

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Δημήτρης Μητσούδης

Εισαγωγή

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) για μια **γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης** αποτελείται από μια εξίσωση

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = g(t), \quad (1)$$

και τις αρχικές συνθήκες

$$y(t_0) = b_0, \quad y'(t_0) = b_1, \quad (2)$$

όπου οι συντελεστές $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, καθώς και η συνάρτηση $g(t)$, είναι (συνήθως) συνεχείς με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I με $t_0 \in I$, και b_0 , b_1 είναι δοσμένοι αριθμοί που καθορίζουν τιμές για τις y , y' , αντίστοιχα, στο αρχικό σημείο t_0 .

Η εξίσωση (1) θα λέγεται **ομογενής** εάν $g(t) \equiv 0$, διαφορετικά θα λέγεται **μη ομογενής**.

Μια λύση της εξίσωσης (1) στο διάστημα I είναι μια $C^2(I)$ συνάρτηση $\phi(t)$ που ικανοποιεί την εξίσωση στο I . Μια λύση του ΠΑΤ (1), (2), είναι μια λύση της εξίσωσης η οποία, επιπλέον, ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $\phi(t_0) = b_0$ και $\phi'(t_0) = b_1$.

Υποθέτουμε ότι $p(t) \neq 0$, για κάθε t στο διάστημα I , οπότε διαιρώντας και τα δύο μέλη της (1) με $p(t)$ παίρνουμε μία εξίσωση στην οποία ο συντελεστής του όρου y'' είναι 1.

Σχετικά με την ύπαρξη λύσης ενός ΠΑΤ έχουμε το ακόλουθο ανάλογο του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας που είδαμε για γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης.

Θεώρημα

Εάν οι p , q και g είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο ανοικτό διάστημα I και t_0 είναι σημείο του I , τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = b_0, \quad y'(t_0) = b_1, \quad (3)$$

όπου b_0 και b_1 είναι αυθαίρετες σταθερές, έχει μοναδική λύση στο I .

Δηλαδή, το θεώρημα εξασφαλίζει:

- ότι **υπάρχει λύση** του ΠΑΤ,
- ότι η λύση είναι **μοναδική**,
- και ότι η λύση **ορίζεται σε ολόκληρο το διάστημα I** όπου οι συντελεστές είναι συνεχείς και είναι (τουλάχιστον) **δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη** εκεί.

Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί το αρχικό σημείο t_0 και να βρεθεί το μεγαλύτερο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης του ΠΑΤ

$$y'' + \frac{1}{t-2} y' + \sqrt{t+1} y = \ln t, \quad y(t_0) = b_0, \quad y'(t_0) = b_1.$$

Η συνάρτηση $p(t) = 1/(t-2)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$,
η $q(t) = \sqrt{t+1}$ στο $[-1, \infty)$, και η $g(t) = \ln t$ στο $(0, \infty)$.

Έτσι το κοινό διάστημα ύπαρξης και συνέχειας των συντελεστών και του μη ομογενούς όρου της εξίσωσης είναι το $(2, \infty)$.

Κατά συνέπεια, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, για $t_0 > 2$ το ΠΑΤ έχει **μοναδική λύση στο διάστημα $(2, \infty)$** .

Παρατήρηση

Έστω ότι η $\phi(t)$ είναι λύση της εξίσωσης

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

στο διάστημα (a, b) , στο οποίο οι συντελεστές $p(t)$ και $q(t)$ είναι συνεχείς, και έστω $\phi(t_0) = 0$, για κάποιο t_0 στο (a, b) .

Αν $\phi(t) \not\equiv 0$, ναδειχθεί ότι $\phi'(t_0) \neq 0$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\phi'(t_0) = 0$. Τότε η $\phi(t)$ θα είναι η λύση του ΠΑΤ

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0.$$

Όμως και η $y \equiv 0$ είναι λύση του ίδιου προβλήματος, οπότε από το θεώρημα ύπαρξης-μοναδικότητας έπεται ότι $\phi(t) \equiv 0$ που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση $\phi(t) \not\equiv 0$. Άρα $\phi'(t_0) \neq 0$. □

Γραμμικοί διαφορικοί τελεστές

Για να μελετήσουμε τις γενικές ιδιότητες μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης εισάγουμε την έννοια του **γραμμικού διαφορικού τελεστή**. Έστω $p(t)$ και $q(t)$ συνεχείς συναρτήσεις στο ανοικτό διάστημα I . Τότε για κάθε συνάρτηση ϕ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο I , ορίζουμε τον διαφορικό τελεστή L μέσω της σχέσης

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi. \quad (4)$$

Ο τελεστής L απεικονίζει τη συνάρτηση ϕ (που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο I) στη συνεχή συνάρτηση στο I , $\phi'' + p(t)\phi' + q(t)\phi$.

Η τιμή του $L[\phi]$ στο σημείο t είναι:

$$L[\phi](t) = \phi''(t) + p(t)\phi'(t) + q(t)\phi(t).$$

Π.χ., αν $p(t) = t^2$, $q(t) = 1 + t$, και $\phi(t) = \sin 3t$, τότε

$$L[\phi](t) = (\sin 3t)'' + t^2(\sin 3t)' + (1 + t)\sin 3t = -9\sin 3t + 3t^2 \cos 3t + (1 + t)\sin 3t.$$

Γραμμικοί διαφορικοί τελεστές

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης στην (3) μπορούμε να το δούμε ως το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή L στη συνάρτηση y . Επομένως, έχοντας ορίσει τον τελεστή L στην (4), μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση στην (3) στη μορφή

$$L[y] = g.$$

Ο τελεστής L που ορίσαμε στην (4), είναι πράγματι ένας γραμμικός τελεστής.

