης μορφής.
- Τέλος, αν ο **A είναι μιγαδικός**, τότε οι μιγαδικές ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητο να εμφανίζονται σε συζυγή ζεύγη και τα ιδιοδιανύσματα είναι συνήθως μιγαδικά, παρόλο που η σχετική ιδιοτιμή μπορεί να είναι πραγματική. Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (10) εξακολουθούν να είναι της μορφής (11), εφόσον υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, αλλά οι λύσεις είναι εν γένει μιγαδικές.

Μιγαδικές ιδιοτιμές - Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα: $x' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x$.

Εάν A είναι ο πίνακας των συντελεστών, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ -1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0,$$

επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$.

Για $\lambda_1 = -2 + i$ λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 1 - i & 2 \\ -1 & -1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - i)z_1 + 2z_2 = 0 \\ -z_1 - (1 + i)z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1 - i)z_1 + 2z_2 = 0.$$

Άρα, παίρνοντας, π.χ., $z_1 = 2$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $z^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + i \end{pmatrix}$.

Εντελώς ανάλογα, για $\lambda_2 = -2 - i$, βρίσκουμε το (συζυγές) ιδιοδιάνυσμα

$$z^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - i \end{pmatrix}.$$

Άρα ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων του συστήματος είναι:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + i \end{pmatrix} e^{(-2+i)t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - i \end{pmatrix} e^{(-2-i)t}.$$

Για να βρούμε ένα σύνολο πραγματικών λύσεων μπορούμε να επιλέξουμε τα πραγματικά και φανταστικά μέρη **είτε του $\mathbf{x}^{(1)}$ ή του $\mathbf{x}^{(2)}$** . Πράγματι

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + i \end{pmatrix} e^{(-2+i)t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + i \end{pmatrix} e^{-2t} e^{it} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + i \end{pmatrix} e^{-2t} (\cos t + i \sin t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \cos t + i 2 \sin t \\ -\cos t - \sin t + i(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + i e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Έτσι ένα σύνολο πραγματικών λύσεων του συστήματος είναι:

$$\mathbf{u}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Για να επαληθεύσουμε ότι οι $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες υπολογίζουμε την ορίζουσα Wronski:

$$\begin{vmatrix} 2e^{-2t} \cos t & 2e^{-2t} \sin t \\ e^{-2t}(-\cos t - \sin t) & e^{-2t}(\cos t - \sin t) \end{vmatrix} = 2e^{-4t} \neq 0.$$

Άρα οι $\mathbf{u}(t)$ και $\mathbf{v}(t)$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο πραγματικών λύσεων.

Η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Επιστροφή στο γενικό σύστημα $x' = Ax$. Μιγαδικές ιδιοτιμές

Έστω ότι έχουμε ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών $\lambda_{1,2} = r \pm is$. **Θ.δ.ο τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $z^{(1)}$ και $z^{(2)}$ είναι επίσης συζυγή μιγαδικά.**

Αν $\lambda_1 = r + is$ είναι ιδιοτιμή και $z^{(1)}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε:

$$(A - \lambda_1 I)z^{(1)} = 0 \xrightarrow{\text{συζυγή}} \overline{(A - \lambda_1 I)z^{(1)}} = 0 \Rightarrow (A - \overline{\lambda_1} I)\overline{z^{(1)}} = 0.$$

Δηλαδή, το $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ είναι ιδιοτιμή και το $z^{(2)} = \overline{z^{(1)}}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Οι αντίστοιχες λύσεις του συστήματος

$$x^{(1)}(t) = z^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad x^{(2)}(t) = \overline{z^{(1)}} e^{\overline{\lambda_1} t},$$

είναι συζυγείς μιγαδικές.

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να βρούμε δύο πραγματικές λύσεις που να αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 , παίρνοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $x^{(1)}$ ή της $x^{(2)}$.

Έστω $z^{(1)} = a + ib$, όπου a, b πραγματικά διανύσματα. Τότε

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= (a + ib)e^{(r+is)t} = (a + ib)e^{rt}(\cos st + i \sin st) \\ &= \underbrace{e^{rt}(a \cos st - b \sin st)}_{u(t)} + i \underbrace{e^{rt}(a \sin st + b \cos st)}_{v(t)} = u(t) + iv(t). \end{aligned}$$

Άρα οι

$$u(t) = e^{rt}(a \cos st - b \sin st), \quad v(t) = e^{rt}(a \sin st + b \cos st),$$

είναι πραγματικές λύσεις του συστήματος $x' = Ax$.

