

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Δημήτρης Μητσούδης

Εισαγωγή

Η γενική μορφή μιας **ΣΔΕ πρώτης τάξης** είναι

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = 0, \quad (1)$$

όπου F είναι μια γνωστή πραγματική συνάρτηση.

Στην περίπτωση που μπορούμε να λύσουμε την (1) ως προς y' θα έχουμε:

$$y' = f(t, y). \quad (2)$$

Μια συνάρτηση ϕ θα λέγεται **λύση** της (1) ή της (2), αντίστοιχα, σε κάποιο διάστημα I αν:

α) ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο I , και β) επαληθεύει την (1) ή την (2), αντίστοιχα, για κάθε $t \in I$.

Ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)** αποτελείται από μια διαφορική εξίσωση (1) ή (2), μαζί με μια αρχική συνθήκη της μορφής:

$$y(t_0) = y_0, \quad (3)$$

όπου t_0 και y_0 είναι δοσμένες πραγματικές σταθερές.

Την ανεξάρτητη μεταβλητή θα την συμβολίζουμε με t ή με x , οπότε $y = y(t)$ ή $y = y(x)$.

Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Μια ΣΔΕ πρώτης τάξης λέγεται **χωριζομένων μεταβλητών** αν το β' μέλος της εξίσωσης (1) μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως μια συνάρτηση του x επί μια συνάρτηση του y . Δηλαδή, μια εξίσωση **χωριζομένων μεταβλητών** είναι της μορφής

$$y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)g(y).$$

Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή τη γράφουμε στη διαφορική μορφή

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

(έτσι ώστε όλα τα “ y ” να είναι στο ένα μέλος της εξίσωσης και όλα τα “ x ” στο άλλο). Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της προηγούμενης εξίσωσης και έχουμε

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx. \quad (4)$$

Επομένως, προσδιορίζουμε τη γενική λύση, φυσικά υπό την προϋπόθεση ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα αυτά.

Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών... προσεκτικότερα!

Με τη διαδικασία που κάναμε πριν μπορεί να «ανησυχήσατε» ότι ολοκληρώσαμε ως προς δύο διαφορετικές μεταβλητές!!!



Ας θεωρήσουμε την $y' = f(x)g(y)$.

Παρατηρήστε ότι η $y = y(x)$ είναι συνάρτηση του x και το ίδιο συμβαίνει και με την παράγωγο $y'(x)$.

Επομένως $\frac{1}{g(y)} y' = f(x)$ και ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη **ως προς x** .

$$\int \frac{1}{g(y(x))} y'(x) dx = \int f(x)dx.$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = y(x)$, οπότε (με τη μέθοδο της αντικατάστασης) στο αριστερό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)dx.$$

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η ΣΔΕ: $y' = xy$.

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι η σταθερή συνάρτηση $y = 0$ είναι προφανώς λύση της εξίσωσης. Αν $y \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = xy &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int x dx \Rightarrow \ln |y| = \frac{x^2}{2} + C \\ &\Rightarrow |y| = e^{x^2/2+C} \Rightarrow |y| = e^C e^{x^2/2}.\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η $y = 0$ είναι λύση και βγάζοντας την απόλυτη τιμή μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση στη μορφή

$$y(x) = A e^{x^2/2},$$

όπου A είναι αυθαίρετη σταθερά ($A = e^C$ ή $A = -e^C$ ή $A = 0$).

Επαλήθευση: $y' = A x e^{x^2/2} = x(A e^{x^2/2}) = xy$.



Παράδειγμα 2

Να λυθεί το ΠΑΤ

$$\begin{cases} y' + 3x^2 y^2 = 0, \\ y(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Αν $y \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + 3x^2 y^2 = 0 &\Rightarrow - \int \frac{1}{y^2} dy = \int 3x^2 dx \\ &\Rightarrow \frac{1}{y} = x^3 + C \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x^3 + C}.\end{aligned}$$

Αφού $y(1) = \frac{1}{2}$, αντικαθιστούμε στη λύση την τιμή $x = 1$, και έχουμε

$$y(1) = \frac{1}{1^3 + C} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1^3 + C} \Leftrightarrow C + 1 = 2 \Leftrightarrow C = 1.$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι $y(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$.

Παρατήρηση: Η $y = 0$ είναι προφανώς λύση της ΔΕ $y' + 3x^2 y^2 = 0$, αλλά **δεν** ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1) = \frac{1}{2}$.

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης λέγεται **γραμμική** αν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y' + p(t)y = r(t), \quad (5)$$

όπου υποθέτουμε ότι οι $p(t)$ και $r(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα I , το οποίο μπορεί να είναι άπειρο ή και ολόκληρη η πραγματική ευθεία.

Ο στόχος μας είναι να βρούμε τη λύση στο διάστημα αυτό.

Στην περίπτωση όπου $r(t) = 0$ η εξίσωση λέγεται **ομογενής**. Διαφορετικά, λέγεται **μη ομογενής**.

Επομένως, μια ομογενής γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης έχει τη μορφή

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0,$$

δηλαδή είναι χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται με τη μέθοδο που είδαμε πριν.

Μέθοδος των ολοκληρωτικών παραγόντων για την επίλυση της (5)

Η ιδέα είναι η εξής: Πολ/ζουμε την (5) με μια μη μηδενική συνάρτηση $\mu(t)$ και έχουμε:

$$\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = \mu(t)r(t). \quad (6)$$

Αν η $\mu(t)$ είναι τέτοια ώστε

$$\mu'(t) = \mu(t)p(t), \quad (7)$$

τότε η (6) γίνεται:

$$\mu(t)y' + \mu'(t)y = \mu(t)r(t) \Leftrightarrow (\mu(t)y)' = \mu(t)r(t) \xRightarrow{\int} \mu(t)y = \int \mu(t)r(t) dt.$$

Η συνάρτηση $\mu(t)$ είναι η λύση της εξίσωσης χωριζομένων μεταβλητών (7), οπότε

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad (8)$$

Άρα οι λύσεις της (5) δίνονται από τον τύπο:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)r(t) dt \quad \text{όπου} \quad \mu(t) = e^{\int p(t)dt}. \quad (9)$$

Η συνάρτηση $\mu(t)$ λέγεται **ολοκληρωτικός παράγοντας** για τη γραμμική εξίσωση (5).

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η γραμμική ΣΔΕ πρώτης τάξης $y' + \frac{2}{t}y = 3t^3$.

Με το συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως $p(t) = \frac{2}{t}$ και $r(t) = 3t^3$.

Συνεπώς ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \ln |t|} = e^{\ln t^2} = t^2.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (9), η γενική λύση είναι

$$yt^2 = \int 3t^3 t^2 dt = 3 \int t^5 dx \Rightarrow yt^2 = \frac{t^6}{2} + C \Rightarrow y(t) = \frac{t^4}{2} + \frac{C}{t^2}.$$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η γραμμική ΣΔΕ πρώτης τάξης $ty' + (1+t)y = e^{-t}$, $t > 0$.