Αν y_1, y_2 είναι δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε κάποιο διάστημα I , και c_1, c_2 είναι σταθερές τότε

$$\begin{aligned} L[c_1 y_1 + c_2 y_2] &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1 p(t) y_1' + c_2 p(t) y_2' + c_1 q(t) y_1 + c_2 q(t) y_2 \\ &= c_1 (y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1) + c_2 (y_2'' + p(t) y_2' + q(t) y_2) \\ &= c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]. \end{aligned}$$

Αρχή της υπέρθεσης

Θεώρημα

Εάν οι y_1, y_2 είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

$$L[y] = y'' + p y' + q y = 0, \quad (5)$$

τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός τους $c_1 y_1 + c_2 y_2$, όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές, είναι επίσης λύση της ομογενούς εξίσωσης.

Απόδειξη. Οι y_1, y_2 είναι λύσεις της εξίσωσης, επομένως θα είναι $L[y_1] = 0$ και $L[y_2] = 0$.

Άρα

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] = c_1 0 + c_2 0 = 0.$$

Παρατήρηση

Αν y_1 είναι μια λύση της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης $L[y_1] = 0$ και y_2 είναι μια λύση της μη ομογενούς γραμμικής εξίσωσης $L[y_2] = g$, τότε η $y_1 + y_2$ είναι λύση της μη ομογενούς, δηλ.

$$L[y_1 + y_2] = g.$$

Απόδειξη. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0 + g = g$.

Παράδειγμα

Αφού δείξετε ότι οι συναρτήσεις $y_1(t) = e^{2t} \cos t$, $y_2(t) = e^{2t} \sin t$ είναι λύσεις της εξίσωσης $y'' - 4y' + 5y = 0$, να βρείτε τη λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = -1$.

Αρχικά υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} y_1' &= 2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t = e^{2t} (2 \cos t - \sin t) \\ y_1'' &= 2e^{2t} (2 \cos t - \sin t) + e^{2t} (-2 \sin t - \cos t) = e^{2t} (3 \cos t - 4 \sin t). \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} y_1'' - 4y_1' + 5y_1 &= e^{2t} (3 \cos t - 4 \sin t) - e^{2t} (8 \cos t - 4 \sin t) + 5e^{2t} \cos t \\ &= e^{2t} (3 \cos t - 4 \sin t - 8 \cos t + 4 \sin t + 5 \cos t) = e^{2t} 0 = 0, \end{aligned}$$

άρα η y_1 είναι λύση της εξίσωσης.

Εντελώς ανάλογα δείχνουμε ότι και η y_2 είναι λύση της εξίσωσης.

Άρα και κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t$$

θα είναι λύση της εξίσωσης!

Δοκιμάζουμε αυτή τη λύση σκεπτόμενοι ότι θα προσδιορίσουμε τις σταθερές c_1 και c_2 από τις αρχικές συνθήκες.

Πράγματι,

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 e^0 \cos 0 + c_2 e^0 \sin 0 = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1.$$

$$y'(0) = -1 \Leftrightarrow (2c_1 + c_2)e^0 \cos 0 - (c_1 - 2c_2)e^0 \sin 0 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2c_1 + c_2 = -1 \stackrel{c_1=1}{\Leftrightarrow} c_2 = -3.$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι η

$$y(t) = e^{2t} \cos t - 3e^{2t} \sin t.$$

όπου, σύμφωνα με το θεώρημα ύπαρξης-μοναδικότητας, είναι και η μοναδική.

Πρόβλημα συνοριακών τιμών

Ένας άλλος τύπος προβλήματος για γραμμικές εξισώσεις δεύτερης τάξης είναι όταν αντί για αρχικές συνθήκες μας δίνεται πληροφορία για τη λύση ή/και για την παράγωγο της λύσης στα άκρα ενός διαστήματος $[a, b]$. Π.χ.,

$$y(a) = y_a \text{ και } y(b) = y_b \quad \text{ή} \quad y'(a) = y_a \text{ και } y'(b) = y_b,$$

όπου y_a και y_b είναι δοσμένοι αριθμοί.

Τέτοιου τύπου συνθήκες λέγονται **συνοριακές συνθήκες (ΣΣ)**, ενώ το πρόβλημα που αποτελείται από την εξίσωση $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ και τις συνοριακές συνθήκες λέγεται **πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ)**.

Γενικότερα, σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών μπορούμε να έχουμε τις συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = y_a, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = y_b,$$

όπου τα $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$ είναι σταθερές τέτοιες ώστε τουλάχιστον μία από τις α_1 και β_1 είναι $\neq 0$, και τουλάχιστον μία από τις α_2 και β_2 είναι $\neq 0$.

Παράδειγμα

Θεωρήστε την $y'' + y = 0$, της οποίας όλες οι λύσεις δίνονται από τη σχέση

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.}$$

- Υπάρχει μοναδική λύση που ικανοποιεί το ΠΣΤ με ΣΣ: $y(0) = 1, y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Έχουμε,

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1. \quad \text{Άρα μοναδική λύση: } y(t) = \cos t + \sin t.$$

- Δεν υπάρχει λύση που ικανοποιεί το ΠΣΤ με ΣΣ: $y(0) = 1, y(\pi) = 1$.

Έχουμε,

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1, \quad y(\pi) = 1 \Leftrightarrow c_1 = -1. \quad \text{Αδύνατον, άρα δεν υπάρχει λύση.}$$

- Υπάρχουν άπειρες λύσεις που ικανοποιούν το ΠΣΤ με ΣΣ: $y(0) = 1, y(\pi) = -1$.