Άσκηση: Να αποδείξετε ότι οι u και v είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Πολλαπλές ιδιοτιμές

Να λυθεί το σύστημα $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Εάν A είναι ο πίνακας των συντελεστών, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0,$$

επομένως ο A έχει μια διπλή ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Για $\lambda = 3$ λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -u_1 - u_2 = 0 \\ u_1 + u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 + u_2 = 0.$$

Άρα, παίρνοντας, π.χ., $u_1 = 1$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Έτσι, μια λύση του συστήματος είναι η $\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Για να βρούμε μία δεύτερη λύση δοκιμάζουμε, όπως στην περίπτωση διπλής ρίζας στις γραμμικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, μία λύση της μορφής

$$\mathbf{x} = te^{3t}\mathbf{u} + e^{3t}\mathbf{v}$$

όπου $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι σταθερά διανύσματα. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (te^{3t}\mathbf{u} + e^{3t}\mathbf{v})' &= A(te^{3t}\mathbf{u} + e^{3t}\mathbf{v}) \Rightarrow e^{3t}\mathbf{u} + 3te^{3t}\mathbf{u} + 3e^{3t}\mathbf{v} = te^{3t}A\mathbf{u} + e^{3t}A\mathbf{v} \\ \xrightarrow{\div e^{3t}} (\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - A\mathbf{v}) + t(3\mathbf{u} - A\mathbf{u}) &= \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} A\mathbf{u} = 3\mathbf{u} \\ (A - 3I_2)\mathbf{v} = -\mathbf{u} \end{cases} \end{aligned}$$

Από την πρώτη εξίσωση βλέπουμε ότι το $\mathbf{u}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3, και επειδή είδαμε ότι κάθε τέτοιο είναι πολλαπλάσιο του $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, επιλέγουμε

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια λύνουμε το σύστημα $(A-3I_2)\mathbf{v} = \mathbf{u}$. Έτσι έχουμε

$$(A-3I_2)\mathbf{v} = \mathbf{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 + v_2 = -1.$$

Άρα, παίρνοντας, π.χ., $v_1 = 0$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Έτσι, μια δεύτερη λύση του συστήματος είναι η $\mathbf{x}^{(2)}(t) = te^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Για να επαληθεύσουμε ότι οι $\mathbf{x}^{(1)}$ και $\mathbf{x}^{(2)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες υπολογίζουμε την ορίζουσα Wronski:

$$\begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ -e^{3t} & -te^{3t} - e^{3t} \end{vmatrix} = -e^{6t} \neq 0.$$

Άρα οι $\mathbf{x}^{(1)}$ και $\mathbf{x}^{(2)}$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων και η γενική λύση είναι:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 te^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Θεμελιώδεις πίνακες

Μπορούμε να καταλάβουμε περισσότερα πράγματα για τη δομή των λύσεων των συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων εισάγοντας την έννοια του **θεμελιώδους πίνακα**.

Έστω ότι οι $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για το σύστημα

$$\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x}, \quad t \in I.$$

Ο πίνακας

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \quad (13)$$

του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$, λέγεται **θεμελιώδης πίνακας** του συστήματος $\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x}$.

Κάθε θεμελιώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος, αφού οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ένας θεμελιώδης πίνακας για το σύστημα $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

Στο Παράδειγμα 2 βρήκαμε ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος αυτού.

Άρα ένας **θεμελιώδης πίνακας** του συγκεκριμένου συστήματος είναι ο:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Λύση ΠΑΤ με χρήση θεμελιώδους πίνακα

Η λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών μπορεί να γραφεί, με συμπαγή τρόπο, με τη βοήθεια ενός θεμελιώδους πίνακα. Η γενική λύση του συστήματος $\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x}$ είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t)c_1 + \cdots + x_1^{(n)}(t)c_n \\ \vdots \\ x_n^{(1)}(t)c_1 + \cdots + x_n^{(n)}(t)c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c}, \end{aligned} \quad (14)$$