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική αλλά ο συντελεστής του όρου y' δεν είναι μονάδα, οπότε διαιρούμε και τα δύο μέλη με t (αυτό είναι ο.κ. αφού $t > 0$). Επομένως έχουμε

$$y' + \left(\frac{1}{t} + 1\right)y = \frac{e^{-t}}{t}.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής (5) με

$$p(t) = \frac{1}{t} + 1 \quad \text{και} \quad r(t) = \frac{e^{-t}}{t}.$$

Άρα ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο

$$\mu(t) = e^{\int (\frac{1}{t} + 1) dt} \stackrel{t \geq 0}{=} e^{\ln t + t} = e^{\ln t} e^t = te^t.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (9),

$$yte^t = \int \frac{e^{-t}}{t} te^t dt = \int dt = t + C \Rightarrow y = \frac{t+C}{t} e^{-t},$$

και άρα η γενική λύση είναι

$$y(t) = \left(1 + \frac{C}{t}\right) e^{-t}, \quad t > 0.$$

Παρατήρηση - Ασυνεχείς συντελεστές

Σε διάφορες εφαρμογές μπορεί να συμβεί μία (ή και οι δύο) από τις συναρτήσεις p και r του προβλήματος

$$y' + p(t)y = r(t), \quad y(t_0) = y_0,$$

να παρουσιάζουν **άλματα ασυνέχειας** στο διάστημα που ορίζονται. Στην περίπτωση αυτή λύνουμε το πρόβλημα σε κάθε υποδιάστημα στο οποίο οι συντελεστές είναι συνεχείς και, στη συνέχεια, συναρμόζουμε τις επί μέρους λύσεις ώστε η λύση που προκύπτει να είναι συνεχής σε ολόκληρο το διάστημα.

Παράδειγμα

Να λυθεί το ΠΑΤ: $y' + y = r(t)$, $y(0) = 0$, με $r(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$.

Η r παρουσιάζει άλμα ασυνέχειας στο $t = 1$, οπότε λύνουμε την εξίσωση $y' + y = r(t)$ στα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, \infty)$.

Έστω y_I η λύση της εξίσωσης στο $(0, 1)$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} y_I' + y_I &= 1 \Rightarrow y_I' e^t + y_I e^t = e^t \Rightarrow (y_I e^t)' = e^t \Rightarrow \int (y_I e^t)' dt = \int e^t dt \\ &\Rightarrow y_I e^t = e^t + C_1 \Rightarrow y_I(t) = 1 + C_1 e^{-t}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη και έχουμε: $y_I(0) = 0 \Rightarrow 0 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = -1$.

Άρα: $y_I(t) = 1 - e^{-t}$, $0 \leq t < 1$.

Έστω y_r η λύση της εξίσωσης στο $(1, \infty)$. Τότε έχουμε

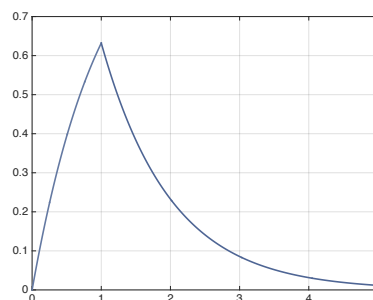
$$\begin{aligned} y_r' + y_r &= 0 \Rightarrow y_r' e^t + y_r e^t = 0 \Rightarrow (y_r e^t)' = 0 \Rightarrow \int (y_r e^t)' dt = 0 \\ &\Rightarrow y_r e^t = C_2 \Rightarrow y_r(t) = C_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Συναρμόζουμε τις λύσεις y_l και y_r στο $t = 1$, έτσι ώστε να προκύψει **συνεχής λύση στο διάστημα $(0, \infty)$** :

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} y_l(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} y_r(t) \Leftrightarrow 1 - e^{-1} = C_2 e^{-1} \Leftrightarrow C_2 = e - 1.$$

Έτσι η λύση του ΠΑΤ είναι:

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ (e - 1)e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$$



Η λύση είναι συνεχής στο $(0, \infty)$ αλλά (όπως μπορείτε εύκολα να ελέγξετε) **ΔΕΝ** είναι παραγωγίσιμη στο $t = 1$.

Ακριβείς Εξισώσεις και Ολοκληρωτικοί Παράγοντες

Υπενθύμιση: Αν ψ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών και $y = y(x)$ είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $(x, y(x))$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της ψ , τότε

$$\frac{d}{dx} \psi(x, y(x)) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (10)$$

Θεωρούμε τώρα μια ΣΔΕ πρώτης τάξης της μορφής

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0, \quad (11)$$

και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια διαφορίσιμη συνάρτηση ψ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N. \quad (12)$$

Τότε:

$$(11) : \quad 0 = M(x, y) + N(x, y)y' \stackrel{(12)}{=} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' \stackrel{(10)}{=} \frac{d}{dx} \psi(x, y(x)).$$

Δηλαδή καταλήξαμε ότι:

$$\frac{d}{dx}\psi(x, y(x)) = 0.$$

Επομένως, η σχέση

$$\psi(x, y(x)) = c,$$

ορίζει τις λύσεις της εξίσωσης (11) σε πεπλεγμένη μορφή.

Η διαφορική εξίσωση

$$M(x, y) + N(x, y) y' = 0$$

θα λέγεται **ακριβής (exact)** εάν υπάρχει συνάρτηση ψ τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N.$$

Στην περίπτωση αυτή, οι λύσεις ορίζονται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση

$$\psi(x, y(x)) = c. \quad (13)$$

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η εξίσωση: $x + 2y y' = 0$. Εδώ $M(x, y) = x$ και $N(x, y) = 2y$.

Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση ψ τέτοια ώστε $\frac{\partial \psi}{\partial x} = x$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y$, και θα προσπαθήσουμε να την βρούμε.

$$\psi_x = x \xRightarrow{\int dx} \psi(x, y) = \frac{x^2}{2} + g(y) \xRightarrow{\partial/\partial y} \psi_y = g'(y).$$

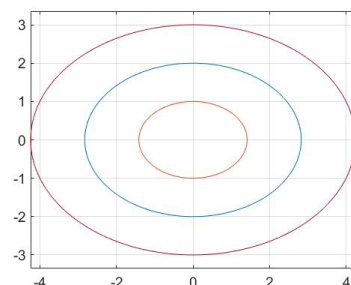
Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις για την ψ_y , βλέπουμε ότι:

$$g'(y) = 2y \xRightarrow{\int dy} g(y) = y^2 + C.$$

Άρα $\psi(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2 + C$, και οι **λύσεις** της εξίσωσής μας δίνονται από τη σχέση:

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = c,$$

που περιγράφει **ομόκεντρες ελλείψεις**.



Παράδειγμα 2

Θεωρήστε την εξίσωση: $2x + y + xy y' = 0$. Εδώ $M(x, y) = 2x + y$ και $N(x, y) = xy$.

Υποθέτουμε και πάλι ότι υπάρχει μια συνάρτηση ψ τέτοια ώστε $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = xy$, και ας προσπαθήσουμε να την βρούμε.

$$\psi_x = 2x + y \xRightarrow{\int dx} \psi(x, y) = x^2 + xy + g(y) \xRightarrow{\partial/\partial y} \psi_y = x + g'(y).$$

Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις για την ψ_y , βλέπουμε ότι:

$$x + g'(y) = xy \quad \text{😬}$$

Αυτό είναι αδύνατο. ΔΕΝ υπάρχει τρόπος να γράψουμε τη συνάρτηση xy ως το άθροισμα της x και μιας συνάρτησης του y !

Άρα η εξίσωση δεν είναι ακριβής.

Κριτήριο για το πότε μια ΔΕ είναι ακριβής

Θεώρημα

Έστω ότι οι συναρτήσεις M και N καθώς και οι πρώτες μερικές παράγωγοί τους είναι συνεχείς σε κάποιο ορθογώνιο $R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$. Τότε η διαφορική εξίσωση

$$M(x, y) + N(x, y) y' = 0 \quad (14)$$

είναι ακριβής στο R αν και μόνον αν

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad (15)$$

σε κάθε σημείο (x, y) του R .

Απόδειξη. “ $\Rightarrow$ ” Έστω ότι η (14) είναι ακριβής.

Τότε υπάρχει $\psi(x, y)$ τ.ω. $\psi_x = M$ και $\psi_y = N$. Επομένως $M_y = \psi_{xy}$ και $N_x = \psi_{yx}$. Όμως από την υπόθεσή μας έχουμε ότι M_y και N_x είναι συνεχείς, άρα και οι ψ_{xy} και ψ_{yx} είναι συνεχείς, επομένως έχουμε ότι $\psi_{xy} = \psi_{yx} \Rightarrow M_y = N_x$ και άρα ισχύει η (15).