Έχουμε,

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1, \quad y(\pi) = -1 \Leftrightarrow c_1 = 1. \quad \text{Άπειρες λύσεις: } y(t) = \cos t + c_2 \sin t.$$

Μέθοδος υποβιβασμού τάξης

Αν έχουμε μια λύση σε μια γραμμική ομογενή εξίσωση δεύτερης τάξης, τότε μπορούμε να βρούμε μια άλλη.

Θεωρήστε την ομογενή γραμμική εξίσωση: $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.

Έστω ότι με κάποιο τρόπο έχουμε βρει μια λύση y_1 . Τότε δοκιμάζουμε μια δεύτερη λύση της μορφής

$$y_2(t) = y_1(t)u(t),$$

και πρέπει να προσδιορίσουμε την $u(t)$.

Έστω

$$\begin{aligned} y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 &= (y_1 u)'' + p(t)(y_1 u)' + q(t)y_1 u \\ &= y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u'' + p(t)y_1 u' + p(t)y_1' u + q(t)y_1 u \\ &= \underbrace{(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1)}_{=0} u + y_1 u'' + (py_1 + 2y_1')u' = 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$y_1 u'' + (2y_1' + py_1)u' = 0.$$

Θέτουμε $w = u'$, οπότε καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση πρώτης τάξης για την w :

$$y_1 w' + (2y_1' + py_1)w = 0.$$

Διαιρούμε με (wy_1) και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{w'}{w} + 2 \frac{y_1'}{y_1} &= -p \xrightarrow{\int dt} \ln |w| + 2 \ln |y_1| = - \int p(t) dt + C \Rightarrow \ln |wy_1^2| = - \int p(t) dt + C \\ \Rightarrow wy_1^2 &= C_1 e^{-\int p(t) dt} \xrightarrow{w=u'} u' = C_1 \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(t) dt} \\ \xrightarrow{\int dt} u &= C_1 \int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int p(t) dt} dt + C_2. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $C_1 = 1$ και $C_2 = 0$ και έχουμε ότι η

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int p(t) dt} dt, \quad (6)$$

είναι μια δεύτερη λύση της ομογενούς ΔΕ εκεί όπου $y_1(t) \neq 0$.

Παρατήρηση

Όπως είδαμε, έχουμε τον τύπο (6) για την εύρεση μιας δεύτερης λύσης της γραμμικής ομογενούς ΔΕ 2ης τάξης, όταν γνωρίζουμε ήδη μια λύση y_1 .

Ωστόσο, είναι πολύ πιο εύκολο να θυμόμαστε ότι πρέπει απλώς να δοκιμάσουμε $y_2(t) = y_1(t)u(t)$ και να βρούμε το $u(t)$ ακολουθώντας τα βήματα που κάναμε παραπάνω.

Επίσης, η τεχνική αυτή λειτουργεί και για εξισώσεις ανώτερης τάξης: Μπορούμε να μειώσουμε την τάξη για κάθε λύση που βρίσκουμε. Επομένως, είναι προτιμότερο να θυμόμαστε πώς να το κάνουμε παρά έναν συγκεκριμένο τύπο.

Παράδειγμα

Θεωρήστε τη ΔΕ: $2t^2 y'' - ty' - 2y = 0, \quad t > 0$.

Άμεσα διαπιστώνουμε ότι η $y_1(t) = t^2$ είναι λύση της ΔΕ. Γράφουμε τη ΔΕ στη μορφή:

$$y'' - \frac{1}{2t}y' - \frac{1}{t^2}y = 0, \quad t > 0,$$

και θα εφαρμόσουμε τον τύπο (6), όπου εδώ $p(t) = -\frac{1}{2t}$ και $q(t) = -\frac{1}{t^2}$.

Αρχικά θα υπολογίσουμε το

$$-\int p(t) dt = \int \frac{1}{2t} dt = \ln \sqrt{t} + C \Rightarrow e^{-\int p(t) dt} = e^{\ln \sqrt{t} + C} = C_1 \sqrt{t}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} (6) \Rightarrow y_2(t) &= y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int p(t) dt} dt \Rightarrow y_2(t) = t^2 \int \frac{1}{t^4} C_1 \sqrt{t} dt \\ &\Rightarrow y_2(t) = C_1 t^2 \int t^{-\frac{7}{2}} dt \Rightarrow y_2(t) = -\frac{2C_1}{5} t^{-\frac{1}{2}} + C_2 t^2. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $C_1 = -5/2$ και $C_2 = 0$, οπότε μια δεύτερη λύση είναι η $y_2(t) = t^{-\frac{1}{2}}$.

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία

Θεωρούμε το ΠΑΤ για την ομογενή γραμμική ΔΕ 2ης τάξης:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(t_0) = b_0, \quad y'(t_0) = b_1, \quad (7)$$

όπου οι p, q είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο ανοικτό διάστημα $I, t_0 \in I$, και b_0 και b_1 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Έστω y_1, y_2 λύσεις της ομογενούς εξίσωσης. Τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ θα είναι λύση. Αναζητούμε τα c_1, c_2 έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες. Τότε

$$\begin{aligned} y(t_0) &= b_0 \Leftrightarrow c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = b_0 \\ y'(t_0) &= b_1 \Leftrightarrow c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = b_1 \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτών των δύο εξισώσεων μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Οι συντελεστές c_1, c_2 θα καθορίζονται με μοναδικό τρόπο αν και μόνον αν το σύστημα (8) έχει μοναδική λύση

$\Leftrightarrow$ αν ο πίνακας του συστήματος (8) είναι αντιστρέψιμος

$\Leftrightarrow$ αν οι στήλες του πίνακα, $\begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_1'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(t_0) \\ y_2'(t_0) \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow$ αν η ορίζουσα $\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$.

Υπενθύμιση: Έστω $u_1, u_2, \dots, u_n$ διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου V . Θα λέγονται γραμμικά εξαρτημένα εάν υπάρχουν σταθερές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ όχι όλες ίσες με μηδέν, έτσι ώστε

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0,$$

όπου 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα. Αλλιώς, θα λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα.

