

Διαφορικές Εξισώσεις - Εισαγωγή

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Δημήτρης Μητσούδης

Εισαγωγή

Πολλές από τις αρχές ή τους νόμους της φυσικής είναι **σχέσεις** μεταξύ **ρυθμών μεταβολής**. Όταν εκφραστούν με μαθηματικούς όρους, οι σχέσεις είναι **εξισώσεις** και οι ρυθμοί μεταβολής είναι **παράγωγοι**. Οι εξισώσεις που περιέχουν παραγώγους λέγονται **διαφορικές εξισώσεις**.

Επομένως, για να μελετήσουμε προβλήματα που αφορούν, πχ., την κίνηση των ρευστών, τη διάδοση κυμάτων, την εξέλιξη πληθυσμών, κ.ά., είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε κάτι για διαφορικές εξισώσεις.

Μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει κάποια φυσική διαδικασία συχνά ονομάζεται **μαθηματικό μοντέλο** (ή πρότυπο) της διαδικασίας.

Μια **Διαφορική Εξίσωση (ΔΕ)** είναι μια εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι **συνάρτηση** και περιέχει παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης (που είναι επίσης άγνωστες).

Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι μια ΔΕ συνδέει μια άγνωστη συνάρτηση με κάποιες από τις παραγώγους της.

Είδη Διαφορικών Εξισώσεων

- **Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ):** η άγνωστη συνάρτηση είναι μίας μεταβλητής.

$$y' - y = 0, \quad y'' + y = 0, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0.$$

- **Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ):** η άγνωστη συνάρτηση είναι περισσότερων μεταβλητών.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Εμφανίζονται δύο ή περισσότερες άγνωστες συναρτήσεις. Π.χ. το σύστημα δύο ΣΔΕ:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy, \end{aligned}$$

όπου εδώ $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι άγνωστες συναρτήσεις και a, b, c, d είναι δοσμένες σταθερές.

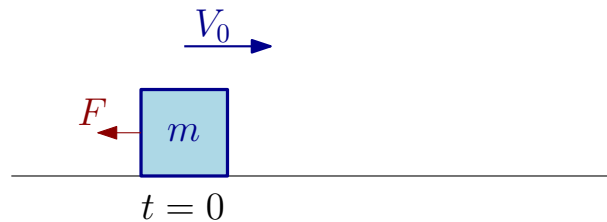
Τάξη της Διαφορικής Εξίσωσης ορίζεται να είναι η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Λύση μιας Διαφορικής Εξίσωσης είναι μία συνάρτηση, παραγωγίσιμη τόσες φορές όσες και η τάξη της εξίσωσης, και η οποία ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (σε κάποιο ανοικτό χωρίο), με την έννοια ότι αν αντικατασταθεί στη διαφορική εξίσωση την επαληθεύει.

Παράδειγμα 1

Σωματίδιο μάζας m κινείται κατά μήκος μιας ευθείας με σταθερή ταχύτητα V_0 . Σε κάποια χρονική στιγμή, έστω $t = 0$, ασκείται στο σωματίδιο μια εξωτερική δύναμη F που αντιτίθεται στην κίνησή του, και είναι ανάλογη της ταχύτητας $v = v(t)$ για θετικούς χρόνους $t > 0$.

Μπορούμε να προβλέψουμε την ταχύτητα του σωματιδίου $v(t)$ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t > 0$;



Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα: «μάζα» $\times$ «επιτάχυνση» = «δύναμη».

$$ma = F$$

- Παράγωγος της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση: $a = v'(t)$.
- Υποθέσαμε ότι η δύναμη είναι ανάλογη της ταχύτητας: $F = -kv(t)$.
(k είναι μια σταθερά αναλογίας, και το « $-$ » προκύπτει επειδή θεωρήσαμε ότι η δύναμη αντιτίθεται στη φορά της κίνησης.)

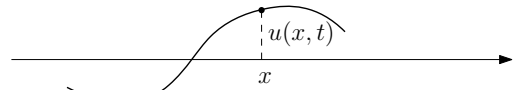
Αντικαθιστούμε τα a και F στην εξίσωση $ma = F$ και καταλήγουμε στην:

$$mv'(t) = -kv(t). \quad (1)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια ΔΕ για την άγνωστη ταχύτητα $v(t)$, και αποτελεί ένα **μαθηματικό μοντέλο** για την κίνηση του σωματιδίου.

Παράδειγμα 2: Η εξίσωση του κύματος ως μοντέλο μιας παλλόμενης χορδής¹

Θεωρούμε μια χορδή η οποία βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας κατά μήκος του x -άξονα. Η χορδή τίθεται σε κίνηση (π.χ. έλκοντας την) και συμβολίζουμε με $u(x, t)$ την κατακόρυφη μετατόπιση της χορδής στη θέση x στη χρονική στιγμή t .