“ $\Leftarrow$ ” Έστω τώρα ότι ισχύει η (15), δηλ. $M_y = N_x$. Θ.δ.ο. η (14) είναι ακριβής.

Συγκεκριμένα, θα κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $\psi(x, y)$ τ.ω. $\psi_x = M$ και $\psi_y = N$.

Ξεκινάμε από την $\psi_x(x, y) = M(x, y)$.

Σταθεροποιούμε το y , ολοκληρώνουμε ως προς x και έχουμε:

$$\psi(x, y) = Q(x, y) + g(y), \quad (16)$$

όπου Q είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση τ.ω. $\frac{\partial Q}{\partial x} = M$ και $g(y)$ είναι η «σταθερά» (ως προς x) που προκύπτει από την ολοκλήρωση.

(Π.χ., μπορούμε να πάρουμε $Q(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds$, όπου x_0 είναι ένα σταθεροποιημένο σημείο στο (α, β) .)

Παραγωγίζουμε την (16) ως προς y και έχουμε:

$$\begin{aligned} \psi_y(x, y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) + g'(y) = N(x, y) \\ \Rightarrow g'(y) &= N(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y). \end{aligned} \quad (17)$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της (17) είναι μια συνάρτηση του y , ενώ το δεξί μέλος της (φαινομενικά τουλάχιστον) είναι μια συνάρτηση των x και y . Θ.δ.ο. το δεξί μέλος της (17) είναι ανεξάρτητο του x .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(N(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \right) &= \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \right)}_{=M(x, y)} \\ &= \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \stackrel{(15)}{=} 0. \end{aligned}$$

Άρα το δεξί μέλος της (17) είναι συνάρτηση του y , οπότε ολοκληρώνουμε την (17) ως προς y , βρίσκουμε την $g(y)$ την αντικαθιστούμε στην (16), και βρίσκουμε την ψ που ζητούσαμε.

□

Παράδειγμα 3

Να λυθεί το ΠΑΤ: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x - 1}$, $y(0) = 1$.

Γράφουμε την εξίσωση ως: $(2x + y) + (x - 1)y' = 0$.

Εδώ $M(x, y) = 2x + y$ και $N(x, y) = x - 1$. Άρα $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$,
οπότε η εξίσωση είναι ακριβής.

Άρα υπάρχει μια συνάρτηση ψ τέτοια ώστε $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = x - 1$.

$$\psi_x = 2x + y \xRightarrow{\int dx} \psi(x, y) = x^2 + xy + g(y) \xRightarrow{\partial/\partial y} \psi_y = x + g'(y).$$

Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις για την ψ_y , βλέπουμε ότι:

$$x + g'(y) = x - 1 \Leftrightarrow g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = -y + C.$$

Άρα $\psi(x, y) = x^2 + xy - y + C$, και οι λύσεις της εξίσωσής μας δίνονται από τη σχέση:

$$x^2 + xy - y = c,$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$ και έχουμε:

$$0^2 + 0 \cdot 1 - 1 = c \Leftrightarrow c = -1.$$

Συνεπώς η λύση μας είναι:

$$x^2 + xy - y = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

Παράδειγμα 4

Να λυθεί η ΔΕ:

$$y^2 - 6xy + (3xy - 6x^2) y' = 0. \quad (18)$$

Εδώ $M(x, y) = y^2 - 6xy$ και $N(x, y) = 3xy - 6x^2$. Άρα

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y - 6x \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 3y - 12x,$$

οπότε η εξίσωση ΔΕΝ είναι ακριβής.

Παρόλα αυτά, ας προσπαθήσουμε να βρούμε μια συνάρτηση ψ τ.ω.
$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = y^2 - 6xy, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 3xy - 6x^2 \end{cases}.$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y^2 - 6xy \xrightarrow{\int dx} \psi(x, y) = xy^2 - 3x^2y + g(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 3xy - 6x^2 \xrightarrow{\int dy} \psi(x, y) = \frac{3}{2}xy^2 - 6x^2y + h(x)$$

$$\text{Άρα: } xy^2 - 3x^2y + g(y) = \frac{3}{2}xy^2 - 6x^2y + h(x) \Leftrightarrow 3x^2y + g(y) = \frac{1}{2}xy^2 + h(x). \quad (*)$$

ΔΕΝ υπάρχουν συναρτήσεις $g(y)$ και $h(x)$ που να ικανοποιούν την (*), άρα ΔΕΝ υπάρχει ψ τ.ω. $\psi_x = M, \psi_y = N$.



Πολλαπλασιάζουμε την (18) με μια συνάρτηση $\mu = \mu(x, y)$ και προ-
σπαθούμε να επιλέξουμε την μ έτσι ώστε η εξίσωση:

$$\underbrace{\mu(y^2 - 6xy)}_{\tilde{M}(x, y)} + \underbrace{\mu(3xy - 6x^2)}_{\tilde{N}(x, y)} y' = 0, \quad (19)$$

να είναι ακριβής.

Προφανώς οι λύσεις της (19) θα είναι λύσεις και της (18).

Η (19) θα είναι ακριβής αν

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} (\mu(y^2 - 6xy)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(3xy - 6x^2)) \\ &\Leftrightarrow \mu_y(y^2 - 6xy) + \mu(2y - 6x) = \mu_x(3xy - 6x^2) + \mu(3y - 12x) \\ &\Leftrightarrow \mu_y y(y - 6x) - \mu_x x(3y - 6x) - \mu(y - 6x) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Άρα αν μπορούμε να βρούμε μια μ που να είναι λύση της (20), και πολ/σουμε με αυτήν την εξίσωση (18), τότε θα καταλήξουμε στην ακριβή (πλέον) εξίσωση (19).

Γενικά, το να λύσει κανείς την (20) είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο και να λύσει την αρχική εξίσωση (18). Στην πράξη, λύσεις της (20) μπορούν να βρεθούν μόνο σε ειδικές περιπτώσεις.

Εδώ ας δοκιμάσουμε να βρούμε μια μ που να εξαρτάται μόνο από το y .

Δηλαδή: $\mu_x = 0$ και $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$.

$$\text{Άρα: } (20) \Rightarrow \frac{d\mu}{dy} y(y-6x) - \mu(y-6x) = 0 \stackrel{y \neq 6x}{\Rightarrow} \frac{d\mu}{dy} y - \mu = 0.$$

Μια λύση της τελευταίας εξίσωσης είναι η: $\mu(y) = y$.

Πολύζουμε την (18) επί y και έχουμε:

$$y^3 - 6xy^2 + (3xy^2 - 6x^2y)y' = 0. \quad \text{Ακριβής !!!}$$

Επομένως, αναζητούμε μια συνάρτηση ψ τέτοια ώστε
$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = y^3 - 6xy^2, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 3xy^2 - 6x^2y \end{cases}.$$

$$\psi_x = y^3 - 6xy^2 \stackrel{\int dx}{\Rightarrow} \psi(x, y) = xy^3 - 3x^2y^2 + g(y) \stackrel{\partial/\partial y}{\Rightarrow} \psi_y = 3xy^2 - 6x^2y + g'(y).$$

Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις για την ψ_y , βλέπουμε ότι:

$$3xy^2 - 6x^2y + g'(y) = 3xy^2 - 6x^2y \Leftrightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C.$$

Άρα $\psi(x, y) = xy^3 - 3x^2y^2 + C$, και οι λύσεις της (19) και, επομένως, και της (18), δίνονται από τη σχέση:

$$xy^3 - 3x^2y^2 = c.$$

Ακριβείς Εξισώσεις και Ολοκληρωτικοί Παράγοντες

Ορισμός

Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για τη διαφορική εξίσωση

$$M(x, y) + N(x, y) y' = 0$$

είναι μία μη μηδενική συνάρτηση $\mu = \mu(x, y)$ τέτοια ώστε η εξίσωση

$$\mu M(x, y) + \mu N(x, y) y' = 0$$

είναι ακριβής.