Ορισμός

Οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \dots, f_n$ ορισμένες σε κάποιο διάστημα I θα λέγονται γραμμικά εξαρτημένες στο διάστημα I , εάν υπάρχουν σταθερές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ όχι όλες ίσες με μηδέν, έτσι ώστε

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0,$$

για όλα τα t στο I . Οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \dots, f_n$ θα λέγονται γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα I , εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένες στο I .

Παρατήρηση: Δύο συναρτήσεις f, g , ορισμένες στο I , είναι γραμμικά εξαρτημένες $\Leftrightarrow$ η μια είναι πολλαπλάσιο της άλλης, δηλ. υπάρχει σταθερά λ τέτοια ώστε $f = \lambda g$. (ΑΣΚΗΣΗ)

Επίσης, ένα σύνολο συναρτήσεων $f_1, f_2, \dots, f_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένο αν και μόνον αν μία (τουλάχιστον) από τις συναρτήσεις αυτές γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. (ΑΣΚΗΣΗ)

Παράδειγμα

Οι συναρτήσεις $f(t) = |t|$ και $g(t) = t$ είναι

- Γραμμικά εξαρτημένες στο $(0, \infty)$.
- Γραμμικά ανεξάρτητες στο $(-\infty, \infty)$.

Στο $(0, \infty)$ έχουμε $f(t) = g(t) \Rightarrow$ γραμμικά εξαρτημένες.

Αν ήταν γραμμικά εξαρτημένες στο $(-\infty, \infty)$ θα υπήρχε ένα $\lambda \in \mathbb{R}$: $f(t) = \lambda g(t)$
 $\Leftrightarrow |t| = \lambda t$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Όμως για $t \geq 0$: $\lambda = 1$, ενώ για $t < 0$: $\lambda = -1$, Άτοπο!

Άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $(-\infty, \infty)$.

Θεώρημα

Έστω ότι οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης στην (7) σε κάποιο ανοικτό διάστημα I . Οι y_1 και y_2 είναι **γραμμικά εξαρτημένες στο I** αν και μόνον αν η ορίζουσα

$$W(y_1, y_2)(t_0) := \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{για κάποιο σημείο } t_0 \text{ στο } I.$$

Επιπλέον, αν $W(y_1, y_2)(t_0) = 0$ σε κάποιο σημείο $t_0 \in I$, τότε $W(y_1, y_2)(t) = 0$, για κάθε $t \in I$.

Έτσι αν υπάρχει κάποιο $t_0 \in I$ τέτοιο ώστε $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$, τότε οι y_1 και y_2 είναι **γραμμικά ανεξάρτητες στο I** .

Η ορίζουσα

$$W(y_1, y_2) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (9)$$

λέγεται **ορίζουσα Wronski** ή απλώς Wronskian των y_1 και y_2 .

Απόδειξη του θεωρήματος

“ $\Rightarrow$ ” Έστω y_1, y_2 γραμμικά εξαρτημένες. Τότε η μια είναι πολλαπλάσιο της άλλης, δηλ. $\exists$ σταθερά λ : $y_1(t) = \lambda y_2(t)$, για κάθε $t \in I$. Τότε για $t = t_0$

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} \lambda y_2(t_0) & y_2(t_0) \\ \lambda y_2'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \lambda y_2(t_0)y_2'(t_0) - \lambda y_2(t_0)y_2'(t_0) = 0.$$

“ $\Leftarrow$ ” Έστω $t_0 \in I$: $W(y_1, y_2)(t_0) = 0$. Τότε ο πίνακας $\begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix}$ είναι μη αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ οι στήλες $\begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_1'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(t_0) \\ y_2'(t_0) \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$. Άρα υπάρχει σταθερά λ τέτοια ώστε

$$\begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_1'(t_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_2(t_0) \\ y_2'(t_0) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y_1(t_0) = \lambda y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) = \lambda y_2'(t_0) \end{matrix}$$

Άρα οι συναρτήσεις y_1 και λy_2 ικανοποιούν τις ίδιες αρχικές συνθήκες στο σημείο $t_0 \in I$. Συνεπώς από το θεώρημα ύπαρξης-μοναδικότητας έχουμε ότι $y_1(t) = \lambda y_2(t)$, για κάθε $t \in I$. Οπότε οι y_1, y_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες. $\square$

Πρόταση

Έστω ότι οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης στην (7) σε κάποιο ανοικτό διάστημα I . Τότε η ορίζουσα Wronski $W(y_1, y_2)$ θα είναι είτε ταυτοτικά ίση με μηδέν στο I ή διάφορη του μηδενός σ' ολόκληρο το I .

Απόδειξη.

Οι λύσεις y_1 και y_2 θα είναι $\begin{cases} \text{είτε γραμμικά ανεξάρτητες} & \Rightarrow W(y_1, y_2) \neq 0, \forall t \in I \\ \text{ή γραμμικά εξαρτημένες} & \Rightarrow W(y_1, y_2) = 0, \forall t \in I \end{cases} \quad \square$

Θεμελιώδεις λύσεις

Θεωρούμε την ομογενή γραμμική εξίσωση 2ης τάξης

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad (10)$$

και την μη ομογενή

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (11)$$

όπου $p, q, g \in C(I)$, με I κάποιο ανοιχτό διάστημα.

Ορισμός

Θα λέμε ότι οι λύσεις y_1 και y_2 της ομογενούς εξίσωσης (10) αποτελούν ένα **θεμελιώδες σύνολο λύσεων** για την ομογενή εξίσωση στο ανοιχτό διάστημα I αν είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I .