- Οι $u_t(x, t)$ και $u_{tt}(x, t)$ συμβολίζουν την κατακόρυφη ταχύτητα και επιτάχυνση, αντίστοιχα, της χορδής στη θέση x .
- Η $u_x(x, t)$ μετρά την κλίση της χορδής στη θέση x .

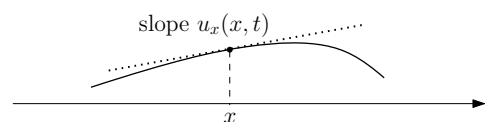
¹R. Knobel, An Introduction to the Mathematical Theory of Waves, AMS, 2000.

Υποθέσεις

- 1 Η χορδή έχει σταθερή πυκνότητα ρ (μάζα/μοναδιαίο μήκος).
- 2 **Επίπεδη ταλάντωση:** Η ταλάντωση λαμβάνει χώρα σε ένα επίπεδο.
- 3 Θεωρούμε ότι η χορδή έχει σταθερή τάση, δηλ. κάθε κομμάτι της χορδής έλκει τα γειτονικά του μέρη με μια δύναμη σταθερού μέτρου T . Βεβαίως, η διεύθυνση της δύναμης αυτής μεταβάλλεται και είναι εφαπτόμενη της χορδής σε κάθε σημείο της.

Μικρές ταλαντώσεις: Καθώς η χορδή ταλαντού-

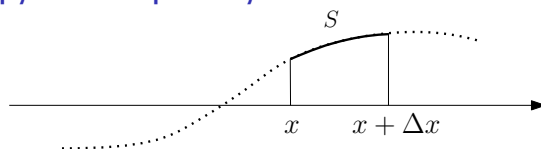
- 4 ται η κλίση $u_x(x, t)$ σε κάθε σημείο της χορδής είναι μικρή.



- 5 **Απουσία εξωτερικών δυνάμεων:** Θεωρούμε ότι μόνον η τάση επιδρά στην ταλάντωση της χορδής. Βαρύτητα, τριβές ή άλλες εξωτερικές δυνάμεις αγνοούνται.

Παραγωγή της μονοδιάστατης εξίσωσης του κύματος

S : το μέρος της χορδής που βρίσκεται μεταξύ των σημείων x και $x + \Delta x$, όπου $\Delta x > 0$ είναι μικρό.



Θεωρούμε το μικρό αυτό μέρος της χορδής ως ένα σώμα που κινείται μόνο ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$(\text{Μάζα του } S) \times (\text{επιτάχυνση του } S) = \text{Ολική δύναμη που επιδρά στο } S, \quad (2)$$

όπου επιτάχυνση και δύναμη έχουν διεύθυνση κάθετη στον x -άξονα.

$$\text{Μάζα του } S = (\text{πυκνότητα}) \times (\text{μήκος του } S) = \rho \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (u_x(s, t))^2} ds$$

Όμως $|u_x|$ μικρό $\Rightarrow (u_x)^2 \ll 1 \quad \therefore \sqrt{1 + (u_x)^2} \approx 1$.

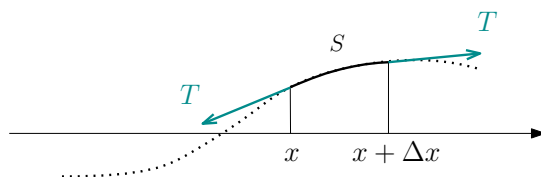
Άρα

$$\text{Μάζα του } S \approx \rho \int_x^{x+\Delta x} 1 ds = \rho \Delta x. \quad (3)$$

Επιλέγουμε το αριστερό άκρο x του S για να περιγράψουμε τη θέση του S . Τότε

$$\text{Επιτάχυνση του } S = u_{tt}(x, t). \quad (4)$$

Τώρα, η ολική τάση είναι το αποτέλεσμα της τάσης που ασκείται στα άκρα του S από τα μέρη της χορδής που βρίσκονται αριστερά και δεξιά του S :

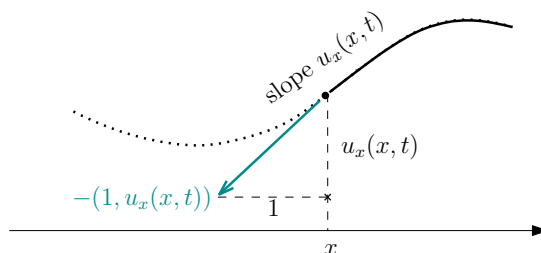


Θεωρούμε το διάνυσμα $-(1, u_x(x, t))$. Αυτό εφάπτεται στη χορδή στη θέση x και έχει φορά προς τα αριστερά.

Άρα το διάνυσμα

$$-\frac{(1, u_x(x, t))}{\sqrt{1 + (u_x(x, t))^2}}$$

είναι ένα διάνυσμα μέτρου 1 που εφάπτεται στη χορδή στη θέση x και έχει φορά προς τα αριστερά.