Είδαμε νωρίτερα ότι η δεύτερη εξίσωση είναι ακριβής $\Leftrightarrow (\mu M)_y = (\mu N)_x$. (*)

Η (*) είναι μια ΜΔΕ που μπορεί να έχει περισσότερες από μία λύσεις και, συνήθως, λύνεται τουλάχιστον τόσο δύσκολα όσο και η αρχική εξίσωση.

Στην πράξη, συχνά μπορούν να βρεθούν απλοί ολοκληρωτικοί παράγοντες όταν το μ είναι συνάρτηση μόνο μίας από τις μεταβλητές x και y , αντί και των δύο.

Παράδειγμα 5

Να λυθεί η ΔΕ: $3xy + y^2 + (x^2 + xy) y' = 0$.

Εδώ $M(x, y) = 3xy + y^2$ και $N(x, y) = x^2 + xy$. Άρα

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y,$$

οπότε η εξίσωση ΔΕΝ είναι ακριβής.

Αναζητούμε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα μ , δηλαδή μια λύση της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\mu (3xy + y^2)) &= \frac{\partial}{\partial x} (\mu (x^2 + xy)) \\ \Leftrightarrow \mu_y (3xy + y^2) + \mu (3x + 2y) &= \mu_x (x^2 + xy) + \mu (2x + y) \\ \Leftrightarrow \mu_x x (x + y) - \mu_y y (3x + y) - \mu (x + y) &= 0. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία εξίσωση αν θεωρήσουμε ότι μ εξαρτάται μόνο από το x (δηλ. $\mu_y = 0$), και ότι $x + y \neq 0$, απλοποιείται στην

$$\frac{d\mu}{dx} x - \mu = 0, \text{ της οποίας μια λύση είναι η } \mu(x) = x.$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x) = x$ και καταλήγουμε στην **ακριβή** εξίσωση:

$$3x^2y + xy^2 + (x^3 + x^2y)y' = 0.$$

Άρα υπάρχει συνάρτηση ψ τέτοια ώστε
$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 3x^2y + xy^2, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = x^3 + x^2y \end{cases}.$$

$$\psi_x = 3x^2y + xy^2 \xRightarrow{\int dx} \psi(x, y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y) \xRightarrow{\partial/\partial y} \psi_y = x^3 + x^2y + g'(y).$$

Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις για την ψ_y , βλέπουμε ότι:

$$x^3 + x^2y + g'(y) = x^3 + x^2y \Leftrightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C.$$

Άρα $\psi(x, y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + C$, και οι **λύσεις** της (19) και, επομένως, και της (18), δίνονται από τη σχέση:

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c.$$

Άσκηση

Επιβεβαιώστε ότι ένας άλλος ολοκληρωτικός παράγοντας για την εξίσωση του Παραδείγματος 5, είναι η συνάρτηση

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy(2x + y)}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ολοκληρωτικό παράγοντα καταλήγουμε στην ίδια λύση (**πολύ πιο δύσκολα!**).

Αντικατάσταση

Η εξίσωση $y' = (x - y + 1)^2$ δεν είναι ούτε γραμμική ούτε χωριζομένων μεταβλητών. Τι μπορούμε να κάνουμε για να την λύσουμε;

Δοκιμάζουμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητών έτσι ώστε η εξίσωση στις νέες μεταβλητές να είναι απλούστερη.

Στην περίπτωση μας δοκιμάζουμε

$$v = x - y + 1,$$

όπου η v είναι μια συνάρτηση του x . Άρα $v' = (x - y + 1)' = 1 - y' \Leftrightarrow y' = 1 - v'$.

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε:

$$1 - v' = v^2 \Leftrightarrow v' = 1 - v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = 1 - v^2 \quad (\text{Χωριζομένων μεταβλητών})$$

Παρατηρούμε ότι τόσο η $v = 1$ όσο και η $v = -1$ είναι λύσεις.

Αν $1 - v^2 \neq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 - v^2} dv &= \int 1 dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{2} \frac{1}{1 + v} dv + \int \frac{1}{2} \frac{1}{1 - v} dv = x + C \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{2} \frac{1}{v + 1} dv - \int \frac{1}{2} \frac{1}{v - 1} dv &= x + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\ln |v + 1| - \ln |v - 1|) = x + C \\ \Leftrightarrow \ln \left| \frac{v + 1}{v - 1} \right| &= 2x + 2C \Leftrightarrow \left| \frac{v + 1}{v - 1} \right| = e^{2x + 2C} \Rightarrow \frac{v + 1}{v - 1} = c e^{2x}. \end{aligned}$$

Γυρνώντας στην αρχική μεταβλητή μέσω της $v = x - y + 1$ έχουμε:

$$\frac{v + 1}{v - 1} = c e^{2x} \Rightarrow \frac{x - y + 2}{x - y} = c e^{2x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y = \frac{c x e^{2x} - x - 2}{c e^{2x} - 1}.$$

Ανάλογα, η λύση $v = 1$, δίνει $y = x$ και η λύση $v = -1$, δίνει $y = x + 2$.

Στις διαφορικές εξισώσεις πρέπει συχνά να «μαντέψουμε» την κατάλληλη αντικατάσταση. Πολλές διαφορετικές αντικαταστάσεις μπορεί να λειτουργήσουν. Υπάρχουν κάποια γενικά μοτίβα που θα πρέπει να αναζητήσουμε. Μερικά από αυτά συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Όταν βλέπουμε	Δοκιμάζουμε την αντικατάσταση
yy'	$v = y^2$
$y^2 y'$	$v = y^3$
$(\cos y)y'$	$v = \sin y$
$(\sin y)y'$	$v = \cos y$
$e^y y'$	$v = e^y$

Αν μια αντικατάσταση δεν λειτουργεί (δηλαδή δεν κάνει την εξίσωση απλούστερη), τότε πρέπει να δοκιμάσουμε μια άλλη.

Στη συνέχεια, θα δούμε ορισμένες κατηγορίες εξισώσεων όπου υπάρχει ένας γενικός κανόνας αντικατάστασης που λειτουργεί πάντα.

Ομογενείς εξισώσεις

Ορισμός

Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y' = f(x, y) \quad (21)$$

λέγεται **ομογενής** αν η συνάρτηση f εξαρτάται μόνο από τον λόγο y/x ή x/y , ισχύει δηλαδή

$$f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right). \quad (22)$$

Αν η (21) είναι ομογενής κάνουμε την **αλλαγή μεταβλητής**:

$$y = xv,$$

όπου $v = v(x)$ είναι μία άγνωστη συνάρτηση. Αυτή η αλλαγή μεταβλητής μετασχηματίζει την ομογενή εξίσωση σε μία εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση

$$y' = \frac{y^2 - xy}{x^2}. \quad (23)$$

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x},$$

άρα είναι ομογενής, οπότε κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής: $y = xv$ και έχουμε:

$$y' = (xv)' = v + xv', \quad \text{όπου } v' = \frac{dv}{dx}.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και καταλήγουμε στην:

$$v + xv' = v^2 - v \Leftrightarrow xv' = v(v - 2). \quad (24)$$

Παρατηρούμε ότι οι $v = 0$ και $v = 2$ είναι προφανείς λύσεις της (24) και αντιστοιχούν στις $y = 0$ και $y = 2x$ οι οποίες είναι λύσεις της (23). Αν $v \neq 0, 2$, η (24) γίνεται

$$\frac{v'}{v(v-2)} = \frac{1}{x}. \quad (\text{Χωριζομένων μεταβλητών})$$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{v(v-2)} dv &= \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{v-2} - \frac{1}{v} \right) dv = \ln|x| + C \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\ln|v-2| - \ln|v|) &= \ln|x| + C \Leftrightarrow \ln \left| \frac{v-2}{v} \right| = 2 \ln|x| + 2C \\ \Leftrightarrow \left| \frac{v-2}{v} \right| &= c x^2 \Rightarrow \frac{v-2}{v} = c x^2 \Rightarrow v = \frac{2}{1 - c x^2} \\ \Rightarrow \frac{y}{x} &= \frac{2}{1 - c x^2} \Rightarrow y = \frac{2x}{1 - c x^2}. \end{aligned}$$

Επομένως μια οικογένεια λύσεων της (23) είναι η

$$y = \frac{2x}{1 - c x^2}. \quad (25)$$

Παρατηρήστε ότι η λύση $y = 2x$ προκύπτει από την (25) για $c = 0$, ενώ η $y = 0$ δεν περιέχεται στην οικογένεια λύσεων (25).