Υπαρξη θεμελιώδους συνόλου λύσεων

Θεώρημα

Για την ομογενή γραμμική ΔΕ δεύτερης τάξης (10), όπου $p, q \in C(I)$ σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I , υπάρχει πάντα ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων στο I .

Απόδειξη. Από το θεώρημα ύπαρξης-μοναδικότητας για το ΠΑΤ, αν $t_0 \in I$,

- θα υπάρχει μοναδική λύση y_1 που ικανοποιεί την (10) και τις ΑΣ:
 $y_1(t_0) = 1, y_1'(t_0) = 0,$
- θα υπάρχει μοναδική λύση y_2 που ικανοποιεί την (10) και τις ΑΣ:
 $y_2(t_0) = 0, y_2'(t_0) = 1.$

Τότε

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow y_1, y_2 \text{ γραμμικά ανεξάρτητες στο } I.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό, οι y_1, y_2 αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για την (10). □

Θεώρημα

Αν οι y_1, y_2 αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για την (10), σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I , και αν Y είναι μια λύση της ίδιας εξίσωσης στο I , τότε υπάρχουν σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Απόδειξη. Αφού οι y_1, y_2 αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων έπεται ότι $W(y_1, y_2)(t) \neq 0, \forall t \in I$. Άρα και $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$, για κάποιο $t_0 \in I$. Θα δείξουμε ότι $\exists$ σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= Y(t_0) \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) &= Y'(t_0) \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα, ότι το σύστημα αυτό με αγνώστους τα c_1, c_2 έχει λύση. Τότε από το θεώρημα ύπαρξης-μοναδικότητας οι $c_1 y_1 + c_2 y_2$ και Y θα είναι δύο λύσεις της (10), που ικανοποιούν τις ίδιες ΑΣ στο t_0 , επομένως (λόγω μοναδικότητας) θα έχουμε ότι $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Το σύστημα αυτό γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y(t_0) \\ Y'(t_0) \end{pmatrix}$$

και έχει μοναδική λύση μιας και η ορίζουσα του είναι η $W(y_1, y_2)(t_0)$ που είναι **διάφορη του μηδενός**, αφού οι y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I . $\square$

Το θεώρημα αυτό μας λέει ότι:

Κάθε λύση της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης (10) εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός θεμελιωδών λύσεων.

Ορισμός

Αν οι y_1, y_2 αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για την (10), τότε η λύση

$$c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές, θα λέγεται **γενική λύση** της ομογενούς εξίσωσης.

Θεώρημα

Αν y_p είναι μια λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (11) και οι y_1, y_2 αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για την ομογενή εξίσωση (10), και αν Y είναι μια λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (11), τότε υπάρχουν σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

Απόδειξη. Έστω L ο γραμμικός διαφορικός τελεστής που ορίζεται από το αριστερό μέλος της μη ομογενούς εξίσωσης (11) και y_p, Y είναι λύσεις της μη ομογενούς εξίσωσης (11). Τότε

$$L[Y - y_p] = L[Y] - L[y_p] = g - g = 0.$$

Επομένως, η $Y - y_p$ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης (10), οπότε από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι θα εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των y_1 και y_2 , δηλαδή θα υπάρχουν σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε

$$Y - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2. \quad \square$$

Ορισμός

Αν y_p είναι μια λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (11) και οι y_1, y_2 αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση (10), τότε η λύση

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p,$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές θα λέγεται **γενική λύση** της μη ομογενούς εξίσωσης. Στην y_p αναφερόμαστε συνήθως ως **ειδική λύση της μη ομογενούς** εξίσωσης.

Ομογενείς γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Γενική μορφή:

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (12)$$

όπου $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$ δοσμένοι. Επειδή οι σταθερές συναρτήσεις είναι συνεχείς σε όλη την ευθεία, η εξίσωση (12) έχει λύσεις για όλα τα t στο $(-\infty, \infty)$.

Δοκιμάζουμε στη ΔΕ (12) μια λύση της μορφής

$$y(t) = e^{\lambda t},$$

όπου η σταθερά λ πρέπει να προσδιοριστεί.

$$y = e^{\lambda t} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις αυτές στην (12) και έχουμε ότι

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (13)$$

Παρατηρήστε ότι η (13) είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς λ . Η εξίσωση (13) λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση** και για τις λύσεις της διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο της **διακρίνουσας** $\Delta = b^2 - 4ac$.

Περίπτωση 1: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, διακριτές πραγματικές ρίζες

Τότε υπάρχουν δύο **διακριτές** πραγματικές ρίζες

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

και άρα δύο λύσεις εκθετικής μορφής

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

Επιπλέον, η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων αυτών είναι

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0.$$

Άρα οι $e^{\lambda_1 t}$ και $e^{\lambda_2 t}$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων, οπότε η γενική λύση της (12) είναι

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (14)$$

Παραδείγματα

- ❶ Να λυθεί το ΠΑΤ: $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Ρίζες $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$.

Γενική λύση: $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$.

Οι ΑΣ ικανοποιούνται αν:
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 2c_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = -\frac{1}{3}, c_2 = \frac{1}{3}.$$

Άρα η (μοναδική) λύση είναι $y(t) = -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t}$.

- ❷ Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης: $y'' - y = 0$.

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 - 1 = 0$. Ρίζες $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Γενική λύση: $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$.

Περίπτωση 2: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, διπλή ρίζα

Τότε υπάρχει μια διπλή ρίζα $\lambda = -\frac{b}{2a}$.

Στην περίπτωση αυτή μία λύση είναι η $y_1(t) = e^{\lambda t}$.

Για τη γενική όμως λύση της εξίσωσης χρειάζεται μία δεύτερη λύση γραμμικά ανεξάρτητη από την $e^{\lambda t}$. Θα βρούμε μια τέτοια με τη μέθοδο υποβιβασμού της τάξης.