όπου $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$. Για ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών με αρχική συνθήκη** $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, όπου $t_0 \in I$ και $\mathbf{x}_0$ είναι ένα δοσμένο αρχικό διάνυσμα, αρκεί να επιλέξουμε το διάνυσμα $\mathbf{c}$ στην (14) έτσι ώστε να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη. Άρα το $\mathbf{c}$ πρέπει να ικανοποιεί την

$$\Psi(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}^0 \xrightarrow{\Psi(t_0) \text{ αντιστρ.}} \mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0.$$

Έτσι η **λύση του ΠΑΤ** είναι:

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0. \quad (15)$$

Παρατηρήσεις

- Τονίζουμε ότι αν και ο τύπος (15) είναι «κομψός», για να λύσουμε ένα δεδομένο ΠΑΤ, συνήθως **ΔΕΝ** υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα $\Psi^{-1}(t_0)$, αλλά υπολογίζουμε το διάνυσμα συντελεστών $\mathbf{c}$ λύνοντας απ' ευθείας (με απαλοιφή Gauss) το σύστημα

$$\Psi(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}^0.$$

- Δεδομένου ότι κάθε στήλη του θεμελιώδους πίνακα Ψ είναι λύση του συστήματος $\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x}$, έχουμε άμεσα ότι ο Ψ ικανοποιεί την ακόλουθη ΔΕ σε μορφή πινάκων:

$$\Psi' = P(t) \Psi. \quad (16)$$

Το μη ομογενές σύστημα

Θεωρούμε το μη ομογενές σύστημα

$$\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (17)$$

όπου ο $n \times n$ πίνακας $P(t)$ και το $n \times 1$ διάνυσμα $\mathbf{g}(t)$ είναι συνεχή για $t \in I$.

Τότε, όπως είδαμε και στην περίπτωση της μη ομογενούς γραμμικής ΣΔΕ 2ης τάξης, η γενική λύση της (17), μπορεί να εκφρασθεί ως

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t) + \mathbf{x}_p(t), \quad (18)$$

όπου

$c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ είναι η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x}$

και

$\mathbf{x}_p(t)$ είναι μια ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος (17).

Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών

Ένας τρόπος για να βρούμε μια ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος (17) είναι η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών που είδαμε στην περίπτωση της μη ομογενούς γραμμικής ΣΔΕ 2ης τάξης.

Πρακτικά, η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται μόνο εάν ο πίνακας των συντελεστών P είναι σταθερός και εάν οι συνιστώσες του g είναι πολυωνυμικές, εκθετικές ή ημιτονοειδείς συναρτήσεις ή αθροίσματα ή γινόμενα αυτών.

Σε αυτές τις περιπτώσεις η σωστή μορφή της λύσης μπορεί να προβλεφθεί με απλό και συστηματικό τρόπο. Η διαδικασία επιλογής της μορφής της λύσης είναι ουσιαστικά η ίδια με αυτή που είδαμε για μη ομογενείς γραμμικές ΔΕ 2ης τάξης.

Η κύρια διαφορά εντοπίζεται όταν έχουμε έναν μη ομογενή όρο της μορφής $ue^{\lambda t}$, όπου λ είναι μια απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Στην περίπτωση αυτή, αντί να υποθέσουμε μια λύση της μορφής $ate^{\lambda t}$, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε το άθροισμα $ate^{\lambda t} + be^{\lambda t}$, όπου τα a και b προσδιορίζονται με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί το μη ομογενές σύστημα $x' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix}$.

Εάν A είναι ο πίνακας των συντελεστών, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 1 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0,$$

επομένως ο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 2$.

Για $\lambda_1 = 7$ λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -u_1 + u_2 = 0 \\ 4u_1 - 4u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = u_2.$$

Άρα, παίρνοντας, π.χ., $u_1 = 1$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Έτσι, μια λύση του συστήματος είναι η $x^{(1)}(t) = e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Για $\lambda_2 = 2$ λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4u_1 + u_2 = 0.$$

Άρα, παίρνοντας, π.χ., $u_1 = 1$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Έτσι, μια δεύτερη (γραμμικά ανεξάρτητη) λύση του συστήματος είναι η

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, η γενική λύση του ομογενούς συστήματος είναι:

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Για να βρούμε μια ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος γράφουμε τον μη ομογενή όρο στην ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Τώρα, αναζητούμε ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος στη μορφή:

$$\mathbf{x}_p(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b} = t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix}.$$