Εξισώσεις Bernoulli

Ορισμός

Οι εξισώσεις Bernoulli είναι της μορφής

$$y' + p(t)y = q(t)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

Παρατηρήστε ότι αν $\alpha = 0, 1$, τότε η (26) είναι μια γραμμική εξίσωση, η οποία για $\alpha = 1$ είναι, επιπλέον, χωριζομένων μεταβλητών. Επίσης, για $\alpha > 0$ η $y = 0$ είναι μια λύση της (26).

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $\alpha \neq 0, 1$ και $y \neq 0$.

Για τις εξισώσεις Bernoulli κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$v = y^{1-\alpha}, \quad (27)$$

όπου v είναι μια συνάρτηση του t .

Τώρα

$$(27) \Rightarrow v' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y' \Rightarrow y^{-\alpha}y' = \frac{1}{1 - \alpha}v'.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} (26) &\Leftrightarrow y^{-\alpha}y' + p(t)y^{1-\alpha} = q(t) \Rightarrow \frac{1}{1 - \alpha}v' + p(t)v = q(t) \\ &\Rightarrow v' + (1 - \alpha)p(t)v = (1 - \alpha)q(t). \end{aligned} \quad (28)$$

Άρα μέσω της αντικατάστασης (27), μια εξίσωση Bernoulli (26) ανάγεται σε μια **γραμμική εξίσωση** της μορφής (28).

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση: $t^2 y' + 2ty - y^3 = 0$, $t > 0$.

Γράφουμε τη δοσμένη εξίσωση στη μορφή

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{1}{t^2}y^3,$$

και βλέπουμε ότι είναι μια εξίσωση Bernoulli με $\alpha = 3$, και ότι η $y = 0$ είναι μια λύση της. Έστω $y \neq 0$. Τότε

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{1}{t^2}y^3 \Rightarrow y^{-3}y' + \frac{2}{t}y^{-2} = \frac{1}{t^2}.$$

Αν θέσουμε $v = y^{1-3} = y^{-2}$, οπότε $v' = -2y^{-3}y' \Leftrightarrow -\frac{1}{2}v' = y^{-3}y'$, καταλήγουμε στη γραμμική εξίσωση

$$-\frac{1}{2}v' + \frac{2}{t}v = \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow v' - \frac{4}{t}v = -\frac{2}{t^2}, \quad t > 0.$$

Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για τη γραμμική αυτή εξίσωση είναι ο

$$\mu(t) = e^{\int (-\frac{4}{t})dt} \stackrel{t \geq 0}{=} e^{-4 \ln t} = e^{-\ln t^4} = \frac{1}{t^4}.$$

Επομένως,

$$v \frac{1}{t^4} = \int \left(-\frac{2}{t^2}\right) \frac{1}{t^4} dt = - \int \frac{2}{t^6} dt = \frac{2}{5t^5} + C \Rightarrow v = \frac{2}{5t} + Ct^4,$$

και άρα η γενική λύση είναι

$$v(t) = \frac{2 + 5Ct^5}{5t}, \quad t > 0.$$

Επιστρέφοντας στην αρχική μεταβλητή μέσω της $v = 1/y^2$, έχουμε

$$y^2 = \frac{5t}{2 + 5Ct^5} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{5t}{2 + 5Ct^5}}.$$

Εξισώσεις Riccati

Μια ΔΕ της μορφής

$$y' = p(t)y^2 + q(t)y + r(t), \quad (29)$$

λέγεται **εξίσωση Riccati**.

Η εξίσωση είναι μη γραμμική και, επιπλέον, δεν υπάρχει τύπος για τη λύση της. Αν όμως γνωρίζουμε μια **ειδική λύση της**, έστω y_1 , τότε η αλλαγή μεταβλητής

$$y = y_1 + \frac{1}{v}, \quad (30)$$

μετασχηματίζει την εξίσωση Riccati (29) σε μια γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης για την άγνωστη συνάρτηση v .

Άσκηση: Ν.δ.ο. αν y_1 είναι μια λύση της (29), τότε η αλλαγή μεταβλητής $y = y_1 + v$ μετασχηματίζει την εξίσωση Riccati (29) σε μια εξίσωση Bernoulli για την άγνωστη συνάρτηση v .

Έστω y_1 μια ειδική λύση της (29), δηλαδή: $y_1' - p(t)y_1^2 - q(t)y_1 - r(t) = 0$.

Αντικαθιστούμε στην (29) την

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \Rightarrow y' = y_1' - \frac{1}{v^2} v',$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned} y_1' - \frac{1}{v^2} v' &= p(t) \left(y_1 + \frac{1}{v} \right)^2 + q(t) \left(y_1 + \frac{1}{v} \right) + r(t) \\ \Rightarrow y_1' - \frac{1}{v^2} v' &= p(t)y_1^2 + 2p(t)y_1 \frac{1}{v} + p(t) \frac{1}{v^2} + q(t)y_1 + q(t) \frac{1}{v} + r(t) \\ \Rightarrow \underbrace{y_1' - p(t)y_1^2 - q(t)y_1 - r(t)}_{=0} - \frac{1}{v^2} v' &= 2p(t)y_1 \frac{1}{v} + p(t) \frac{1}{v^2} + q(t) \frac{1}{v} \\ \Rightarrow -\frac{1}{v^2} v' &= \left(2p(t)y_1 + q(t) \right) \frac{1}{v} + p(t) \frac{1}{v^2} \\ \Rightarrow v' &= - \left(2p(t)y_1 + q(t) \right) v - p(t) \\ \Leftrightarrow v' + \left(2p(t)y_1 + q(t) \right) v &= -p(t). \quad (\text{Γραμμική 1ης τάξης}) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η ΔΕ $y' = \frac{1}{t}y^2 + \frac{1}{t}y - \frac{2}{t}$, $t > 0$.

Αν γράψουμε την εξίσωση ως: $y' = \frac{1}{t}(y^2 + y - 2) = \frac{1}{t}(y - 1)(y + 2)$, εύκολα βλέπουμε ότι οι σταθερές $y = 1$ και $y = -2$ είναι λύσεις της εξίσωσης.