Αρχικά γράφουμε την εξίσωση στη μορφή: $y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$ και υπολογίζουμε από την (6) την

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int p(t) dt} dt, \quad \text{για } p(t) = \frac{b}{a}.$$

Έτσι έχουμε

$$y_2(t) = e^{\lambda t} \int e^{-2\lambda t} e^{-\frac{b}{a}t} dt = e^{\lambda t} \int 1 dt = e^{\lambda t}(t + C) = te^{\lambda t} + Ce^{\lambda t}.$$

Επιλέγοντας $C = 0$ παίρνουμε ως δεύτερη λύση την $y_2(t) = te^{\lambda t}$.

Η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων y_1 και y_2 είναι:

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & (1 + \lambda t)e^{\lambda t} \end{vmatrix} = e^{2\lambda t} \neq 0.$$

Άρα οι $e^{\lambda t}$ και $te^{\lambda t}$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων στην περίπτωση όπου $\Delta = 0$, οπότε η γενική λύση της (12) τώρα είναι

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}. \quad (15)$$

Περίπτωση 3: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, μιγαδικές ρίζες

Τότε οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικές $\lambda_{1,2} = r \pm is$, όπου

$$r = -\frac{b}{2a}, \quad s = \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}$$

Όπως στην περίπτωση των πραγματικών ριζών θέλουμε να πούμε ότι οι $e^{(r+is)t}$ και $e^{(r-is)t}$ είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης.

Υπενθύμιση: Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε από την ταυτότητα του Euler έχουμε:

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha} e^{i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$

Επομένως,

$$e^{(r \pm is)t} = e^{rt} \cos st \pm i e^{rt} \sin st$$

Τώρα για τη μιγαδική συνάρτηση $y(t) = u(t) + iv(t)$, αποδεικνύεται ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη όταν και μόνον όταν οι $u(t)$ και $v(t)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και ακόμη ότι

$$y'(t) = u'(t) + iv'(t) \text{ και } y''(t) = u''(t) + iv''(t).$$

Άρα οι $e^{(r+is)t}$ και $e^{(r-is)t}$ είναι (μιγαδικές) λύσεις της ομογενούς εξίσωσης. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι υπάρχουν και πραγματικές λύσεις της ίδιας εξίσωσης.

Λήμμα

Αν η μιγαδική συνάρτηση $y(t) = u(t) + iv(t)$ είναι λύση της εξίσωσης (13), τότε το πραγματικό μέρος $u(t)$ και το φανταστικό μέρος $v(t)$ της $y(t)$ είναι λύσεις της ίδιας εξίσωσης.

Απόδειξη λήμματος

Έστω L ο γραμμικός τελεστής που ορίζεται στην (12). Τότε

$$\begin{aligned} L[y(t)] &= L[u(t) + iv(t)] = a(u(t) + iv(t))'' + b(u(t) + iv(t))' + c(u(t) + iv(t)) \\ &= a(u''(t) + iv''(t)) + b(u'(t) + iv'(t)) + c(u(t) + iv(t)) \\ &= au''(t) + bu'(t) + cu(t) + i(av''(t) + bv'(t) + cv(t)) = L[u(t)] + iL[v(t)]. \end{aligned}$$

Επειδή η $y(t)$ είναι λύση της εξίσωσης $\Rightarrow L[y(t)] = 0$.

Όμως ένας μιγαδικός αριθμός είναι μηδέν όταν και μόνον όταν το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος είναι μηδέν. Άρα $L[u(t)] = L[v(t)] = 0$. □

Επομένως, όταν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\lambda_{1,2} = r \pm is$, από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι οι

$$y_1(t) = e^{rt} \cos st \quad \text{και} \quad y_2(t) = e^{rt} \sin st \quad \text{είναι λύσεις της (12).}$$

Οι y_1, y_2 αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων αν $W(y_1, y_2) \neq 0$. Πράγματι

$$\begin{aligned} W(e^{rt} \cos(st), e^{rt} \sin(st)) &= \begin{vmatrix} e^{rt} \cos(st) & e^{rt} \sin(st) \\ re^{rt} \cos(st) - se^{rt} \sin(st) & re^{rt} \sin(st) + se^{rt} \cos(st) \end{vmatrix} \\ &= se^{2rt} (\cos^2(st) + \sin^2(st)) = se^{2rt} \stackrel{(s \neq 0)}{\neq} 0. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση λοιπόν που οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικές, $\lambda_{1,2} = r \pm is$, η γενική λύση της (12) είναι

$$y(t) = C_1 e^{rt} \cos(st) + C_2 e^{rt} \sin(st). \quad (16)$$

Επίλυση της μη ομογενούς ΔΕ 2ης τάξης με σταθ. συντελεστές

Γενική μορφή:

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad (17)$$

όπου a, b, c είναι δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί, και $g(t)$ δοσμένη συνάρτηση.

Για να λύσουμε εξισώσεις του τύπου (17) ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- 1 Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

και βρίσκουμε τη γενική της λύση

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

όπου $y_1(t)$ και $y_2(t)$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς.