Αντικαθιστούμε την $\mathbf{x}_p$ στο μη ομογενές σύστημα και έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = (6a_1 + a_2 + 6)t + 6b_1 + b_2 \\ a_2 = (4a_1 + 3a_2 - 10)t + 4b_1 + 3b_2 + 4 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 6a_1 + a_2 = -6 \\ 4a_1 + 3a_2 = 10 \\ 6b_1 + b_2 = a_1 \\ 4b_1 + 3b_2 = a_2 - 4 \end{cases} &\Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 = -2, \quad a_2 = 6, \quad b_1 = -\frac{4}{7}, \quad b_2 = \frac{10}{7}. \end{aligned}$$

Άρα μια ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος είναι:

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{pmatrix} -2t - 4/7 \\ 6t + 10/7 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

και η γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος είναι:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_h(t)} + \underbrace{t \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_p(t)}.$$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί το μη ομογενές σύστημα $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0,$$

επομένως ο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$.

Για $\lambda_1 = -1$ λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = u_2.$$

Άρα, παίρνοντας, π.χ., $u_1 = 1$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Έτσι, μια λύση του συστήματος είναι η $\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Για $\lambda_2 = -3$ λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 + u_2 = 0.$$

Άρα, παίρνοντας, π.χ., $u_1 = 1$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Έτσι, μια δεύτερη (γραμμικά ανεξάρτητη) λύση του συστήματος είναι η

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, η γενική λύση του ομογενούς συστήματος είναι:

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Για να βρούμε μια ειδική λύση του μη ομογενούς γράφουμε τον μη ομογενή όρο $\mathbf{g}(t)$ ως:

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι το $\lambda = -1$ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα συντελεστών A , άρα πρέπει να συμπεριλάβουμε τόσο το $te^{-t}\mathbf{a}$ όσο και το $e^{-t}\mathbf{b}$ στην μορφή της ειδικής λύσης.

Άρα, αναζητούμε ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος στη μορφή:

$$\mathbf{x}_p(t) = te^{-t}\mathbf{a} + e^{-t}\mathbf{b} + t\mathbf{c} + \mathbf{d}.$$

Αντικαθιστούμε την $\mathbf{x}_p$ στο μη ομογενές σύστημα $\mathbf{x}'_p = A\mathbf{x}_p + \mathbf{g}(t)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \underbrace{e^{-t}\mathbf{a} - te^{-t}\mathbf{a} - e^{-t}\mathbf{b} + \mathbf{c}}_{\mathbf{x}'_p} &= A \underbrace{(te^{-t}\mathbf{a} + e^{-t}\mathbf{b} + t\mathbf{c} + \mathbf{d})}_{\mathbf{x}_p} + \underbrace{e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}(t)} \\ \Leftrightarrow -te^{-t}\mathbf{a} + e^{-t}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= te^{-t}A\mathbf{a} + e^{-t}\left(A\mathbf{b} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + t\left(A\mathbf{c} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) + A\mathbf{d}. \end{aligned}$$

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και καταλήγουμε στις ακόλουθες εξισώσεις για τα

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \text{ και } \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} :$$

$$A\mathbf{a} = -\mathbf{a} \quad (19)$$

$$A\mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$A\mathbf{c} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$A\mathbf{d} = \mathbf{c} \quad (22)$$

- Η (19) δηλώνει ότι το $\mathbf{a}$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$.
Επομένως $\mathbf{a} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- Τότε από την (20) έχουμε:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b_1 + b_2 = \alpha - b_1 - 2 \\ b_1 - 2b_2 = \alpha - b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b_1 + b_2 = \alpha - 2 \\ b_1 - b_2 = \alpha \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση μόνον αν $\alpha = 1$, οπότε σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε ότι $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ενώ $-b_1 + b_2 = -1 \Leftrightarrow b_2 = b_1 - 1$, επομένως

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 - 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Η απλούστερη επιλογή είναι να πάρουμε $b_1 = 0$, οπότε $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Τώρα, (21) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow c_1 = 1 \text{ και } c_2 = 2.$

Άρα $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

- Τέλος, (22) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow d_1 = -\frac{4}{3} \text{ και } d_2 = -\frac{5}{3}.$

Άρα $\mathbf{d} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Συνεπώς μια ειδική λύση είναι:

$$\mathbf{x}_p(t) = te^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

και η γενική λύση είναι: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t)$

Η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται και για συστήματα όπου ο πίνακας συντελεστών P δεν είναι σταθερός.