Θεωρούμε ως μια ειδική λύση την $y_1 = 1$ και κάνουμε την αντικατάσταση

$$y = 1 + \frac{1}{v} \Rightarrow y' = -\frac{1}{v^2}v'.$$

Αντικαθιστούμε στην αρχική εξίσωση και έχουμε:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{v^2}v' &= \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{v}\right)^2 + \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{v}\right) - \frac{2}{t} \\ \Rightarrow -\frac{1}{v^2}v' &= \frac{1}{t}\left(1 + \frac{2}{v} + \frac{1}{v^2} + 1 + \frac{1}{v} - 2\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{3}{v} + \frac{1}{v^2}\right) \\ \Rightarrow v' &= -\frac{1}{t}(3v + 1) \Rightarrow v' + \frac{3}{t}v = -\frac{1}{t}. \quad (\text{Γραμμική 1ης τάξης}) \end{aligned}$$

Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για τη γραμμική αυτή εξίσωση είναι ο

$$\mu(t) = e^{\int (\frac{3}{t})dt} \stackrel{t \geq 0}{=} e^{3 \ln t} = e^{\ln t^3} = t^3.$$

Επομένως,

$$v t^3 = \int t^3 \left(-\frac{1}{t}\right) dt = -\frac{t^3}{3} + C,$$

και άρα η γενική λύση είναι

$$v(t) = -\frac{1}{3} + \frac{C}{t^3} = \frac{c - t^3}{3t^3}, \quad t > 0.$$

Επιστρέφοντας στην αρχική μεταβλητή μέσω της $y = 1 + \frac{1}{v}$, έχουμε

$$y = 1 + \frac{3t^3}{c - t^3} \Rightarrow y = \frac{c + 2t^3}{c - t^3}.$$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η ΔΕ $y' = y^2 - 2ty + t^2 + 1$.

Η εξίσωση αυτή γράφεται στη μορφή: $y' - 1 = (y - t)^2 \Leftrightarrow (y - t)' = (y - t)^2$.

Επομένως η $y_1 = t$ είναι μια λύση της εξίσωσης και κάνουμε την αντικατάσταση

$$y = t + \frac{1}{v} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{v^2}v'.$$

Αντικαθιστούμε στην αρχική εξίσωση και έχουμε:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{v^2}v' &= \left(t + \frac{1}{v}\right)^2 - 2t\left(t + \frac{1}{v}\right) + t^2 + 1 \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{v^2}v' &= t^2 + \frac{1}{v^2} + 2t\frac{1}{v} - 2t^2 - 2t\frac{1}{v} + t^2 + 1 \\ \Rightarrow -\frac{1}{v^2}v' &= \frac{1}{v^2} \Rightarrow v' = -1 \Rightarrow v = -t + C. \end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην αρχική μεταβλητή μέσω της $y = t + \frac{1}{v}$, έχουμε

$$y = t + \frac{1}{C - t} \Rightarrow y = \frac{1 + Ct - t^2}{C - t}.$$

Διαφορές μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών ΔΕ

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάποιες σημαντικές διαφορές μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών ΔΕ.

Υπαρξη και μοναδικότητα λύσεων

Υπάρχουν δύο θεμελιώδη ερωτήματα για το ΠΑΤ: $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

- ❶ Υπάρχει λύση;
- ❷ Αν υπάρχει λύση, είναι μοναδική;

Τα ερωτήματα αυτά είναι σημαντικά ακόμη και για τους μη μαθηματικούς.

Αν συναντήσετε ένα ΠΑΤ κατά τη διάρκεια της διερεύνησης κάποιου φυσικού προβλήματος, είναι καλό να γνωρίζετε ότι έχει μια λύση πριν ξοδέψετε πολύ χρόνο και προσπάθεια για να προσπαθήσετε να την βρείτε.

Επιπλέον, αν καταφέρετε να βρείτε μια λύση, ίσως σας ενδιαφέρει να γνωρίζετε αν πρέπει να αναζητήσετε και άλλες πιθανές λύσεις ή αν μπορείτε να είστε σίγουροι ότι δεν υπάρχουν άλλες λύσεις.

Θεώρημα 1

Αν οι συναρτήσεις p και r είναι συνεχείς σε ένα ανοικτό διάστημα $I : \alpha < t < \beta$ που περιέχει το σημείο $t = t_0$, τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση y που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$y' + p(t)y = r(t) \quad (31)$$

για κάθε t στο I , και που ικανοποιεί επίσης την αρχική συνθήκη

$$y(t_0) = y_0, \quad (32)$$

όπου y_0 είναι μια αυθαίρετη προδιαγεγραμμένη αρχική τιμή.

Σκιαγράφηση απόδειξης

Έχουμε ήδη δει ότι μπορούμε να βρούμε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu = e^{\int p(t) dt},$$

έτσι ώστε να καταλήξουμε στην έκφραση

$$\mu y = \int \mu(t)r(t) dt. \quad (33)$$

Για την ακρίβεια είδαμε ότι αν η (31) έχει λύση, τότε αυτή πρέπει να δίνεται από την (33). Ας δούμε αυτή την απόδειξη προσεκτικότερα.

Αν p είναι συνεχής στο (α, β) , τότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(t) = e^{\int p(t) dt}$ ορίζεται πάντα στο (α, β) και είναι μια μη μηδενική παραγωγίσιμη συνάρτηση. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την (31) επί μ :

$$y' \mu(t) + \mu(t)p(t)y = \mu(t)r(t) \Rightarrow (\mu(t)y)' = \mu(t)r(t). \quad (34)$$

Επειδή μ, r συνεχείς $\Rightarrow \mu r$ είναι ολοκληρώσιμη και η (33) προκύπτει ολοκληρώνοντας την (34). Άρα η y , όπως εκφράζεται από την (33), υπάρχει και είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το (α, β) .

Ας θεωρήσουμε τώρα τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s) ds}, \quad (35)$$

όπου ως κάτω όριο ολοκλήρωσης πήραμε το **αρχικό σημείο** t_0 . Τότε, προφανώς, $\mu(t_0) = 1$. Άρα για τον πολ/κο παράγοντα (35) έχουμε:

$$\mu(t)y(t) = \int_{t_0}^t \mu(s)r(s) ds + c \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int_{t_0}^t \mu(s)r(s) ds + c \right).$$

Αυτή είναι η γενική λύση της (31). Αν όμως επιλέξουμε $c = y_0$, τότε η

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int_{t_0}^t \mu(s)r(s) ds + y_0 \right) \quad (36)$$

είναι η μοναδική εκείνη συνάρτηση y που ικανοποιεί την (31) στο (α, β) και, επιπλέον, $y(t_0) = y_0$. □

Θεώρημα 2

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και $\partial f/\partial y$ είναι συνεχείς σε κάποιο ορθογώνιο $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ που περιέχει το σημείο (t_0, y_0) . Τότε, σε κάποιο διάστημα $t_0 - h < t < t_0 + h$ που περιέχεται στο $\alpha < t < \beta$, υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (37)$$

Παρατηρήσεις

- Παρατηρήστε ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2 ανάγονται σε εκείνες του Θεωρήματος 1 εάν η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική. Στην περίπτωση αυτή

$$f(t, y) = -p(t)y + r(t) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = -p(t),$$

οπότε η συνέχεια των f και $\partial f/\partial y$ είναι ισοδύναμη με τη συνέχεια των p και r .

- Οι συνθήκες που αναφέρονται στο Θεώρημα 2 είναι ικανές για να εγγυηθούν την ύπαρξη μοναδικής λύσης του ΠΑΤ (37) σε κάποιο διάστημα $t_0 - h < t < t_0 + h$, αλλά δεν είναι αναγκαίες. Δηλαδή, το συμπέρασμα παραμένει αληθές υπό ελαφρώς ασθενέστερες υποθέσεις για τη συνάρτηση f . Στην πραγματικότητα, η ύπαρξη λύσης (αλλά όχι η μοναδικότητά της) απαιτεί τη συνέχεια της f και μόνο.
- Μια σημαντική γεωμετρική συνέπεια των Θεωρημάτων 1 και 2, στο μέρος της μοναδικότητας της λύσης, είναι ότι οι γραφικές παραστάσεις δύο λύσεων δεν μπορούν να τέμνονται. Διαφορετικά, θα υπήρχαν δύο λύσεις που θα ικανοποιούσαν την αρχική συνθήκη που αντιστοιχεί στο σημείο τομής, σε αντίθεση με το Θεώρημα 1 ή 2.