- 2 Προσδιορίζουμε μια λύση της μη ομογενούς, έστω y_p . (y_p : μερική λύση ή ειδική λύση.)
Τότε η **γενική λύση** της (17) είναι

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t).$$

Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών

Μια μέθοδος που δουλεύει για αρκετές εξισώσεις βασίζεται στη δοκιμή συγκεκριμένων μορφών συναρτήσεων ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης $g(t)$ που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της εξίσωσης (17). Συγκεκριμένα,

- Αν $g(t) = p_n(t)$,
όπου $p_n(t)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n , τότε δοκιμάζουμε ως μερική λύση της (17) μια συνάρτηση της μορφής

$$y_p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

- Αν $g(t) = e^{\alpha t} p_n(t)$,
όπου $p_n(t)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n , τότε δοκιμάζουμε ως μερική λύση της (17) μια συνάρτηση της μορφής

$$y_p(t) = e^{\alpha t} (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0).$$

- Αν $g(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) p_n(t)$ ή $g(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) p_n(t)$,
όπου $p_n(t)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n , τότε δοκιμάζουμε ως μερική λύση της (17) μια συνάρτηση της μορφής

$$y_p(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) \\ + e^{\alpha t} \cos(\beta t) (b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0).$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την $y_p(t)$ που δοκιμάσαμε στην μη ομογενή εξίσωση και βρίσκουμε τους άγνωστους συντελεστές $a_0, a_1, \dots, a_n$ και $b_0, b_1, \dots, b_n$.

Παραδείγματα

- ❶ Να λυθεί η ΔΕ: $y'' - y' - 2y = 4t^2$.
- ❷ Να λυθεί η ΔΕ: $y'' - y' - 2y = e^{3t}$.
- ❸ Να λυθεί η ΔΕ: $y'' - y' - 2y = \sin(2t)$.

Τροποποίηση της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών

Αν κάποιος όρος της υποψήφιας ειδικής λύσης περιλαμβάνεται στην γενική λύση της ομογενούς y_h (με διαφορετικό ίσως συντελεστή), τότε η μορφή της ειδικής λύσης που θα δοκιμάσουμε πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί t^m , όπου m είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο η μορφή της ειδικής λύσης και η y_h δεν έχουν όμοιο όρο.

Παράδειγμα 1. Να λυθεί η εξίσωση: $y'' = 9t^2 + 2t - 1$.

Παράδειγμα 2. Να λυθεί η εξίσωση $y'' - 2y' + y = te^t$.

Γενίκευση της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών

Όπως είδαμε νωρίτερα, εάν η συνάρτηση $g(t)$ που βρίσκεται στο δεύτερο μέλος της (17) έχει μια από τις ειδικές μορφές που είδαμε, τότε δοκιμάζουμε αντίστοιχα συναρτήσεις συγκεκριμένης μορφής ως ειδικές λύσεις της (17).

Εάν, τώρα, η $g(t)$ είναι άθροισμα ή διαφορά των μορφών που θεωρήσαμε, τότε δοκιμάζουμε ως y_p το άθροισμα ή την διαφορά των y_p που θεωρήσαμε στις αντίστοιχες περιπτώσεις.

Παράδειγμα. Να λυθεί η εξίσωση $y'' - 4y' + 4y = \sin t + \cos(2t)$.

Η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων

Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και σε εξισώσεις με μη σταθερούς συντελεστές. Προϋποθέτει όμως τη γνώση ενός θεμελιώδους συνόλου λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

Έστω y_1 και y_2 είναι θεμελιώδεις λύσεις της

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (18)$$

Τότε αναζητούμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (19)$$

στη μορφή

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2, \quad (20)$$

όπου $u_1(t)$, $u_2(t)$ είναι δύο συναρτήσεις που πρέπει να προσδιορισθούν.

Για να το πετύχουμε αυτό αντικαθιστούμε την (20) στη μη ομογενή εξίσωση (19).

Οι πράξεις που απαιτούνται είναι κάπως πολύπλοκες και δεν θα παρουσιάσουμε όλες τις λεπτομέρειες.

Παραγωγίζουμε την (20) και έχουμε:

$$y_p' = (u_1 y_1 + u_2 y_2)' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'.$$

Επειδή έχουμε κάποια ευελιξία στην επιλογή της λύσης, και θέλουμε να αποφύγουμε παραγώγους 2ης τάξης των συναρτήσεων u_1 και u_2 , θα αναζητήσουμε τις u_1, u_2 έτσι ώστε

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0. \quad (21)$$

Τότε $y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2', \quad y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2'.$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις αυτές στην (19) $(y_p'' + p(t)y_p' + q(t)y_p = g(t))$:

$$\begin{aligned} u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2' + p(t)(u_1 y_1' + u_2 y_2') + q(t)(u_1 y_1 + u_2 y_2) &= g(t) \\ \Leftrightarrow (y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1)u_1 + (y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2)u_2 + u_1' y_1' + u_2' y_2' &= g(t). \end{aligned}$$

Όμως οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (18), άρα:

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(t). \quad (22)$$

Οι εξισώσεις (21) και (22) αποτελούν ένα σύστημα με αγνώστους τις συναρτήσεις u_1' και u_2' :

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = g(t) \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση αν ορίζουσα των συντελεστών είναι μη μηδενική. Στην περίπτωση αυτή όμως

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0,$$

αφού οι y_1, y_2 αποτελούν ένα **θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (21)**.

Λύνουμε τις εξισώσεις αυτές, ολοκληρώνουμε, και βρίσκουμε

$$u_1(t) = - \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt \quad \text{και} \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt. \quad (23)$$

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα αυτά στο ακόλουθο:

Θεώρημα

Θεωρήστε την μη ομογενή εξίσωση

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t),$$

όπου $p, q, g \in C(I)$ σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I . Αν οι y_1, y_2 , αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση, τότε μία ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης δίνεται από τη σχέση

$$y_p(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt, \quad (24)$$

και άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) - y_1(t) \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt, \end{aligned}$$

όπου $W(y_1, y_2)$ είναι η ορίζουσα Wronski των y_1, y_2 .