∴ το διάνυσμα

$$-T \frac{(1, u_x(x, t))}{\sqrt{1 + (u_x(x, t))^2}}$$

εκφράζει την τάση που ασκείται στο αριστερό άκρο του S με φορά προς τα αριστερά.

Η κατακόρυφη συνιστώσα αυτής της δύναμης είναι:

$$-T \frac{u_x(x, t)}{\sqrt{1 + (u_x(x, t))^2}}.$$

Και πάλι από την υπόθεση των «μικρών ταλαντώσεων» έχουμε ότι $\sqrt{1 + (u_x(x, t))^2} \approx 1$, οπότε

Η κατακόρυφη συνιστώσα της τάσης στο αριστερό άκρο του $S \approx -T u_x(x, t)$.

Εντελώς ανάλογα

Η κατακόρυφη συνιστώσα της τάσης στο δεξί άκρο του $S \approx T u_x(x + \Delta x, t)$.

$$\text{Ολική δύναμη στο } S = T u_x(x + \Delta x, t) - T u_x(x, t). \quad (5)$$

Τελικά, από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα (2), και τις (3) – (5), έχουμε

$$\begin{aligned} \rho(\Delta x) u_{tt}(x, t) &= T u_x(x + \Delta x, t) - T u_x(x, t) \\ \Rightarrow u_{tt}(x, t) &= \frac{T}{\rho} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} \\ \xRightarrow{\Delta x \rightarrow 0} u_{tt}(x, t) &= \underbrace{\frac{T}{\rho}}_{=c^2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} \\ \Rightarrow u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \end{aligned}$$

όπου $c = \sqrt{T/\rho}$.

Κατασκευή μαθηματικών μοντέλων

Η κατασκευή ενός ικανοποιητικού μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει ένα πρόβλημα είναι μια σύνθετη και συχνά δύσκολη διαδικασία. Παρόλα αυτά, είναι χρήσιμη η παράθεση των ακόλουθων βημάτων που συχνά αποτελούν μέρος της διαδικασίας:

- (1) Προσδιορίζουμε τις ανεξάρτητες και τις εξαρτημένες μεταβλητές και τις συμβολίζουμε με γράμματα. Συχνά, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος.
- (2) Επιλέγουμε τις μονάδες μέτρησης για κάθε μεταβλητή. Αν και η επιλογή των μονάδων είναι αυθαίρετη, ορισμένες επιλογές μπορεί να είναι βολικότερες από άλλες.
- (3) Διατυπώνουμε τη βασική αρχή που διέπει το πρόβλημα που μελετάμε. Αυτή μπορεί να είναι ένας φυσικός νόμος, όπως ο νόμος της κίνησης του Νεύτωνα, ή μπορεί να είναι μια υπόθεση που βασίζεται στην εμπειρία ή τις παρατηρήσεις μας. Σε κάθε περίπτωση, αυτό το βήμα είναι πιθανό να μην είναι αμιγώς μαθηματικό, αλλά να απαιτεί εξοικείωση με την επιστημονική περιοχή στην οποία υπάγεται το πρόβλημα.

Κατασκευή μαθηματικών μοντέλων

- (4) Εκφράζουμε την αρχή ή τον νόμο του βήματος 3 συναρτήσει των μεταβλητών που επιλέξαμε στο βήμα 1. Αυτό δεν είναι κάτι που γίνεται πάντα εύκολα. Μπορεί να απαιτεί την εισαγωγή φυσικών σταθερών ή παραμέτρων και τον προσδιορισμό των κατάλληλων τιμών τους. Μπορεί επίσης να περιλαμβάνει τη χρήση βοηθητικών ή ενδιάμεσων μεταβλητών που θα πρέπει στη συνέχεια να συσχετιστούν με τις κύριες μεταβλητές.
- (5) Βεβαιωνόμαστε ότι όλοι οι όροι στην εξίσωση έχουν τις ίδιες φυσικές μονάδες. Εάν αυτό δεν συμβαίνει, τότε η εξίσωση είναι λάθος και θα πρέπει να προσπαθήσουμε να την διορθώσουμε. Αν οι μονάδες συμφωνούν, τότε η εξίσωση είναι συνεπής τουλάχιστον διαστατικά, αν και μπορεί να έχει άλλα προβλήματα που δεν μπορεί να εντοπίσει αυτός ο έλεγχος.
- (6) Σε πιο απλά προβλήματα το αποτέλεσμα του βήματος 4 είναι μια διαφορική εξίσωση, η οποία αποτελεί το επιθυμητό μαθηματικό μοντέλο. Ωστόσο, σε πιο σύνθετα προβλήματα το μαθηματικό μοντέλο που θα προκύψει μπορεί να είναι πολύ πιο περίπλοκο και να οδηγεί πιθανώς σε ένα σύστημα πολλών διαφορικών εξισώσεων.