Παράδειγμα 1

Θεωρήστε το ΠΑΤ: $ty' + 2y = 4t^2$, $y(1) = 2$.

$ty' + 2y = 4t^2 \Rightarrow y' + \frac{2}{t}y = 4t$. Η ΔΕ είναι γραμμική 1ης τάξης.

Εδώ $p(t) = \frac{2}{t}$ και $r(t) = 4t$. Η $r(t)$ είναι συνεχής παντού, ενώ η $p(t)$ είναι συνεχής για $t < 0$ ή για $t > 0$.

Το αρχικό σημείο $t = 1$ περιέχεται στο διάστημα $(0, \infty)$, άρα το Θεώρημα 1 εξασφαλίζει ότι το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, \infty)$. Για να την βρούμε εργαζόμαστε ως συνήθως.

Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = t^2$.

Άρα από την (33) $\Rightarrow t^2 y = \int t^2 4t dt = t^4 + c \Rightarrow y(t) = t^2 + \frac{c}{t^2}$.

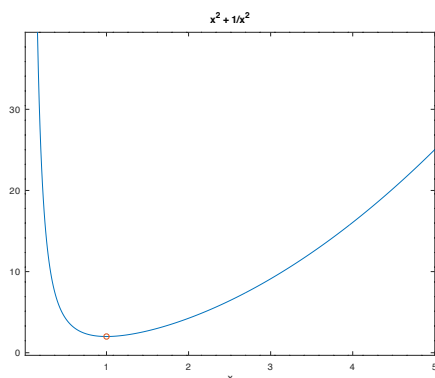
Από την αρχική συνθήκη: $y(1) = 2 \Rightarrow c = 1$, επομένως η μοναδική λύση του ΠΑΤ είναι:

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0.$$

Αν είχαμε την αρχική συνθήκη $y(-1) = 2$, τότε το Θεώρημα 1 εξασφαλίζει ότι το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση στο $(-\infty, 0)$. Η λύση είναι και πάλι $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$, αλλά τώρα για $t < 0$.

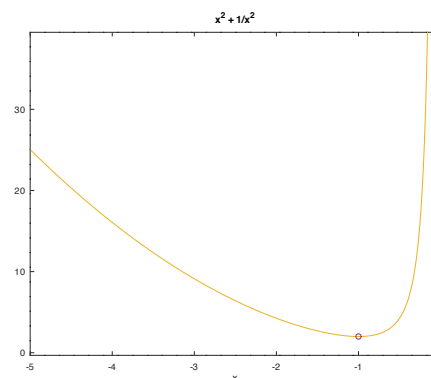
Λύση του ΠΑΤ

$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2, \\ y(1) = 2 \end{cases}$$



Λύση του ΠΑΤ

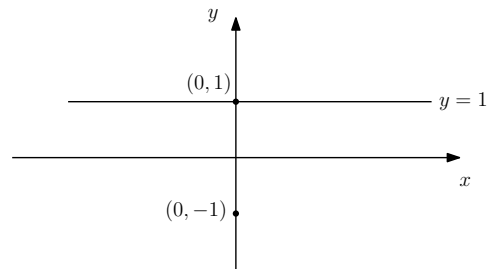
$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2, \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$



Παράδειγμα 2

Θεωρήστε το ΠΑΤ: $y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$, $y(0) = -1$. (Μη γραμμική ΔΕ)

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)^2}$$



$f, \partial f / \partial y$, συνεχείς εκτός της ευθείας $y = 1$.

Άρα μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα ορθογώνιο γύρω από το σημείο $(0, -1)$ στο οποίο τόσο η f όσο και η $\partial f / \partial y$ να είναι συνεχείς.

Άρα το Θεώρημα 2 εξασφαλίζει ότι το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση σε κάποιο διάστημα με κέντρο το σημείο $x = 0$. Αν και το παραπάνω ορθογώνιο μπορεί να επεκταθεί απείρως στη διεύθυνση του x προς το $\pm\infty$, αυτό δεν σημαίνει ότι υπάρχει λύση για κάθε x .

Η μη γραμμική αυτή ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών. Άρα

$$2 \int (y - 1) dy = \int (3x^2 + 4x + 2) dx \Rightarrow y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c.$$

Από την αρχική συνθήκη: $y(0) = -1 \Rightarrow c = 3$, επομένως

$$y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x + 3) = 0.$$

Λύνουμε ως προς y και βρίσκουμε δύο λύσεις:

$$y(x) = 1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \quad \text{ή} \quad y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}.$$

Η λύση που επαληθεύει την αρχική συνθήκη είναι η $y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$.

Για να βρούμε το διάστημα ύπαρξης της λύσης πρέπει να βρούμε τα διαστήματα εκείνα για τα οποία

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x^2(x + 2) + 2(x + 2) > 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow x > -2.$$

Άρα το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση: $y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$ για $x > -2$.

Ας αλλάξουμε τώρα την αρχική συνθήκη σε $y(0) = 1$.

Τώρα το σημείο $(0, 1)$ ανήκει στην ευθεία $y = 1$, άρα **δεν υπάρχει κανένα ορθογώνιο που να περιέχει το $(0, 1)$ και στο οποίο οι f και $\partial f / \partial y$ να είναι συνεχείς**. Άρα το Θεώρημα 2 δεν μας δίνει πληροφορίες για ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του νέου ΠΑΤ.

Κάνοντας όπως πριν χωρισμό μεταβλητών καταλήγουμε στην

$y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x + c) = 0$. Από την αρχική συνθήκη: $y(0) = 1 \Rightarrow c = -1$, άρα

$$y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x - 1) = 0.$$

Λύνουμε ως προς y και βρίσκουμε δύο λύσεις: $y(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x} \\ 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x} \end{cases}$

Και οι δύο αυτές λύσεις ικανοποιούν τη ΔΕ και την αρχική συνθήκη!

Για να βρούμε το πεδίο ορσ. των λύσεων πρέπει να βρούμε τα διαστήματα εκείνα για τα οποία

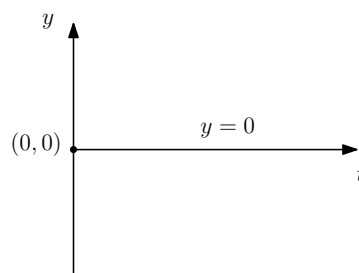
$$x^3 + 2x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 2) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Άρα το νέο ΠΑΤ έχει δύο λύσεις στο διάστημα $(0, \infty)$.

Παράδειγμα 3

Θεωρήστε το ΠΑΤ: $y' = y^{1/3}$, $t \geq 0$, $y(0) = 0$. **(Μη γραμμική ΔΕ)**

$$f(t, y) = y^{1/3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \frac{1}{3}y^{-2/3}$$



Η f είναι συνεχής στο $[0, \infty) \times \mathbb{R}$, ενώ η $\partial f / \partial y$ δεν ορίζεται για $y = 0$ και άρα δεν είναι συνεχής στην ευθεία $y = 0$.

Άρα το Θεώρημα 2 δεν εφαρμόζεται στην περίπτωση αυτή.

Η μη γραμμική αυτή ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών. Άρα

$$\int y^{-1/3} dy = \int dt \Rightarrow \frac{3}{2}y^{2/3} = t + c \Rightarrow y^{2/3} = \frac{2}{3}(t + c).$$

Από την αρχική συνθήκη: $y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$, επομένως βρίσκουμε τη λύση του ΠΑΤ

$$y = \phi_1(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Είναι πολύ εύκολο να ελέγξουμε ότι και η

$$y = \phi_2(t) = -\left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

είναι λύση του ΠΑΤ.