Παρατήρηση

Αν t_0 είναι ένα σημείο του I , τότε μπορούμε να επιλέξουμε τις συναρτήσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$ έτσι ώστε $u_1(t_0) = u_2(t_0) = 0$, δηλαδή

$$u_1(t) = - \int_{t_0}^t \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds \quad \text{και} \quad u_2(t) = \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds.$$

Στην περίπτωση αυτή η $y_p(t)$ γράφεται ως:

$$y_p(t) = -y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds + y_2(t) \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds,$$

και αποτελεί τη λύση του ΠΑΤ

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0.$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση: $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$, για $t > 0$.

Αρχικά θα βρούμε τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης: $y'' - 2y' + y = 0$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \text{διπλή ρίζα } \lambda = 1.$$

Άρα υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις: $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$, και η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 te^t.$$

Για να υπολογίσουμε την ειδική λύση, πρέπει καταρχάς να υπολογίσουμε την ορίζουσα Wronski. Έχουμε

$$y_1'(t) = (e^t)' = e^t, \quad y_2'(t) = (te^t)' = (1+t)e^t,$$

επομένως

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{vmatrix} = (1+t)e^{2t} - te^{2t} = e^{2t}.$$

Τώρα, η ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης δίνεται από τον τύπο (24), συνεπώς

$$\begin{aligned} y_p(t) &= -y_1(t) \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt \\ &= -e^t \int \frac{te^t \frac{e^t}{t}}{e^{2t}} dt + te^t \int \frac{e^t \frac{e^t}{t}}{e^{2t}} dt \\ &= -e^t \int 1 dt + te^t \int \frac{1}{t} dt \\ &\stackrel{t \geq 0}{=} -te^t + te^t \ln t. \end{aligned}$$

(Στον υπολογισμό των προηγούμενων ολοκληρωμάτων δεν χρειάστηκε να βάλουμε σταθερές ολοκλήρωσης γιατί αναζητούμε μια ειδική λύση.)

Τέλος, για τη γενική λύση της μη ομογενούς έχουμε

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^t + c_2 te^t - te^t + te^t \ln t.$$

Παρατηρήσεις

Υπάρχουν δύο κυρίως **δυσκολίες** στη χρήση της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων.

- Η μία είναι ο **προσδιορισμός των $y_1(t)$ και $y_2(t)$** , ενός θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ομογενούς εξίσωσης (18), όταν **οι συντελεστές της εξίσωσης αυτής δεν είναι σταθερές**.
- Η άλλη πιθανή δυσκολία έγκειται στον **υπολογισμό των ολοκληρωμάτων** που εμφανίζονται στην εξίσωση (24). Αυτό εξαρτάται από τη φύση των συναρτήσεων y_1 , y_2 και g .

Προσοχή: Για να χρησιμοποιήσετε την εξίσωση (24), πρέπει να είστε βέβαιοι ότι η διαφορική εξίσωση έχει ακριβώς τη μορφή (19), διαφορετικά ο μη ομογενής όρος $g(t)$ δεν θα προσδιοριστεί σωστά.

Ένα σημαντικό **πλεονέκτημα της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων** είναι ότι η εξίσωση (24) μας δίνει μια έκφραση για την ειδική λύση $y_p(t)$ ως προς μια αυθαίρετη δεδομένη συνάρτηση $g(t)$.

Η έκφραση αυτή είναι χρήσιμη εάν θέλουμε, π.χ., να διερευνήσουμε την επίδραση πιθανών μεταβολών της συνάρτησης $g(t)$ ή εάν θέλουμε να αναλύσουμε την απόκριση ενός συστήματος σε έναν αριθμό διαφορετικών συναρτήσεων $g(t)$.

Εξισώσεις Euler

Μία εξίσωση της μορφής

$$at^2y'' + bty' + cy = g(t), \quad t > 0, \quad (25)$$

όπου $y = y(t)$ και a, b, c είναι σταθερές, λέγεται **εξίσωση του Euler**.

Ο μετασχηματισμός $t = e^x$ μετατρέπει την εξίσωση (25) σε μία γραμμική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Πράγματι, αν ορίσουμε $\psi(x) = y(e^x) = y(t)$, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^x = t \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = ty'. \quad (26)$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε την (26) ως προς x και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dx} \right) = \frac{d}{dt} (ty') \frac{dt}{dx} = (y' + ty'') t \\ \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} &= ty' + t^2 y'' \stackrel{(26)}{\Rightarrow} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d\psi}{dx} = t^2 y'' \end{aligned} \quad (27)$$

Αντικαθιστούμε τις (26) και (27) στην εξίσωση (25), οπότε καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση με σταθερούς συντελεστές:

$$a \frac{d^2 \psi}{dx^2} + (b - a) \frac{d\psi}{dx} + c\psi = g(e^x). \quad (28)$$

Επομένως, η επίλυση της (25), ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης (28), και οι δύο λύσεις συνδέονται μέσω της σχέσης

$$y(t) = \psi(\ln t).$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης: $t^2 y'' + ty' + y = 0, t > 0$.

Αν ορίσουμε $t = e^x$ και $\psi(x) = y(e^x) = y(t)$, η εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$\psi'' + \psi = 0,$$

που έχει γενική λύση

$$\psi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Επειδή $x = \ln t$, και $y(t) = \psi(\ln t)$ η γενική λύση της αρχικής y -εξίσωσης δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = c_1 \cos(\ln t) + c_2 \sin(\ln t).$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης: $t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0, t > 0$.

Αν ορίσουμε και πάλι $t = e^x$ και $\psi(x) = y(e^x) = y(t)$, η εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$\psi'' + 3\psi' + 2\psi = 0,$$

που έχει γενική λύση

$$\psi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Επειδή $x = \ln t$, και $y(t) = \psi(\ln t)$ η γενική λύση της αρχικής y -εξίσωσης δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = c_1 e^{-\ln t} + c_2 e^{-2 \ln t} = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2}.$$