Έστω το μη ομογενές σύστημα

$$\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (23)$$

με $P(t)$ και $\mathbf{g}(t)$ όπως πριν, και το αντίστοιχο ομογενές σύστημα

$$\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x}. \quad (24)$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε βρει έναν θεμελιώδη πίνακα $\Psi(t)$ για το ομογενές σύστημα (24).

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων αναζητούμε μια λύση της μη ομογενούς (23) στη μορφή

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u}(t), \quad (25)$$

όπου $\mathbf{u}(t)$ είναι ένα διάνυσμα προς εύρεση.

Αντικαθιστούμε την (25) στην (23) και **επειδή ο Ψ είναι θεμελιώδης πίνακας** έχουμε:

$$\begin{aligned}\Psi'(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\mathbf{u}'(t) &= P(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t) \\ \xRightarrow{\Psi' = P(t)\Psi} P(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\mathbf{u}'(t) &= P(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t) \\ \Rightarrow \Psi(t)\mathbf{u}'(t) &= \mathbf{g}(t)\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}\xRightarrow{\Psi \text{ αντιστρ.}} \mathbf{u}'(t) &= \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t) \\ \Rightarrow \mathbf{u}(t) &= \int \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t) dt + \mathbf{c}.\end{aligned}\tag{27}$$

Εάν τα ολοκληρώματα της (27) μπορούν να υπολογιστούν, τότε η γενική λύση του συστήματος (23) βρίσκεται αντικαθιστώντας την $\mathbf{u}(t)$ από την (27) στην (25).

Ωστόσο, ακόμη και αν τα ολοκληρώματα δεν μπορούν να υπολογιστούν, μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση της (23) στη μορφή

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t) \int_{t_1}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds,\tag{28}$$

όπου t_1 είναι οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος I . **Ο πρώτος όρος** στο δεξιό μέλος της (28) είναι **η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος (24)**, και **ο δεύτερος όρος είναι μια ειδική λύση της (23)**.

Έστω τώρα το **ΠΑΤ** που αποτελείται από τη ΔΕ (24) και την **αρχική συνθήκη**: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$. Για να βρούμε τη λύση είναι πολύ βολικό να επιλέξουμε ως κάτω άκρο ολοκλήρωσης στην (28) το αρχικό σημείο t_0 . Τότε η γενική λύση της (24) είναι

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds,\tag{29}$$

Για $t = t_0$, έχουμε $\mathbf{x}(t_0) = \Psi(t_0)\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0$. Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι:

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds.\tag{30}$$

Παράδειγμα 3

Να λυθεί το μη ομογενές σύστημα $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$ με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.

Το σύστημα αυτό το εξετάσαμε στο Παράδειγμα 2 και βρήκαμε ότι η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς είναι:

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Άρα ο $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας.

Έπεται ότι η λύση $\mathbf{x}$ δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{u}(t),$$

όπου το $\mathbf{u}(t)$ ικανοποιεί την (26), δηλ.

$$\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}.$$

Λύνουμε (με απαλοιφή Gauss) για να βρούμε τα u'_1, u'_2 :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ 0 & -2e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t - 2e^{-t} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & -2e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t + e^{-t} \\ 3t - 2e^{-t} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} e^{-t} u'_1(t) = \frac{3}{2}t + e^{-t} \\ -2e^{-3t} u'_2(t) = 3t - 2e^{-t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1(t) = \frac{3}{2}te^t + 1 \\ u'_2(t) = -\frac{3}{2}te^{3t} + e^{2t} \end{cases} \\ \Rightarrow & \int dt \begin{cases} u_1(t) = \frac{3}{2}te^t - \frac{3}{2}e^t + t + c_1 \\ u_2(t) = -\frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{2t} + c_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Τελικά, η λύση δίνεται από την

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \Psi(t)\mathbf{u}(t) \\
 \Leftrightarrow \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}te^t - \frac{3}{2}e^t + t + c_1 \\ -\frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{2t} + c_2 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} + te^{-t} + c_1e^{-t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^{-t} + c_2e^{-3t} \\ \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} + te^{-t} + c_1e^{-t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} - c_2e^{-3t} \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \mathbf{x}(t) &= c_1e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &\quad + te^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$