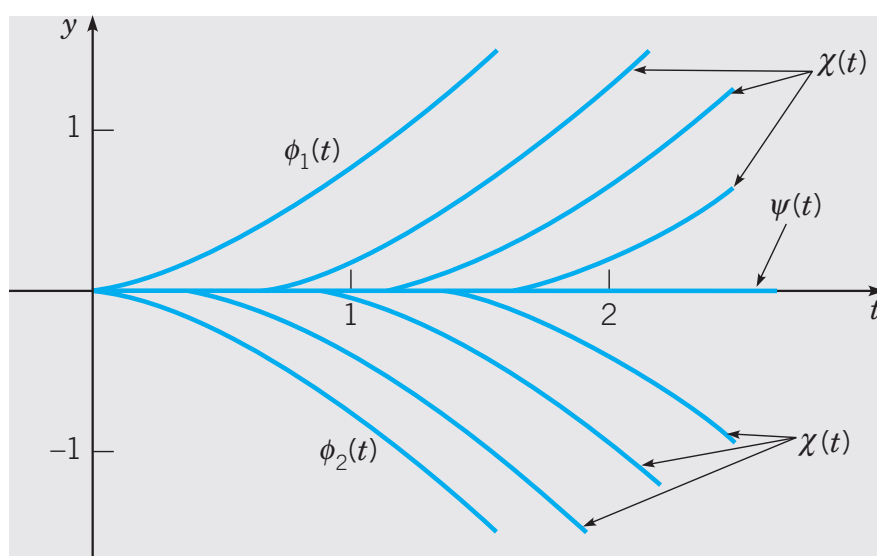
Επίσης, μια άλλη λύση του ΠΑΤ είναι η $y = \psi(t) = 0, \quad t \geq 0$.

Αλλά και για οποιοδήποτε αυθαίρετο $t_0 > 0$ οι συναρτήσεις

$$y = \chi(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < t_0 \\ \pm \left[\frac{2}{3} (t - t_0) \right]^{\frac{3}{2}}, & t \geq t_0 \end{cases}$$

είναι συνεχείς, παραγωγίσιμες (στο $t = t_0$) και είναι λύσεις του ΠΑΤ. (Άσκηση)

Άρα το ΠΑΤ έχει **άπειρες λύσεις**.



Αυτό δεν έρχεται σε αντίφαση με το Θεώρημα 2, που σε αυτή την περίπτωση δεν εφαρμόζεται.

Παράδειγμα 4

Θεωρήστε το ΠΑΤ : $y' = y^2$, $y(0) = 1$ (μη γραμμική ΔΕ) και βρείτε το διάστημα στο οποίο υπάρχει λύση.

Εδώ $f(t, y) = y^2$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 2y$ που είναι συνεχείς παντού (στο $\mathbb{R}^2$).

Η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών. Άρα

$$\int y^{-2} dy = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c \Rightarrow y = -\frac{1}{t + c}.$$

Από την αρχική συνθήκη: $y(0) = 1 \Rightarrow c = -1$, άρα

$$y(t) = \frac{1}{1 - t}.$$

Η λύση απειρίζεται καθώς $t \rightarrow 1$, επομένως η λύση υπάρχει στο διάστημα $(-\infty, 1)$ (που περιέχει το αρχικό σημείο $t_0 = 0$).

Αν τώρα αλλάξουμε την αρχική συνθήκη σε $y(0) = y_0 \neq 0$, έχουμε ότι η σταθερά c που προκύπτει από την ολοκλήρωση είναι ίση με $c = -\frac{1}{y_0}$.

Άρα η λύση του νέου ΠΑΤ είναι

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t},$$

και απειρίζεται καθώς $t \rightarrow \frac{1}{y_0}$. Συνεπώς

- Αν $y_0 > 0$ η λύση υπάρχει στο διάστημα $(-\infty, \frac{1}{y_0})$ (που περιέχει το $t_0 = 0$).
- Αν $y_0 < 0$ η λύση υπάρχει στο διάστημα $(\frac{1}{y_0}, \infty)$ (που περιέχει το $t_0 = 0$).

Βλέπουμε ότι στα μη γραμμικά προβλήματα οι ιδιομορφίες (ασυνέχειες) στη λύση εξαρτώνται με ουσιαστικό τρόπο τόσο από τις αρχικές συνθήκες όσο και από τη ΔΕ.

Η έννοια της γενικής λύσης

Οι γραμμικές και οι μη γραμμικές εξισώσεις διαφέρουν και ως προς την έννοια της γενικής λύσης.

Για μια **γραμμική εξίσωση** πρώτης τάξης είναι δυνατόν να βρούμε μια λύση που περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά. Όλες οι πιθανές λύσεις προκύπτουν καθορίζοντας τιμές για τη σταθερά αυτή.

Για **μη γραμμικές εξισώσεις** αυτό μπορεί να μην ισχύει. Ακόμη και αν μπορεί να βρεθεί μια λύση που περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά, μπορεί να υπάρχουν άλλες λύσεις που δεν προκύπτουν δίνοντας τιμές σε αυτή τη σταθερά.

Επομένως, θα χρησιμοποιούμε τον όρο «**γενική λύση**» μόνο όταν αναφερόμαστε σε γραμμικές εξισώσεις.

Παράδειγμα

Θεωρήστε τη μη γραμμική εξίσωση $y' = y^2$.

Η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών και είδαμε στο Παράδειγμα 4 ότι η

$$y = -\frac{1}{t + c},$$

είναι λύση για οποιαδήποτε τιμή της αυθαίρετης σταθεράς c .

Παρόλα αυτά δεν προκύπτουν όλες οι λύσεις για διάφορες τιμές της σταθεράς c . Π.χ. η λύση $y = 0$ δεν προκύπτει από καμία επιλογή της c στον παραπάνω τύπο.

Η γραμμική εξίσωση $y' + p(t)y = r(t)$ έχει αρκετές ωραίες ιδιότητες που μπορούν να συνοψιστούν στις ακόλουθες προτάσεις:

- ❶ Υποθέτοντας ότι οι συντελεστές είναι συνεχείς, υπάρχει μια γενική λύση, που περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά, η οποία περιλαμβάνει όλες τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Μια συγκεκριμένη λύση που ικανοποιεί μια δεδομένη αρχική συνθήκη μπορεί να βρεθεί με την επιλογή της κατάλληλης τιμής για την αυθαίρετη σταθερά.
- ❷ Υπάρχει μια αναλυτική έκφραση για τη λύση, βλ. εξίσωση (9).
- ❸ Τα πιθανά σημεία ασυνέχειας, ή ιδιομορφίες, της λύσης μπορούν να προσδιοριστούν (χωρίς να λυθεί το πρόβλημα) απλώς με την εύρεση των σημείων ασυνέχειας των συντελεστών. Έτσι, αν οι συντελεστές είναι συνεχείς για όλα τα t , τότε και η λύση υπάρχει και είναι διαφορίσιμη για όλα τα t .

Τίποτα από τα παραπάνω δεν ισχύει, εν γένει, για τις **μη γραμμικές εξισώσεις**.

Αν και μια μη γραμμική εξίσωση μπορεί κάλλιστα να έχει μια λύση που περιλαμβάνει μια αυθαίρετη σταθερά, μπορεί επίσης να υπάρχουν και άλλες λύσεις.

Δεν υπάρχει γενικός τύπος για τις λύσεις μη γραμμικών εξισώσεων.

Εάν μπορούμε να ολοκληρώσουμε μια μη γραμμική εξίσωση, είναι πιθανό να βρούμε μια εξίσωση που ορίζει με πεπλεγμένο τρόπο τις λύσεις.

Τέλος, οι ιδιομορφίες των λύσεων των μη γραμμικών εξισώσεων μπορούν συνήθως να βρεθούν μόνο με την επίλυση της εξίσωσης και την διερεύνηση της λύσης. Είναι πιθανόν οι ιδιομορφίες να εξαρτώνται τόσο από την αρχική συνθήκη όσο και από τη διαφορική εξίσωση.